



Ловейкін В. С.

Човнюк Ю. В.

Дяченко Л. А.

Національний
університет
біоресурсів і
природокористування
України

УДК 534.11

КОНЦЕПТУАЛЬНІ ОСНОВИ АНАЛІЗУ РЕЗОНАНСНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ҐРУНТІВ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОГО ПРИЗНАЧЕННЯ ПРИ ДІЇ ВІБРАЦІЇ

Приведены основные расчетные зависимости для определения резонансных частот колебаний грунтов сельскохозяйственного назначения при их взаимодействии с рабочими органами машин вибрационного действия.

Basic calculation dependencies for determining resonant frequencies of oscillation of farmland soils while interacting with working vibration parts are given.

Постановка проблеми.

У останні роки у зв'язку з розвитком фізичної акустики, акустoeлектроніки й дефектоскопії, методів вібраційної сейсмозв'язки й глибинного зондування земної кори, сейсмології та теорії розрахунку фундаментів споруд великий інтерес у нашій країні й за кордоном викликають задачі про коливання пружних середовищ, викликаних віброуючими джерелами, розміщеними як на границі, так й в середині середовища. У аналізі резонансних властивостей (власних частот коливань) ґрунтів сільськогосподарського призначення при обробці останніх робочими органами машин вібраційної дії можна використати досвід і результати досліджень вказаних вище наукових напрямків та дисциплін.

Накопичені на даний момент часу результати у розв'язуванні граничних задач динамічної теорії пружності досить численні. Детально вивчені закони розповсюдження пружних хвиль у складних середовищах, виявлені нові типи поверхневих й каналових хвиль, розвинуті методи потенціалу й граничних інтегральних рівнянь, які дозволяють розглядати дифракцію хвиль на внутрішніх і поверхневих неоднорідностях.

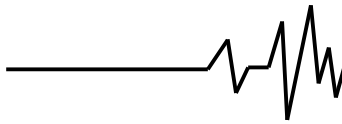
Важливе місце серед цих задач займають проблеми, пов'язані з дослідженням хвильових полів у пружному напівпросторі зі змінними за глибиною властивостями – швидкостями розповсюдження хвиль та щільністю. Така модель називається стратифікованим напівпростором, її частинним випадком є шаруватий напівпростір, у котрому зміни

властивостей відбуваються стрибкоподібно. (До речі, ґрунти сільськогосподарського призначення (ГСП) належать саме до таких середовищ). Дослідженню законів розповсюдження хвиль у таких середовищах присвячена монографія [1], у якій основна увага приділяється променевому методу, а джерело коливань, як правило, не розглядається. Наявність джерела суттєво ускладнює як математичну постановку задачі, так і її розв'язок. Її дослідження у повній мірі неможливе без глибокого математичного аналізу крайових задач і без залучення ЕОМ.

Так, у випадку поверхневого джерела для розв'язку даного класу задач необхідно:

- 1) побудувати матрицю фундаментальних рішень для неоднорідного напівпростору;
- 2) для правильного формування умов випромінювання провести повний аналіз дисперсійних властивостей середовища;
- 3) з інтегральних рівнянь отримати невідомі контактні напруження;
- 4) розробити й реалізувати на ЕОМ ефективні алгоритми розрахунку хвильових полів у ближній та дальній зонах, а також енергії, що переноситься хвилями різних типів [2].

Для однозначного вирішення вихідної крайової задачі необхідно обрати контури інтегрування й гілки радикалів, які входять у інтегральне представлення розв'язку, так, щоб забезпечувалось виконання умов випромінювання. Неоднозначність виникає також за наявності куткових точок на границі області контакту. У цьому випадку необхідно



попередньо визначити припустимий вид особливості напружень у околі кутових точок.

Аналіз публікацій по темі дослідження.

Автори [2] протягом ряду років займалися розробкою теорії і розвитком прикладних методів розв'язку задач про збудження й розповсюдження хвиль, викликаних джерелами у стратифікованих середовищах [3 – 21]. Розвинута коректна математична теорія крайових задач й створений комплекс прикладних методів їх розв'язку, реалізований у програмах на ЕОМ, котрий дозволяє дати відповідь на цілу низку важливих питань щодо збуджуваних хвильових полів, зокрема, про типи хвиль у середовищі, їх амплітудно-частотні характеристики й енергії, які переносяться, про взаємодію хвиль з об'єктами, які знаходяться на поверхні середовища. Проводиться також детальне кількісне вивчення енергетичних характеристик пружних хвиль й аналізується енергетичний баланс стратифікованого напівпростору. Проте дослідженню резонансних властивостей ГСП при дії вібрації приділялось, на думку авторів, недостатньо уваги.

Мета даної роботи полягає у встановленні основних резонансних властивостей та їх параметрів для ГСП при вібрації методами, розвиненими у [1 – 21].

Виклад основного змісту дослідження.

1. Резонансні властивості ГСП скінченної товщини.

