

В. М. Булгаков, В. В. Адамчук
О. М. Черниш, М. Г. Березовий
Г. М. Калетнік, В. В. Яременко

ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

ПІДРУЧНИК

**В.М. Булгаков, В.В. Адамчук, О.М. Черниш, М.Г. Березовий,
Г.М. Калетнік, В.В. Яременко**

ПРИКЛАДНА МЕХАНІКА

ПІДРУЧНИК

Київ 2020

УДК 531.(075.8)

ББК 22.21Я73

П75

*Рекомендовано до друку вченою радою Національного університету
біоресурсів і природокористування України
(протокол № 3 від 28 жовтня 2020 р.)*

Рецензенти:

чл.-кор НААН, доктор техн. наук, професор **В.Т. Надикто**

(Таврійський державний агротехнічний університет)

доктор техн. наук, професор **В.Г. Мироненко**

(ННЦ «ІМЕСГ»)

доктор техн. наук, професор **С.Ф. Пилипака**

(Національний університет біоресурсів і природокористування України)

П75 **Прикладна механіка** / [Булгаков В.М, Адамчук В.В., Черниш О.М., Березовий М.Г., Калетнік Г.М., Яременко В.В. – К.: Центр учбової літератури, 2020.– 906 с., 59,5 умов.друк.арк

ISBN 978-611-01-2134-7

У підручнику викладено основні розділи прикладної механіки — теоретичну механіку (статику, кінематику, динаміку), теорію механізмів і машин, опір матеріалів та деталі машин. Матеріали підручника відповідають сучасним вимогам до курсу прикладної механіки для вищих навчальних закладів. Поряд з основними теоретичними положеннями розділів дисципліни, надається багато прикладів розв'язування задач, які охоплюють різноманітні технічні питання. Логіка побудови і методика висвітлення курсу сприяє засвоєнню теоретичного матеріалу, а також допомагає у самостійній роботі студентів, виконанні лабораторних та розрахункових робіт. Значне місце відведено вирішенню практичних інженерно-технічних задач. Наведено запитання для самоконтролю.

Рекомендовано студентам денної, заочної і дистанційної форм навчання вищих навчальних закладів, а також може бути корисне магістрам, аспірантам, інженерно-технічним працівникам.

УДК 531.(075.8)

ББК 22.21Я73

ISBN 978-611-01-2134-7

© Булгаков В.М, Адамчук В.В.,
Черниш О.М., Березовий М.Г.,
Калетнік Г.М., Яременко В.В., 2020



Булгаков Володимир Михайлович

Професор кафедри механіки НУБіП України, доктор технічних наук, професор, дійсний член (академік) НААН України, заслужений винахідник України, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки. Є автором і співавтором понад 150 наукових статей в іноземних виданнях, 650 авторських свідоцтв і патентів, 9 монографій, 29 підручників і навчальних посібників. Під його науковим началом захистили дисертації шість докторів та дванадцять кандидатів технічних наук. Нагороджений орденом «За заслуги» III ступеня, нагрудним знаком "Відмінник освіти України" МОН, багатьма іншими відзнаками.

e-mail: vbulgakov@meta.ua



Адамчук Валерій Васильович

Директор Національного наукового центру «Інститут механізації та електрифікації сільського господарства» НААН України, доктор технічних наук, професор, академік Національної академії аграрних наук України. Заслужений діяч науки і техніки України. Є фундатором наукового напрямку механізованого застосування мінеральних добрив та хімічних меліорантів, автором і співавтором понад 500 наукових праць, зокрема 30 книг, 47 методичних рекомендацій і брошур.

e-mail: nnc-imesg@ukr.net, nsc.imesg@gmail.com



Черниш Олег Миколайович

Доцент кафедри механіки НУБіП України, кандидат технічних наук, доцент.

Викладає дисципліни «Теорія механізмів і машин», «Теоретична механіка», «Прикладна механіка» «Проектування машин і обладнання (вібраційної дії)». Наукові інтереси пов'язані із моделюванням прикладних задач механіки, довговічністю і живучістю конструкцій, вібраційними процесами та переробкою продукції в агропромисловому виробництві. Автор понад 140 друкованих праць, у тому числі 5-и монографій, 17 підручників і навчальних посібників, 18 авторських свідоцтв і патентів.

e-mail: chernysh@nubip.edu.ua



Березовий Микола Георгійович

Завідувач кафедри механіки НУБіП України, кандидат технічних наук, доцент.

Напрямок наукових досліджень – розробка математичних моделей функціонування сільськогосподарських машини та їх робочих органів, динаміка механізмів і машинних агрегатів. Є автором і співавтором понад 210 наукових і навчально-методичних праць, в тому числі 32 наукових статей в іноземних виданнях, 53 патентів на винаходи, 6 навчальних посібників і 5 підручників.

e-mail: berezovyi@nubip.edu.ua



Калетнік Григорій Миколайович

Президент Вінницького Національного аграрного університету, доктор економічних наук, професор, дійсний член (академік) НААН України.

