

Рахманов С.Р.

*Национальная
металлургическая
академия Украины*

УДК 621.744.35

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ
ВИБРАЦИОННОЙ ПРОШИВКИ
ТРУБНОЙ ЗАГОТОВКИ НА
ПРОШИВНОМ ПРЕССЕ**

Разработана математическая модель процесса вибрационной прошивки трубной заготовки, соответствующая области возмущений пластической и упругой взаимодействующих зон очага деформации. Установлены параметры распространения фронта пластической и упругой волн в трубной заготовке при вибрационной прошивке.

The mathematical model of the oscillation sewing of skelp process that proper to the area of indignations plastic and resilient interactive areas of hearth of deformation, is developed. The parameters of plastic front distribution and resilient waves in a skelp at the oscillation sewing are set.

Современные технологические процессы прошивки или экспандирования трубных заготовок из малопластичных и труднодеформируемых металлов на прошивных прессах трубопрессовых установок выдвигают ряд актуальных вопросов по совершенствованию как технологии производства труб, так и модернизации технологического оборудования [1, 2].

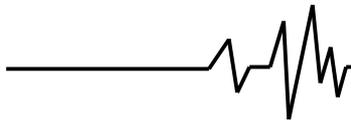
Совершенствование существующих и разработка современных вибрационных технологий производства бесшовных труб требует кардинально нового подхода к задаче оптимизации качества выпускаемой продукции. Последнее непосредственно связано с отработкой рациональных режимов деформации и прогнозированием показателей стойкости, как технологического инструмента, так и надежности функционирования оборудования для реализации самих высокочастотных вибраций [2, 3].

В ряде случаев процессы прошивки или экспандирования трубных заготовок предусматривают применение высокочастотных активных вибраций. Однако, в силу недостаточной изученности, эти процессы не находят широкого применения в практике производства бесшовных труб. В частности, задачи по повышению эффективности процессов прошивки или экспандирования трубной заготовки на прошивном прессе, в условиях применения высокочастотных вибраций, решаются без

должного исследования и, как правило, экспериментально.

Выполнение операций прошивки трубной заготовки на прошивном прессе, как правило, сопровождается значительными потерями рабочего усилия на преодоление сил трения и характерного для процесса неравномерности деформаций по всему объему обрабатываемого металла. Наиболее благоприятные условия деформации прошиваемого металла достигаются в условиях использования высокочастотных вибраций, что получило свое отражение в ряде фундаментальных исследований, как в теоретическом плане, так и экспериментального характера. В основу разработки ряда математических моделей и создания механизмов для вибрационного нагружения металла положены теоретические и экспериментальные разработки В.М. Клименко, В.Н. Потураева, М.Г. Цейтлина, В.Н. Шаповала и других, результаты которых обобщены и наиболее полно представлены в работе [2].

Большинством исследователей аналогично подтверждается тот факт, что применение высокочастотных вибраций при обработке металлов давлением приводит к уменьшению предела текучести материала и, как следствие, к значительному снижению энергосиловых параметров очага деформации. Полученные результаты указывают на важную роль фактора формирования рациональной