Розглянемо модельну задачу для хвильового рівняння і на її прикладі продемонструємо загальну схему побудови розв'язку за допомогою перетворення Фур'є й з урахуванням принципів випромінювання [2]. Хвильова картина у акустичному середовищі (ГСП) визначається рівнянням [22]:

$$\Delta v = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (1)$$

де $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ - швидкість звуку у ГСП,

E – модуль пружності (Юнга),
 ρ – щільність ГСП, відповідно.

Нехай на поверхні ГСП, який займає полосу товщини h : $-\infty \leq x \leq \infty$, $-h \leq z \leq 0$, розміщене джерело гармонічних коливань (вібратор):

$$\left\{ \begin{aligned} \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} &= R_e [q(x) \cdot e^{-i\omega t}], \quad i^2 = -1, \quad x \in [-a; a]; \\ q &\equiv 0, \quad x \notin [-a; a]; \\ v|_{z=-h} &= 0, \quad -\infty \leq x \leq \infty. \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Колівання припускаються усталеними:
 $v(x, z, t) = R_e [u(x, z) \cdot e^{-i\omega t}]$ Комплексна амплітуда u задовольняє рівнянню Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 \cdot u = 0, \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (3)$$

де Δ – оператор Лапласа,
 ω – кругова частота коливань,
 k – хвильовий вектор (квадрат його модуля дорівнює $\frac{\omega^2}{c^2}$).

Тоді граничні умови для $u(x, z)$ приймають вид:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = q, \quad u|_{z=-h} = 0, \quad \text{при } -\infty \leq x \leq \infty. \quad (4)$$

Розв'язок задачі (3), (4) має вигляд [2]:

$$u(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\alpha, z) \cdot Q(\alpha) \cdot e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (5)$$

де

$$Q(\alpha) = \int_{-a}^{+a} q(\xi) \cdot e^{i\alpha\xi} d\xi, \quad K(\alpha, z) = \frac{\text{sh}\{\gamma(z+h)\}}{\gamma \cdot \text{ch}\{\gamma h\}}, \quad (6)$$

$$\gamma = \gamma(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - k^2}, \quad R_e \gamma \geq 0, \quad J_m \gamma \leq 0. \quad (7)$$

Тут $U(\alpha, z) = K(\alpha, z) \cdot Q(\alpha)$ – функція, яка не має точок гілкування, але має лічену множину полюсів, які є нулями знаменника:

$$\zeta_l = \pm \sqrt{k^2 - a_l^2}, \quad a_l = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot l\right)}{h}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8)$$

При $k > \frac{\pi}{2h}$ скінченне число ζ_l

розміщене на дійсній вісі, інші – чисто уявні.

Таким чином, резонансні частоти прошарку ГСП глибиною h визначаються зі співвідношення:



$$w_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot n\right) \cdot \frac{c}{h} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot n\right) \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}}}{h}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

$$f_n = \frac{w_n}{2\pi} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot n\right) \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}}}{2\pi h}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Лінійні частоти (резонансні) для того ж прошарку ГСП глибиною h визначаються наступним чином:

У таблиці 1 наведені значення $w_n, 1/c$ й $f_n, \Gamma\text{ц}$ для різних n, c, h .

Таблиця 1

Резонансні частоти (w_n й f_n) ГСП для різних $n; c, \text{ м}/\text{с}; h, \text{ м}$

n	$c, \text{ м}/\text{с}$	$h, \text{ м}$			
		0,05	0,10	0,15	0,20
1	10	(942,5)/150*	(471,3)/75	(314)/50	(236)/37,5
	20	(1885)/300	(942,5)/150	(628)/100	(471)/75
	30	(2827,5)/450	(1414)/225	(942,5)/150	(707)/112,5
2	10	(1571)/250	(785)/125	(524)/83,3	(393)/62,5
	20	(3142)/500	(1571)/250	(1047)/167	(1571)/125
	30	(4713)/750	(2356)/375	(1571)/250	(1178)/187,5
3	10	(2199)/350	(1100)/175	(733)/117	(550)/87,5
	20	(4398)/700	(2199)/350	(1466)/133,3	(1100)/175
	30	(6597)/1050	(3299)/525	(2199)/350	(1650)/262,5
4	10	(2827)/450	(1413,5)/225	(942,5)/150	(707)/112,5
	20	(5655)/900	(2827,5)/450	(1885)/300	(1414)/225
	30	(8481)/1350	(4241)/675	(2827,5)/450	(2121)/337,5
5	10	(3456)/550	(1728)/275	(1152)/183,3	(864)/137,5
	20	(6912)/1100	(3456)/550	(2304)/366,7	(1728)/275
	30	(10368)/1650	(5184)/825	(3456)/550	(2592)/412,5

* Примітка. Верхнє число (чисельник) відповідає $w, 1/c$;

Нижнє число (знаменник) відповідає $f, \Gamma\text{ц}$.

У таблиці 2 подані резонансні частоти ГСП (w_0 й f_0) для різних $h, \text{ м}$ та $c, \text{ м}/\text{с}$ при $n = 0$ (найнижчі моди).