Відмінник народної освіти УРСР. Лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки. Нагороджений орденами «За заслуги» III і II ступенів, багатьма іншими відзнаками. Є автором понад 350 наукових і навчально-методичних праць, серед яких 24 монографії, 20 навчальних посібників, 8 підручників та понад 150 наукових статей у фахових виданнях, 61 патент на винаходи та корисні моделі.

e-mail: office@vsau.org, email - kaletnik@vsau.vin.ua



Яременко Вадим Володимирович

Доцент кафедри механіки НУБіП України, кандидат технічних наук, доцент.

В 2002-2007 рр. працював у Національному науковому центрі «Інститут механізації та електрифікації сільськогосподарства» НААН України на посадах інженера, молодшого наукового співробітника, наукового співробітника. Напрямок наукових досліджень – технічна діагностика гідравлічних приводів сільськогосподарської техніки. Є автором і співавтором понад 50 наукових праць, 7 патентів, 4 підручників, 5 навчальних посібників, 3 монографій.

e-mail: yaremenko@nubip.edu.ua

ПЕРЕДМОВА

Матеріали підручника відповідають сучасним вимогам до курсу прикладної механіки для вищих навчальних закладів і викладені таким чином, що можуть бути корисними як студентам денної, заочної і дистанційної форм навчання, які вивчають курс у повному обсязі, так і студентам, які навчаються за скороченими програмами. Підручник може бути також використаний магістрами, аспірантами та інженерно-технічними працівниками.

За змістом підручник поєднує в собі шість частин, які висвітлюють основні розділи прикладної механіки — теоретичну механіку (статичку, кінематику, динаміку), теорію механізмів і машин, опір матеріалів та деталі машин

Поряд з основними теоретичними положеннями дисципліни, надається багато прикладів розв'язування задач, які охоплюють різноманітні технічні питання. Логіка побудови і методика висвітлення курсу сприяє засвоєнню теоретичного матеріалу, а також допомагає у самостійній роботі студентів, виконанні лабораторних та розрахункових робіт. Значне місце відведено вирішенню практичних інженерно-технічних задач.

Частина наданого матеріалу призначена для самостійного опрацювання. В кінці кожного розділу наведені запитання для самоконтролю і закріплення знань.

Над підручником працював колектив авторів: Булгаков В.М (передмова, вступ, частини I, II, III), Адамчук В.В. (вступ, частини III, VI), Черниш О.М. (частини I, II, III, IV, VI), Березовий М.Г. (частини III, IV, V), Калетнік Г.М. (вступ, частини II, VI), Яременко В.В. (частини II, III, V, VI).

ВСТУП

Сучасні вимоги до виробництва і технологій потребують високої кваліфікації майбутнього спеціаліста як з фахових дисциплін, так і з загальнотехнічних, які закладають загальну базу технічної грамотності та ерудованості фахівця.

При цьому необхідно вміти самостійно реагувати на всі питання, що пов'язані з використанням передового досвіду експлуатації технічних засобів, новітніх технологій, бути здатними оперативно приймати вірні рішення та мати чіткі уявлення щодо загальних технічних проблем сьогодення.

Прикладна механіка, як комплекс загальнотехнічних дисциплін, є теоретичною і науковою основою вивчення і опанування сучасної техніки і технологій. Користуючись її законами і принципами, можуть бути розроблені й досліджені споруди, конструкції, машини та обладнання.

Основною задачею вивчення прикладної механіки є підготовка кваліфікованих спеціалістів, які здатні забезпечити самостійне розв'язування багатьох технологічних і інженерних задач, які пов'язані із раціональним використанням технічних засобів, їх вдосконаленням і налаштуванням відповідно до конкретних умов роботи.

Прикладна механіка включає в себе наступні частини, які тісно пов'язані між собою: теоретичну механіку, теорію механізмів і машин, опір матеріалів, деталі машин.

В теоретичній механіці вивчаються найбільш загальні закономірності рівноваги і механічного руху матеріальних об'єктів.

Під механічним рухом матеріальних тіл розуміють зміну положень матеріальних тіл у просторі протягом часу. Предметом теоретичної, або загальної, механіки є матеріальні тіла у вигляді простіших моделей, які розглядаються у зв'язку зі зміною їхнього взаємного розташування. Цей видимий зовнішній рух і називається механічним рухом.

Теоретична механіка є однією з фундаментальних загальнонаукових дисциплін фізико-математичного циклу і є, фактично, науковою базою усіх галузей виробництва та перобки.

В свою чергу, в теоретичній механіці традиційно розглядають питання статички, кінематики та динаміки.

При цьому в статичці досліджуються властивості сил, способи перетворення систем сил і умови рівноваги тіл під дією систем сил; в

кінематиці розглядається рух тіл із геометричної точки зору без урахування їх мас і діючих сил; в динаміці, яка є найбільшим і узагальненим розділом теоретичної механіки, розглядається рух матеріальних тіл під дією прикладених до них сил.

В теорії механізмів і машин вивчаються структура і класифікація механізмів і машин, методи їх кінематичного і динамічного аналізу та питання синтезу за заданими властивостями.

В опорі матеріалів вивчаються основи розрахунків деталей і елементів конструкцій на міцність, жорсткість і стійкість.