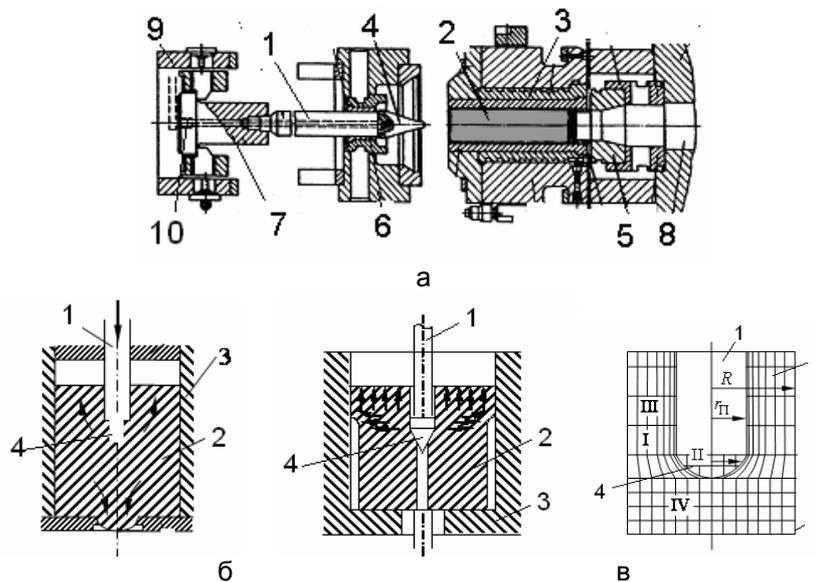


объемной деформации металла и уменьшение внешних контактных и внутренних сил трения. Отметим, что результатами ряда исследований, приведенных в работе [2], установлена некоторая зависимость усилия прессования от частоты колебаний при вибрационном прессовании. При этом выявлено, что для достижения чисто вибрационного режима деформирования заготовки необходимо установление зависимости между частотой, амплитудой и кинематическими параметрами процесса. Следовательно, амплитудно-частотная характеристика базовых технологических инструментов (оправки, иглы), оказывают существенное влияние на эффективность процесса, поскольку определяют вибрационное деформирование заготовки в процессе прошивки.

Для принятия и обоснования решений по ведению вибрационной прошивки трубной заготовки в активном режиме, математическим моделированием возникающего волнового процесса пластической деформации металла, остановимся на некоторых важных моментах известных процессов обработки металлов давлением (ОМД) с применением высокочастотных вибраций.

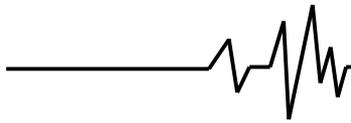
Определение некоторых скрытых возможностей существующих технологий и разработка новой технологии вибрационной прошивки трубных заготовок требует создания новых математических моделей данных процессов, адекватно отражающих условия реализации процесса прошивки или экспандирования гильз на современных прошивных прессах, схема которого приведена на рисунке 1.

Решение задачи о движении металла в очаге деформации в процессе прошивки, основанное на использовании достаточно строгих нелинейных дифференциальных уравнений в условиях больших деформаций в настоящее время является затруднительным из-за недостатка развития математического аппарата. Поэтому на данной стадии исследования наиболее приемлемы приближенные методы, которые тем не менее, позволяют получить достоверные результаты. Следует отметить, что данные методы, хотя и обладают определенной погрешностью, но в основном охватывают физическую суть явлений, происходящих в процессе прошивки сплошной цилиндрической трубной заготовки или экспандирования гильзы заданных геометрических размеров.



а – прошивной пресс; б – модели процесса прошивки трубной заготовки и экспандирования гильзы; в – характерные зоны затрудненной деформации при прошивке заготовки

Рис. 1. Вертикальный прошивной пресс, процессы прошивки и экспандирования трубной заготовки: 1 – стержень иглы; 2 – трубная заготовка; 3 – контейнер; 4 – игла (оправка) или экспандер; 5 – опорное кольцо; 6 – направляющая; 7 – иглодержатель; 8 – станина; 9 – траверса; 10 – высокочастотный вибратор технологического инструмента



Рассмотрим следующую постановку задачи о прошивке предварительно нагретой трубной заготовки оправкой, выполненной в виде тела вращения и движущейся с определенной скоростью прошивки. Оправка, используемая в качестве рабочего инструмента, представляет собой абсолютно твердое осесимметричное тело с заостренным наконечником, которое внедряется в однородную полубесконечную среду, занимающую некоторое полупространство $x \leq 0$, нормально к его свободной поверхности $x = 0$. Возмущенное движение прошиваемого металла (рабочей среды), вызванное оправкой в процессе прошивки, считаем осесимметричным (рис. 2).

Выбираем цилиндрическую систему координат с началом в точке соприкосновения оправки с прошиваемой заготовкой; ось x направим вдоль оси прошиваемой заготовки, время прошивки отсчитываем от момента соприкосновения оправки с металлом. Пусть $H(t)$ – есть глубина внедрения оправки в металл в момент времени t .