Таблиця 2

Резонансні частоти ГСП $w_0, 1/c; f_0, \Gamma\text{ц}$; для різних $h, \text{ м}$ й $c, \text{ м}/\text{с}$ при $n = 0$

$c, \text{ м}/\text{с}$	$h, \text{ м}$				
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
10	(314)/50	(157)/25	(104,7)/16,7	(78,5)/12,5	(62,8)/10
15	(471)/75	(235,5)/37,5	(157)/25	(117,8)/18,8	(94,2)/15
20	(628)/100	(314)/50	(209,3)/33,3	(157)/25	(125,7)/20
25	(785)/125	(392,5)/62,5	(261,7)/41,7	(196,3)/31,3	(157)/25
30	(942)/150	(471)/75	(314)/50	(235,5)/37,5	(188,5)/30
35	(1099)/175	(549,5)/87,5	(366,3)/58,3	(274,8)/43,8	(220)/35
40	(1256,7)/200	(628,4)/100	(419,1)/66,7	(314)/50	(251,3)/40

Таким чином, для найнижчої моди ($n = 0$) коливань ГСП при $c = (10 \dots 40) \text{ м}/\text{с}$, $h = (0,05 \dots 0,25) \text{ м}$ маємо:
 $w_0 = (62,8 \dots 1256,7) 1/c, f_0 = (10 \dots 200) \Gamma\text{ц}$.

2. Резонансні властивості системи "ГСП – сейсмічний вібратор" для різних моделей основи (грунту).

А. Модель основи (грунту) Вінклера.

Розглянемо коливання системи "ГСП – сейсмічний вібратор" й визначимо його (грунту) резонансні частоти за моделі основи Вінклера (рис. 1)

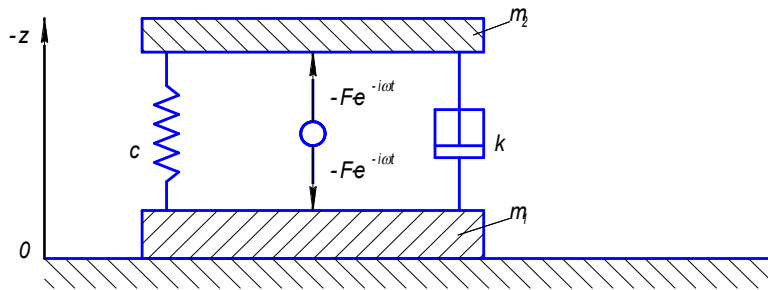
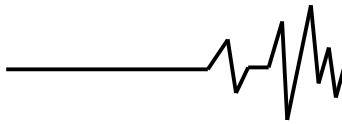


Рис. 1. Система “ГСП – сейсмічний вібратор”

Сейсмічний вібратор моделюється плитою з масою m_1 , який лежить без тертя на поверхні пружного середовища (ГСП) й зв’язаною з масою m_2 пружними і демпфіруючими зв’язками (рис. 1). На обидві маси діє навантаження $F \cdot e^{-i\omega t}$, $i^2 = -1$. Вертикальні коливання плити w_1 і з’єднаної з нею маси w_2 описуються рівняннями:

$$\begin{cases} m_1 \cdot \ddot{w}_1 - k \cdot (\dot{w}_2 - \dot{w}_1) - c \cdot (w_2 - w_1) = F - Q, \\ m_2 \cdot \ddot{w}_2 + k \cdot (\dot{w}_2 - \dot{w}_1) + c \cdot (w_2 - w_1) = -F. \end{cases} \quad (11)$$

Тут $(\dot{w}) \equiv \frac{dw}{dt}$, $\ddot{w} \equiv \frac{d^2w}{dt^2}$,

t – час,
 c – жорсткість пружного зв’язку,
 k – коефіцієнт тертя демпфіруючого зв’язку,
 F – сила, прикладена до плити,

$-Q = -\iint_{\Omega} q_3 dx dy$ – реакція пружного середовища (ГСП) на занурення у нього плити, Ω – область контакту: $(x, y) \in \Omega$, $q_3 = K_{nocm} \cdot w_1$, K_{nocm} – коефіцієнт постілі (Вінклера) основи – ГСП), $\frac{H}{M^3}$.

Будемо вважати, що вібратор працює в усталеному гармонічному режимі з круговою частотою ω . Під w_1 , w_2 , F , Q – у подальшому будемо розуміти комплексні амплітуди відповідних величин. Вважаючи, що площа штапу (маси m_1), який контактує з ГСП, складає S з (11) можна отримати

(враховуючи, що $\frac{d^n}{dt^n} \longrightarrow (-i\omega)^n$):

$$\begin{cases} (-m_1 \cdot \omega^2 - i \cdot \omega \cdot k + c + K_{nocm} \cdot S) \cdot w_1 + (i \cdot \omega \cdot k + c) \cdot w_2 = F, \\ (i \cdot \omega \cdot k - c) \cdot w_1 + (-\omega^2 \cdot m_2 - i \cdot \omega \cdot k + c) \cdot w_2 = -F. \end{cases} \quad (12)$$