Если уравнение поверхности оправки задано в виде $r = f(x), (x \geq 0)$, то положение оправки в выбранной системе координат в момент времени $t \geq 0$ определяется уравнением $r = f[x + H(t)]$.

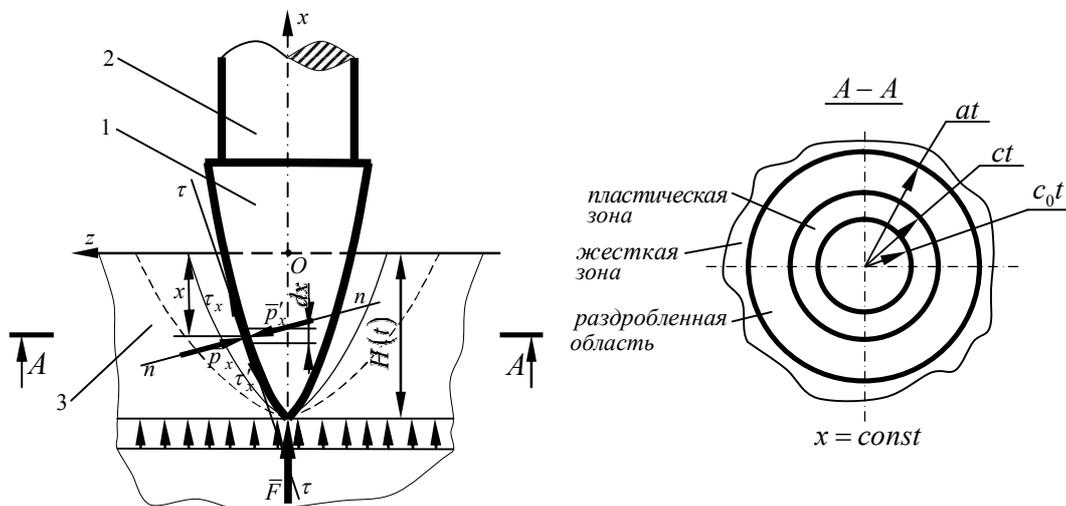


Рис. 2. Расчетная схема и динамические процессы прошивки трубной заготовки: 1 – оправка; 2 – стержень оправки; 3 – трубная заготовка

В некоторой фиксированной плоскости $x = const$ сечение движущейся оправки представляет собой окружность переменного радиуса $r_0(t) = f[t + H(t)]$, изменяющуюся в радиальном направлении со скоростью

$$c_0(t) = \dot{r}_0(t) = \frac{d}{dt} f(x + H(t)) = f'(x + H(t))u_0(t), \quad (1)$$

где $u_0(t) = \dot{H}(t)$ – скорость прошивки; $f'(x + H(t))$ – тангенс угла наклона образующей оправки к оси x на некоторой заданной глубине $x = const$.

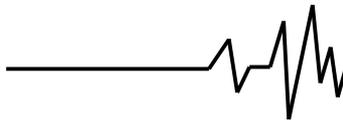
Если оправка, удерживаемая стержнем, выполнена в виде эквивалентного конуса с углом полураствора θ_s , то $f(x) = x \operatorname{tg} \theta_s$, и скорость расширения поперечного сечения

оправки в плоскости $x = const$ будет одинакова.

$$c_0(t) = u_0(t) \operatorname{tg} \theta_s. \quad (2)$$

Отбрасывая некоторые особенности реализации существующего технологического процесса, будем считать, что процесс прошивки ведется в установившемся режиме и с постоянной скоростью. Поэтому в первом приближении можно принять, что $u_0(t) = u_0 = const$. При этом каждое поперечное сечение металла при перемещении оправки расширяется с постоянной скоростью $c_0 = u_0 \operatorname{tg} \theta_s = const$, и движение границ в фиксированной плоскости можно рассматривать, как автомодельное.