Звідси

$$w_1 = -\frac{\omega^2 \cdot m_2}{\Delta(\omega)}; \quad w_2 = -\frac{(K_{nocm} \cdot S - \omega^2 \cdot m_1)}{\Delta(\omega)} \cdot F, \quad (13)$$

$$\Delta(\omega) = \omega^2 \cdot m_2 \cdot (i \cdot \omega \cdot k - c) + (K_{nocm} \cdot S - \omega^2 \cdot m_1) \cdot (\omega^2 \cdot m_2 - i \cdot \omega \cdot k + c). \quad (14)$$

Зрозуміло, що умова:

$$\Delta(\omega) = 0$$

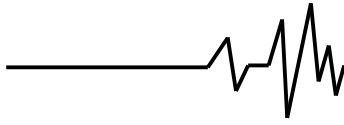
є умовою резонансу розглядуваної системи.

Якби була відсутньою реакція ГСП ($Q \equiv 0$), тоді поліном $\Delta(\omega)$, як поліном четвертого ступеня відносно ω , мав би чотири корені. За наявності $Q \neq 0$ (а, можливо, й $Q = Q(\omega)$) питання про кількість резонансів та їх розміщення у комплексній площині ω вимагає спеціальних аналітичних та чисельних досліджень (у подальшому, для спрощення задачі, вважаємо, що K_{nocm} не залежить від

ω). Особливий інтерес представляють тут дійсні корені, котрим відповідають незатухаючі коливання системи з даною частотою.

Прирівнюючи нулю дійсну та уявну частини $\Delta(\omega)$ з (14) отримуємо 4 можливих частоти коливань розглядуваної системи ($\Omega_{1, 2, 3, 4}$):

1) $\Omega_1 = 0$ (можливе при $\omega \equiv 0$, статичний випадок, або $k = 0$); (15)



$$2) \quad \Omega_2 = \left\{ \frac{K_{nocm} \cdot S}{m_1 + m_2} \right\}^{1/2}; \quad (16)$$

$$3) \quad \Omega_3 = \left\{ -\frac{1}{2} A_1 + \left[\frac{1}{4} A_1^2 + A_2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2},$$

де: $A_1 = \frac{m_1 \cdot c + m_2 \cdot c - K_{nocm} \cdot S \cdot m_2}{m_1 \cdot m_2};$

$$A_2 = \frac{K_{nocm} \cdot S \cdot c}{m_1 \cdot m_2} \quad (17)$$

$$4) \quad \Omega_4 = +i \cdot \left\{ \frac{1}{2} A_1 + \left[\frac{1}{4} A_1^2 + A_2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (18)$$

Коливання у системі відбуваються з частотами Ω_2, Ω_3 , а при $\Omega = w = \Omega_4$ виникає аперіодичний (затухаючий) у часі t процес.

Б. Модель основи ґрунту Пастернака.

У цьому варіанті моделі ГСП:

$$q_3 = K_{nocm} \cdot w_1 + K_1 \frac{dw_1}{dt}, [K_1] = \frac{H \cdot c}{m^3}, \quad (19)$$

де другий доданок у формулі (19) враховує швидкість руху штапу m_1 у ГСП. Тоді у виразі (14) слід здійснити заміну:

$$K_{nocm} \cdot S \Rightarrow K_{nocm} \cdot S - i \cdot w \cdot K_1 \cdot S, \quad (20)$$

Отже, замість (14) у даному випадку матимемо:

$$\Delta^*(w) = w^2 \cdot m_2 \cdot (i \cdot w \cdot k - c) + (K_{nocm} \cdot S - i \cdot w \cdot K_1 \cdot S - w^2 \cdot m_1) \cdot (w^2 \cdot m_2 - i \cdot w \cdot k + c) \quad (21)$$

Прирівнюючи нулю дійсну та уявну частини $\Delta^*(w)$ з (21), отримуємо 4 можливих частоти коливань розглядуваної системи ($\Omega^*_{1, 2, 3, 4}$):

$$1) \quad \Omega_1^* = 0 \text{ (статичний випадок);} \quad (22)$$

$$2) \quad \Omega_2^* = \left\{ \frac{k \cdot K_{nocm} \cdot S + K_1 \cdot S \cdot c}{k \cdot (m_1 + m_2) - K_1 \cdot S \cdot m_2} \right\}^{1/2}, \quad (23)$$

При цьому $\Omega_2^* \rightarrow \infty$ (при $k \cdot (m_1 + m_2) \geq K_1 \cdot S \cdot m_2$);

$$3) \quad \Omega_3^* = \left\{ -\frac{1}{2} A_1^* + \left[\frac{1}{4} (A_1^*)^2 + A_2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}, \text{ де:} \quad (24)$$

$$A_1^* = \frac{m_1 \cdot c + m_2 \cdot c - K_{nocm} \cdot S \cdot m_2 + K_1 \cdot S \cdot k}{m_1 \cdot m_2},$$

(A_2 див. (17));

$$4) \quad \Omega_4^* = +i \cdot \left\{ \frac{1}{2} A_1^* + \left[\frac{1}{4} (A_1^*)^2 + A_2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (25)$$

Коливання у системі відбуваються з частотами Ω_2^*, Ω_3^* , а при $\Omega^* = w = \Omega_4^*$ виникає аперіодичний (затухаючий) у часі t процес.