Предлагаемый приближенный подход к решению рассматриваемой задачи прошивки



состоит в следующем: считается, что каждый слой металла трубной заготовки в некоторой фиксированной плоскости $x = const$ движется независимо от других слоев, причем движение начинается с того момента времени, когда наконечник оправки достигает данной плоскости. При этом исходная задача сводится к задаче о расширении цилиндрической каверны в сплошной среде (заготовке). Данная модель представляет собой задачу о распространении одномерных радиальных волн в слое, в радиальном направлении перпендикулярном направлению движения оправки в процессе прошивки металла. Таким образом, можно сказать, что предлагаемый подход к решению задачи базируется на методе плоских сечений и развивает известные теоретические положения процессов прошивки заготовки осесимметричным инструментом (оправкой).

Экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния металла показывает, что при существующих скоростях прошивки в сплошной цилиндрической заготовке, кроме зоны упругого состояния, преимущественно возникает зона пластического состояния, а в некоторых случаях и зона разрушения металла. Поэтому первоначально рассмотрим отдельно указанные зоны и дадим приближенное решение динамической задачи для каждой из них. Результаты ряда экспериментальных исследований [3, 4] указывают на необходимость поэтапного исследования деформированного состояния прошиваемого металла в стесненном очаге деформации и управления напряженно-деформированным состоянием в процессе реализации технологических операций с помощью высокочастотных вибраций.

Принимаем во внимание то, что пластическая область очага деформации расположена в зоне контакта с оправкой. Следовательно, в рамках выбранной динамической модели в каждом сечении очага деформации $x = const$ пластическая зона представляет собой концентрическую область, ограниченную окружностью радиусом $r_0(t)$. Пластическая зона расширяется со скоростью $c_0(t)$ – скоростью расширения поперечного сечения оправки. Окружность радиуса $R(t)$, которая определяет границы пластической области со стороны внешней области, расширяется с неизвестной заранее скоростью

$$c = \dot{R}(t). \quad (3)$$

Область, примыкающая к пластической зоне по окружности $r = R(t)$, как будет показано в дальнейшем, иногда может рассматриваться как упругая область. Для радиального перемещения металла в рассматриваемом слое очага деформации $x = const$ законы сохранения массы и количества движения в выбранной цилиндрической системе координат имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} = -\rho \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right); \quad (4)$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = -\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (5)$$

где $\rho(r, t)$ – плотность металла; $v(r, t)$ – радиальная скорость частиц металла (положительная в сторону возрастания геометрических размеров оправки); σ_r, σ_θ – соответственно радиальная и окружная компоненты напряжения (положительные при сжатии).

Уравнения (4) и (5) пригодны как для пластической зоны, так и для упругой зоны. Пластичность рабочей среды (металла) при рассматриваемом подходе наиболее удобно описывать критерием текучести по Треску, который в нашем случае имеет вид $\sigma_r - \sigma_\theta = \tau_0$. Здесь τ_0 – предел текучести прошиваемого металла ($\tau_0 = const$).

Кроме того, необходимо отметить, что относительное изменение объема, как известно из [7, 8] является упругой деформацией, которая обычно в теории пластичности считается пропорциональной давлению металла в очага деформации

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_x). \quad (6)$$

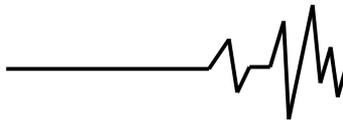
Предполагаем, что между давлением p и изменением объема существует линейная зависимость, которую представим в виде

$$p = K \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right), \quad (7)$$

где ρ_0, ρ – соответственно начальная и текущая плотность металла при прошивке; K – объемный модуль упругости прошиваемого материала.

Система уравнений (4), (5), (6) и (7) не является замкнутой, так как содержит пять неизвестных функций: $v, \rho, \sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_x$.

Классическая теория пластичности при рассмотрении движения металла с цилиндрической симметрией использует



различные гипотезы и предположения относительно взаимосвязи напряжения σ_x с другими компонентами полного напряжения и деформаций. Одним из таких предположений в теории пластичности является предположение о линейности связи между девиатором тензора напряжений и девиатором тензора деформаций. Совместно с условием об отсутствии осевой деформации указанное предположение приводит к следующей связи между напряжениями

$$\sigma_x = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) - G\varepsilon, \quad (8)$$

где ε – объемная деформация металла.