В. Скінченновимірна модель ГСП (ефект приєднаної маси ґрунту).

Розглянемо вертикальні коливання штапу W під дією навантаження F . Використовуючи [2], можна отримати після зрозумілих спрощень (рис. 2) наступну математичну модель коливань штапу на ГСП:

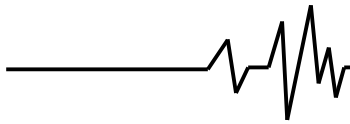
$$-m \cdot w^2 \cdot w = F - Q, \quad Q = w \cdot P_z, \quad (26)$$

де $(-P_z) = -\iint_{\Omega} q_3 \cdot d\Omega$ - реакція середовища

на одиничні переміщення штапу,

$$w = \frac{F}{\tilde{\Delta}(w)}, \quad \tilde{\Delta}(w) = P_z(w) - m \cdot w^2 \quad (27)$$

(Тут Ω - область контакту штапу з ГСП).



Нехай $F = const$, переміщення штампу w цілком визначаються залежністю P_z від w . Зокрема, якщо для всіх w_R :

$\tilde{\Delta}(w_R) = 0$, тоді при $w \rightarrow w_R$ $w \rightarrow \infty$ - частота w_R є резонансною.

Розглянемо для порівняння скінченновимірну модель ГСП. Замінюємо реакцію середовища (ГСП) на реакцію "приєднаної маси" (ГСП) M , зв'язаної зі штампом пружними та демпфіруючіми зв'язками (рис. 2. б).

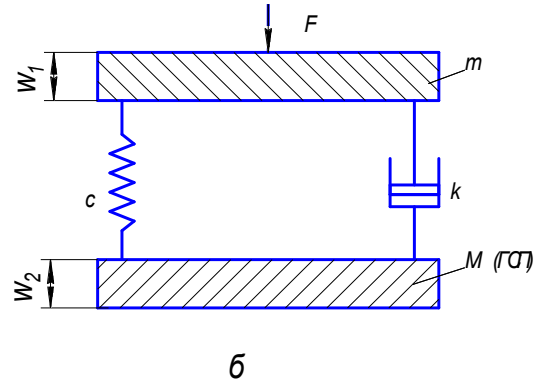
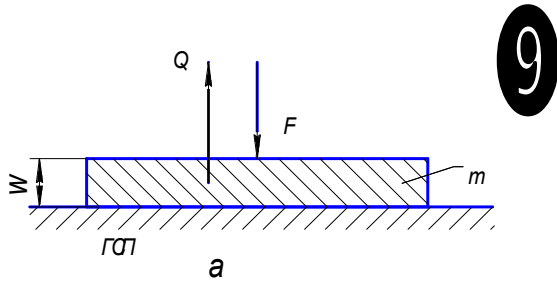


Рис. 2. Скінченновимірна модель взаємодії ГСП зі штампом

Координати центрів мас w_1, w_2 задовольняють системі

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{w}_1 = F - c \cdot (w_1 - w_2) - k \cdot (\dot{w}_1 - \dot{w}_2), \\ M \cdot \ddot{w}_2 = c \cdot (w_1 - w_2) + k \cdot (\dot{w}_1 - \dot{w}_2). \end{cases} \quad (28)$$

З котрої для усталених гармонічних коливань маємо:

$$\begin{cases} w_1 = F \cdot \frac{(\beta - w^2 \cdot M)}{\tilde{\Delta}(w)}, \quad \beta = c - i \cdot w \cdot k, \\ w_2 = F \cdot \frac{\beta}{\tilde{\Delta}(w)}, \quad \tilde{\Delta}(w) = w^2 \cdot [w^2 \cdot m \cdot M - \beta \cdot (m + M)] \end{cases} \quad (29)$$

З $\tilde{\Delta}(w_R) = 0$ випливає:

$$w_R = \sqrt{\beta \cdot \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)}, \quad (30)$$

Порівнюючи (27) та (29), отримуємо, що прийнятому наближенні реакція середовища P_z дається виразом:

$$\tilde{P}_z = - \frac{\beta \cdot w^2 \cdot M}{\beta - w^2 \cdot M}. \quad (31)$$

Зрозуміло, \tilde{P}_z не може описувати реакцію середовища (ГСП) в усьому діапазоні частот, якщо не припустити, що β й M залежать від w . Іншими словами, параметри моделі c, k, M повинні підбиратись для кожної конкретної частоти w , модель "налаштовують" на дану частоту, і користуватись цією моделлю (ГСП) можна тільки у деякому околі даної частоти.

Зокрема, у зоні квазістатисти ($w < 1,57$) P_z - дійсна величина, тому $k = 0$.