Поскольку ε величина достаточно малая, то в уравнении (8) часто пренебрегают последним членом, в результате чего получаем равенство $\sigma_x = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta)$, рекомендуемое Хиллом в работе [7].

Результаты исследования [9] говорят о том, что кроме условия (8) в ряде случаев применимо условие

$$\sigma_x = \sigma_\theta. \quad (9)$$

Оба условия (8) и (9) принадлежат к классу более общего параметрического условия согласно [6, 7], $\sigma_x = s\sigma_\theta + (1-s)\sigma_r$, соответственно при значениях параметра $s = 1/2$ и $s = 1$.

Если использовать выдвинутое условие, то для давления металла в очаге деформации получим выражение

$$p = \frac{1}{3}[(2-s)\sigma_r + (1+s)\sigma_\theta]. \quad (10)$$

В силу записанного, уравнение (7) примет вид

$$1 - \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{1}{3K}[(2-s)\sigma_r + (1+s)\tau_0], \quad (11)$$

или, с учетом условия текучести (10) будем иметь

$$1 - \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{1}{K} \left[\sigma_r - \frac{1}{3}(1+s)\sigma_\theta \right]. \quad (12)$$

Исключив из уравнений (3) и (4) σ_θ при помощи условия (9) и ρ при помощи равенства (12), получаем

$$\left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\tau_0}{r} \right) \left(K - \sigma_r + \frac{1+s}{3} \tau_0 \right) = -\rho_0 K \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right), \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \left(K - \sigma_r + \frac{1+s}{3} \tau_0 \right) = - \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial t} + v \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} \right). \quad (14)$$

Именно эти два уравнения определяют пластическое движение материала в области очага деформации $r_0(t) \leq r \leq R(t)$, для оправки с произвольной криволинейной образующей $r = f(x)$ и произвольным законом движения $u_0(t)$.

Если оправка принудительно внедряется в металл с постоянной скоростью u_0 и имеет конический наконечник (носик), то граница контакта пластической зоны с оправкой движется с постоянной скоростью $c_0 = u_0 t g \theta_s$, и задача (13), (14) оказывается автомодельной, поскольку не имеет характерного размера. В этом случае скорость распространения пластической зоны c также постоянна и граница пластической области равна $R(t) = ct$. Перейдя в уравнениях (13) и (14) к безразмерным величинам

$$\bar{v} = \frac{v}{c}; \bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{K}; \bar{\tau}_0 = \frac{\tau_0}{K}, \quad \text{являющимися}$$

функциями только автомодельной переменной, которую удобно взять в виде $\xi = \frac{r}{ct}$, получим

систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений

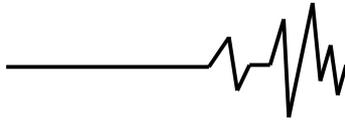
$$\left[1 - \bar{\sigma}_r + \frac{1}{3}(1+s)\bar{\tau}_0 \right] \left[\frac{d\bar{\sigma}_r}{d\xi} + \frac{\bar{\tau}_0}{\xi} \right] = \beta^2 \frac{d\bar{v}}{d\xi} (\xi - \bar{v}); \quad (15)$$

$$\left[1 - \bar{\sigma}_r + \frac{1}{3}(1+s)\bar{\tau}_0 \right] \left[\frac{d\bar{v}}{d\xi} + \frac{\bar{v}}{\xi} \right] = \frac{d\bar{\sigma}_r}{d\xi} (\xi - \bar{v}), \quad (16)$$

$$\text{где } \beta = \frac{c}{c_p}, \quad c_p = \frac{K}{\rho_0}.$$

Система уравнений (15) и (16) описывает пластическое течение металла в области $c_0 t < r < ct$ очага деформации, которая в автомодельных переменных является интервалом $\xi_0 \leq \xi \leq 1$. Здесь ξ_0 – нижний предел автомодельной переменной $\xi_0 = \frac{c_0}{c} \leq 1$, который соответствует границе контакта металла с оправкой в процессе прошивки заготовки.

Обратим внимание на тот факт, что граница $r = R(t)$ заранее неизвестна, и в



автомодельной задаче (из-за выбора в качестве характерной скорости величины c) неизвестным оказывается значение ξ_0 на границе с оправкой.

Для осесимметричной оправки с произвольной криволинейной образующей решение задачи в пластической зоне сводится к решению системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных (13) и (14) в подвижной области $r_0(t) < r < R(t)$ с заранее неизвестной границей $R(t)$. Для некоторых условий внедрения оправки, выполненной строго в виде конического тела вращения, с постоянной скоростью u_0 задача в конечном итоге сводится к упрощенному решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (15) и (16) в области с фиксированными границами $\xi = \xi_0 < 1$ и $\xi = 1$ с заранее неизвестной величиной ξ_0 .

Из граничных условий при $\xi = \xi_0$ известно значение скорости $v = c_0$ или

$$\bar{v} \Big|_{\xi=\xi_0} = \frac{c_0}{c} = \xi_0, \text{ условия на границе } \xi = 1$$

должны определяться из условия стыковки решения в пластической зоне с решением в той зоне, которая примыкает к пластической.

Линеаризованная задача для пластической области базируется на основных предположениях линейной теории пластичности [7].

Численные результаты показывают, что хотя изменение плотности прошиваемой заготовки происходит, но величина ρ_0/ρ отличается от единицы незначительно. Кроме

того величины $v \frac{\partial \rho}{\partial r}$ и $v \frac{\partial v}{\partial r}$ имеют второй порядок, поэтому в линейном приближении задачи вместо уравнений (3) и (4) воспользуемся дифференциальными уравнениями

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) = 0; \quad (17)$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\tau_0}{r} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (18)$$

Исключив из уравнений (17) и (18) плотность металла ρ при помощи уравнения (19) придем к следующей системе уравнений

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\tau_0}{r} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}; \quad (19)$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial t} + K \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) = 0, \quad (20)$$

которая является линеаризованным вариантом системы (3) и (4).

Для оправки с коническим носиком (наконечником) при постоянной скорости внедрения u_0 задача (19) и (20) является автомодельной и в переменных (15) и (16) приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{\sigma}_r}{d\xi} + \frac{\bar{\tau}_0}{\xi} = \beta^2 \xi \frac{d\bar{v}}{d\xi}; \quad (21)$$

$$\frac{d\bar{v}}{d\xi} + \frac{\bar{v}}{\xi} = \xi \frac{d\bar{\sigma}_r}{d\xi}, \quad (22)$$

на интервале переменной $\xi_0 \leq \xi \leq 1$.

В дальнейшем ограничимся только решением линеаризованной системы уравнений (21) и (22), которая, как показывает сравнение с численным решением нелинейной системы (17) и (18), имеет удовлетворительную точность, но обладает тем преимуществом, что линеаризованная система допускает замкнутое аналитическое решение задачи.

Из (21) и (22) имеем самостоятельное уравнение для определения функции $\bar{v}(\xi)$

$$\left(1 - \beta^2 \xi^2\right) \frac{d\bar{v}}{d\xi} + \frac{\bar{v}}{\xi} = -\bar{\tau}_0, \quad (23)$$

которая при $\xi = \xi_0$ должна удовлетворять граничному условию $\bar{v} \Big|_{\xi=\xi_0} = \xi_0$. Решение уравнения (23), удовлетворяющее последнему условию, имеет вид

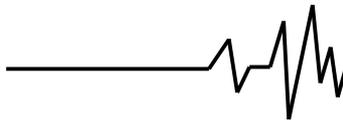
$$\bar{v}(\xi) = D_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2 \xi^2}}{\beta^2 \xi} - \frac{\bar{\tau}_0}{\beta^2 \xi}, \quad (24)$$

где $D_0 = \frac{\beta^2 \xi_0^2 + \bar{\tau}_0}{\sqrt{1 - \beta^2 \xi_0^2}}$.