На частотах власних коливань прошарку ГСП, де $P_z = 0$, повинні перетворюватись у нуль або зв'язки k, c , або приєднана маса M . З (30) випливає, що w_R зменшується із збільшенням маси штампа m або приєднаної маси ГСП M й зростає зі збільшенням жорсткості c .

Введемо поняття питомого (на одиницю площі штампа) коефіцієнта пружності ГСП - $\alpha, \frac{H}{M^3}$. Тоді, нехтуючи в'язкими властивостями

ГСП ($k \rightarrow 0$), можна w_R подати наступним чином:

$$w_R^2 = \frac{\alpha \cdot S}{m} \cdot \left(1 + \frac{m}{M} \right), \quad (32)$$

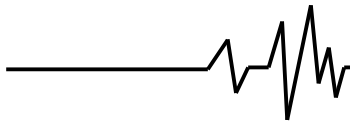
де S - площа поверхні штампа m (поверхні контакту m з ГСП).

Звідси знаходимо формулу для w_R :

$$w_R = \sqrt{\frac{\alpha \cdot S}{m} \cdot \left(1 + \frac{m}{M} \right)^{1/2}}, \quad (33)$$

Тоді:

$$\Omega_R = \frac{w_R}{\sqrt{\frac{\alpha \cdot S}{m}}} = \left(1 + \frac{m}{M} \right)^{1/2}. \quad (34)$$



Таким чином, враховуючи властивості ГСП за допомогою коефіцієнту α , можна

констатувати, що w_R зростає при збільшенні α , S – штампу і залежить від $\frac{m}{M}$ (рис. 3).

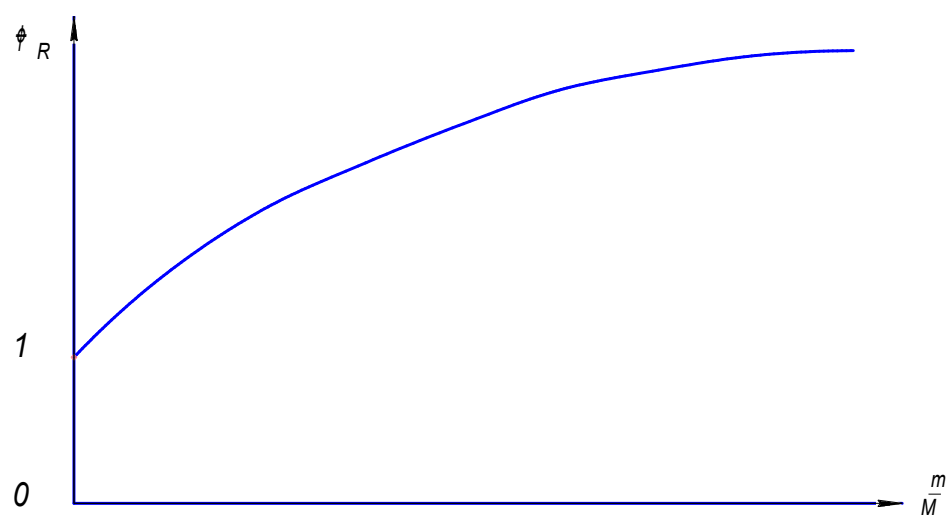


Рис. 3. Залежність Ω_R від $\frac{m}{M}$

Якщо позначити:

$$\sqrt{\frac{\alpha \cdot S}{m}} = w_0, \quad (35)$$

тоді залежність w_R від $\frac{m}{M}$ набуває вигляду (рис. 4).

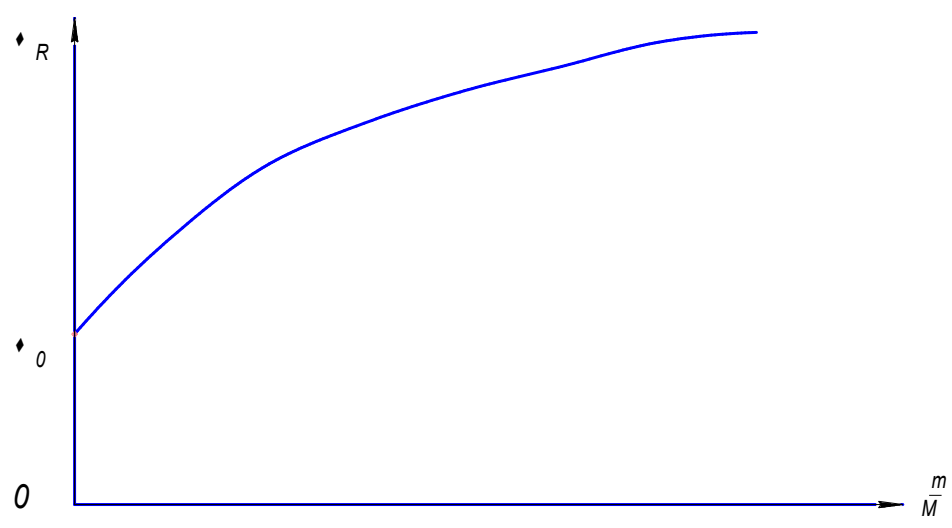
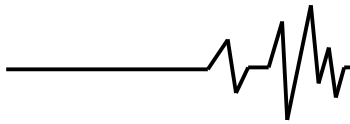


Рис. 4. Залежність w_R від $\frac{m}{M}$

Аналітично залежність, зображену на рис. 4, можна подати у вигляді:

$$w_R = w_0 \cdot \left(1 + \frac{m}{M}\right)^{1/2} \quad (36)$$

Як випливає з (36), $w_R \longrightarrow w_0$ при $\frac{m}{M} \longrightarrow 0$, тобто при $\frac{m}{M} \ll 1$. У таблиці 2



подані значення $\frac{w_R - w_0}{w_0} = \delta$ для різних відношень $\frac{m}{M}$. Зазначимо, що:

Параметр δ характеризує наскільки w_R відмінна від w_0 за інших однакових умов (для різних $\frac{m}{M}$).

$$\delta = \left(1 + \frac{m}{M}\right)^{\frac{1}{2}} - 1. \quad (37)$$

Таблиця 2

Залежність δ від $\frac{m}{M}$ ($\frac{m}{M} < 1$).

$\frac{m}{M}$	δ
0,1	0,0488
0,2	0,0954
0,3	0,1402
0,4	0,1832
0,5	0,2247
0,15	0,0724
0,25	0,1180
0,35	0,1619
0,45	0,2042
$\frac{1}{\infty} = 0$	0

Аналіз результатів, поданих у таблиці 2 свідчить про те, що $\frac{m}{M} = (0,1 \dots 0,5)$ значення w_R відрізняються (у сторону збільшення) від $w_0 = \sqrt{\frac{\alpha \cdot S}{m}}$ на (4,88...22,47)%. Отже, частота w_0 , яка залежить від геометричних характеристик штамп (S), його маси (m) та питомого коефіцієнта пружності (α) ГСП може слугувати досить точною (при інженерних

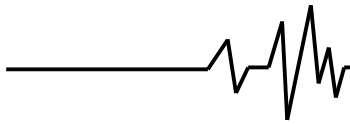
розрахунках) оцінкою w_R прошарку ГСП. (Відхилення тим менші, чим менше $\frac{m}{M}$).

Зазвичай, $\frac{m}{M} > 1$ і M складає (20...40)% m. У таблиці 3 подані значення δ для випадку $\frac{m}{M} > 1$.

Таблиця 3

Залежність δ від $\frac{m}{M}$ ($\frac{m}{M} > 1$)

$\frac{m}{M}$	δ
20	3,5826
10	2,3166
3	1
2	0,7321
1	0,4142
0,8	0,3416
0,6	0,2649



Так, при $\frac{m}{M} = 5$ ($M=0,2 m$) $\delta = 1,4495$;

при $\frac{m}{M} = 2,5$ ($M=0,4 m$) $\delta = 0,8708$.

Отже, при $\frac{m}{M} > 1$ w_R суттєво відрізняється від w_0 , а саме від 358% до 26,5% ($\frac{m}{M} = 20 \dots 0,6$).

Таким чином, у цьому випадку w_0 не може слугувати для кількісної оцінки w_R .

На рис. 5 подана залежність δ від $\frac{m}{M}$.