Теперь из (21) получаем выражение для определения $\bar{\sigma}_r(\xi)$

$$\bar{\sigma}_r(\xi) = D_0 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \beta^2 \xi^2}}{\beta \xi} + D_1, \quad (25)$$

где D_1 – произвольная постоянная.



Постоянная D_1 и безразмерная скорость распространения пластической зоны $\beta = c/c_p$ должны быть определены из условия сопряжения пластической зоны с внешней зоной, примыкающей к пластической. Для внешней зоны могут применяться различные математические модели и физические представления. Здесь использованы две наиболее распространенные: модель упругой зоны очага деформации и модель зоны, разрушенной радиальными трещинами.

Упругая область очага деформации (в силу особенностей реализации технологического процесса прошивки) ограничена некоторой «жесткой» областью технологического инструмента (границы контейнера). В упругой области очага деформации имеем известные уравнения теории упругости [8], которые для радиального движения металла имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (26)$$

$$-\sigma_r = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + 2G \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (27)$$

$$-\sigma_\theta = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + 2G \frac{u}{r}, \quad (28)$$

$$-\sigma_x = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right), \quad (29)$$

где $u(r, t)$ – радиальное смещение частиц металла; $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$; E, G –

соответственно модуль упругости Юнга и модуль сдвига прошиваемого металла; ν – коэффициент Пуассона.

Напряжение по-прежнему считается положительным для сжатия, и в выражении (26) учтено, что в рамках рассматриваемого подхода осевое удлинение прошиваемой заготовки сравнительно мало.

Исключив из уравнения (26) напряжения σ_r и σ_θ , после преобразований получим уравнение волновых процессов для возмущенной области очага деформации в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$a = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}. \quad (30)$$

Из уравнения (30) следует, что скорость распространения упругой цилиндрической волны в прошиваемой трубной заготовке равна скорости распространения продольных возмущений a . Если некоторый момент времени, когда носик оправки достигает рассматриваемое сечение $x = const$ считать нулевым, то к моменту времени t упругая волна в данном слое очага деформации захватит область радиусом $r = at$. Отметим, что если упругая зона очага деформации, по исходному предположению задачи, соседствует с пластической, то она расположена в кольце $R(t) < r < at$.

В случае, если носик оправки является коническим и движется в обтекающем потоке металла с постоянной скоростью, то упругая зона расположена в кольце $ct < r < at$. При этом замкнутое решение задачи можно реализовать путем конструирования области возмущения очага деформации.

Перейдем к детальному анализу математической модели возмущенной области очага деформации (30) и изучению волновых процессов в прошиваемом металле.

С учетом определенных начальных и граничных условий задачи

$$u|_{t=0} = f(r); \quad \frac{du}{dr}|_{t=0} = F(r); \quad \frac{du}{dr}|_{r=R} = 0, \quad (31)$$

решение уравнения (30) представим по методу Фурье в виде

$$u(r, t) = T(t)W(r). \quad (32)$$

После подстановки (32) в дифференциальное уравнение волновых процессов (30) имеем

$$W''(r)T(t) + \frac{1}{r}W'(r)T(t) - \frac{1}{r^2}W(r)T(t) = \frac{1}{a^2}T''(t)W(r) \quad (33)$$

Разделяя переменные задачи после некоторых преобразований (33) запишем

$$\frac{W''(r) + \frac{1}{r}W'(r) - \frac{1}{r^2}W(r)}{W(r)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda^2 \quad (34)$$

Из уравнения (34) имеем следующую систему независимых дифференциальных уравнений

$$W''(r) + \frac{1}{r}W'(r) - \left(\lambda^2 - \frac{1}{r^2}\right)W(r) = 0; \quad (35)$$

$$T''(t) + \lambda^2 a^2 T(t) = 0. \quad (36)$$

Решения дифференциальных уравнений (35) и (36) согласно [11] соответственно запишем в виде

$$W(r) = C_1 J_1(\lambda r) + C_2 Y_1(\lambda r); \quad (37)$$