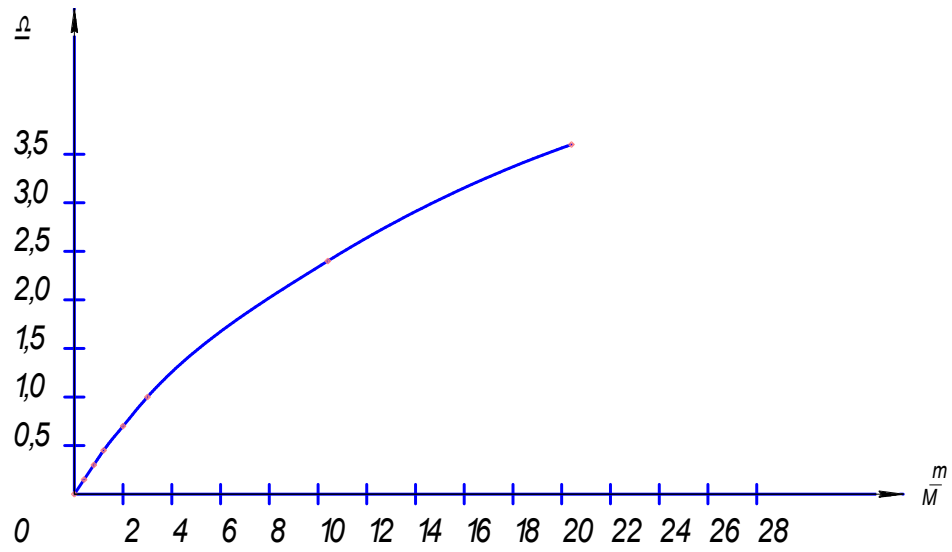


Рис. 5. Залежність δ від $\frac{m}{M}$

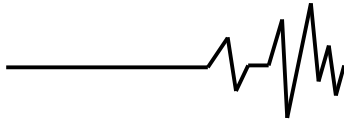
Висновки

1. Визначені аналітично й чисельно резонансні частоти коливання ґрунтів сільськогосподарського призначення (ГСП) для різних товщин (Н) їх прошарків та для різних значень пружних та фізико-механічних властивостей.
2. Знайдені аналітичним шляхом резонансні частоти ГСП для різних моделей ґрунту (Вінклера, Пастернака та скінченновимірної з "приєднаною масою" ГСП).
3. Отримані результати можуть у подальшому слугувати для визначення резонансних частот коливань ГСП, викликаних робочими органами сільськогосподарських машин вібраційної дії та для уточнення та вдосконалення інженерних методів розрахунку та проектування таких машин.

Література

1. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. / Л. М. Бреховских. – М.: Наука, 1973. – 320с.

2. Бабешко В. А. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. / В. А. Бабешко, Е. В. Глушков, Ж. Ф. Зинченко. – М.: Наука. Гл. ред. Физ. – мат. лит., 1989. – 344с.
3. Бабешко В. А. К теории динамических контактных задач. / В. А. Бабешко // ДАН СССР. – 1971. – Т.201, №3.
4. Бабешко В. А. Асимптотические свойства решений некоторых двумерных интегральных уравнений. / В. А. Бабешко // ДАН СССР. – 1972. – Т.206, №5.
5. Бабешко В. А. О единственности решения интегральных уравнений динамических контактных задач. / В. А. Бабешко // ДАН СССР. – 1973. – Т.210, №6
6. Бабешко В. А. Новый эффективный метод решения динамических контактных задач. / В. А. Бабешко // ДАН СССР. – 1974. – Т.217, №4.
7. Бабешко В. А. Метод факторизации в статических и динамических задачах теории упругости. / В. А. Бабешко // Докторская диссертация. – М.: ИПМ АН СССР, 1974.



8. Бабешко В. А. Новый метод в теории пространственных динамических контактных задач. / В. А. Бабешко // ДАН СССР. – 1978. – Т.242, №1
9. Бабешко В. А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задач теории упругости. / В. А. Бабешко. – М.: Наука, 1984. – 400с.
10. Бабешко В. А. К проблеме динамических контактных задач в произвольных областях. / В. А. Бабешко, Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова // Известия АН СССР. МТТ. – 1978. – №3.
11. Бабешко В. А. Об особенностях в угловых точках пространственных штампов в контактных задачах. / В. А. Бабешко, Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова // ДАН СССР. – 1981. – Т.257, №2.
12. Бабешко В. А. Установившиеся колебания массивных объектов на поверхности упругой среды. / В. А. Бабешко, Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова, Ж. Ф. Зинченко. – Ростов-на-Дону: Ростовский гос. ун-т, 1981. Деп. в ВИНТИ 22.01.82, №290 – 82. – 250с.
13. Бабешко В. А. О резонансных свойствах системы штампы – упругий слой. / В. А. Бабешко, Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова. – Краснодар: Кубанск. гос. ун-т, 1985. – Деп. В ВИНТИ 04.12.85, №8329-В. – 138с.
14. Бабешко В. А. Выделение особенностей в угловых точках пространственных штампов в контактных задачах. / В. А. Бабешко, Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова. – Ростов-на-Дону: Ростовский гос. ун-т, 1980. Деп. в ВИНТИ 22.12.80, №5410 – 80. – 315с.
15. Ворович И. И. Неклассические смешанные задачи теории упругости. / И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко. – М.: Наука, 1974. – 280с.
16. Ворович И. И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. / И. И. Ворович, В. А. Бабешко. – М.: Наука, 1979. – 420с.
17. Глушков Е. В. Распределение энергии поверхностного источника в неоднородном полупространстве. / Е. В. Глушков // ПММ. – Т.47, №1.
18. Глушков Е. В. Плоская задача о колебании штампа на слое. / Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова // Изв. СКНЦВШ. – 1979. – №1.
19. Бабешко В. А. Резонансные явления в многослойном полупространстве. / В. А. Бабешко, Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова, Ж. Ф. Зинченко // ДАН СССР. – 1986. – Т.286, №4.
20. Бабешко В. А. Анализ волновых полей, возбуждаемых в упругом стратифицированном полупространстве, поверхностными источниками. / В. А. Бабешко, Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова // Акустический журнал. – 1986. – Т.32, вып.3.
21. Бабешко В. А. Методы построения матрицы Грина стратифицированного упругого полупространства. / В. А. Бабешко, Е. В. Глушков, Н. В. Глушкова // ЖВМ и МФ. – 1987. – Т.27, №1.
22. Кошляков Н. С. Управления в частных производных математической физики. / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М.: Высшая школа, 1970. – 638с.