В деталях машин на базі знань і навиків, набутих в попередніх розділах, вивчають принципи розрахунків при проектуванні та конструюванні деталей як загального, так і спеціального призначення для конкретних умов їх експлуатації.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

ЧАСТИНА I. СТАТИКА

РОЗДІЛ 1. ВИЗНАЧЕННЯ. ПЛОСКА СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

1.1. Предмет статички. Основні поняття і визначення

Статика є розділом теоретичної механіки, що вивчає властивості сил і умови рівноваги тіл під дією цих сил.

В теоретичній механіці розглядають не реально існуючі тіла, а наділені ідеальними властивостями їх абстрактні моделі.

Матеріальна точка – це тіло певної маси, розмірами та формою якого можна нехтувати в умовах даної задачі.

Система матеріальних точок (матеріальна система) – це сукупність точок, положення і рух яких взаємопов'язані і взаємообумовлені.

Абсолютно тверде тіло – це тіло, в якому відстані між двома довільними точками не змінюються з часом, простіше, це тіло, яке не деформується під дією сил.

В природі не існує тіл, які повністю відповідають цим поняттям. Матеріальна точка, система матеріальних точок та тверде тіло є розрахунковими моделями при розв'язанні поставлених технічних задач не тільки статички, але і інших розділів теоретичної механіки.

Розглянемо поняття сили і системи сил, що діють на матеріальні тіла.

Тіла в природі різним чином взаємодіють між собою або з оточуючим їх середовищем. Механічна взаємодія тіл, тобто взаємодія, що впливає на їх стан спокою або руху (механічний стан), характеризуються силами.

Сила – це кількісна міра механічної взаємодії двох тіл, яка визначає характер, величину та напрямок взаємодії.

Визначення сили характеризує її як векторну величину, що має три визначальних параметри: величину сили (числове значення), напрямок дії та точку прикладання. Числове значення сили називається модулем вектора сили. Напрямок сили – це напрямок того руху, що отримує тіло або матеріальна точка під дією цієї сили. Пряма лінія, по якій направлений вектор сили, називається лінією дії сили.

Графічно силу зображують у вигляді вектора довільної довжини

(крім випадків графічної статyki, коли силу креслять у масштабі).

Наприклад, на рис. 1.1 показана довільна сила \vec{P} , яка зображена у вигляді вектора \overline{AB} , що прикладений у точці A і діє вздовж лінії дії сили MN .

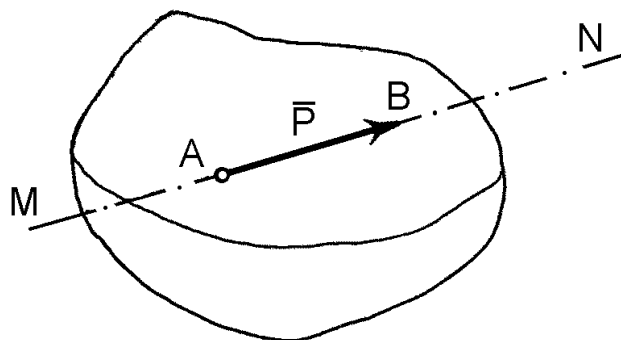


Рис. 1.1

У Міжнародній системі одиниць вимірювання (СІ) одиницею вимірювання сили є один ньютон – $[1\ H]$ або один кілоньютон $[1\ кН]$. Причому $1\ [кН]=1000[H]$. У технічній системі (МКГСС) одиницею вимірювання сили є один кілограм–сили – $[кГ]$ або $[кгс]$, у системі (СГС) – одна дина $[дин]$.

На тіло можуть одночасно діяти декілька сил, утворюючи систему.

Система сил – це сукупність декількох сил, які одночасно діють на тіло або на механічну систему.

Сили, лінії дії яких знаходяться в одній площині, утворюють *плоску систему сил*. Якщо лінії дії сил знаходяться в різних площинах, маємо *просторову систему сил*.

Система з лініями дії сил, що перетинаються в одній точці називається *збіжною системою сил*, а з паралельно розташованими лініями дії – *паралельною системою сил*.

Система сил може мати одночасно декілька ознак. Наприклад, існує плоска система збіжних сил і т.п.

Крім того, для перетворення систем сил з метою їх спрощення і аналізу застосовують наступні поняття:

еквівалентні системи сил – це такі системи сил, які на одне і теж тіло діють однаково;

рівнодійна сила системи сил – це така сила, дія якої еквівалентна дії заданої системи сил;

зрівноважувальна сила – це сила, яка за величиною дорівнює рівнодійній силі, розташована з нею на одній прямій, але протилежна за

напрямом.

Таким чином, задачі статички полягають у:

- визначенні методів перетворення систем сил з метою спрощення і заміни їх найменшою кількістю силових факторів;

- визначенні умов рівноваги тіл під дією різних систем сил як на площині, так і у просторі;

Під рівновагою тіла розуміють такий механічний стан, при якому інші тіла, що діють на це тіло, не змінюють цього стану.

Основними випадками, при яких можлива рівновага тіла, є його рівномірний прямолінійний рух, рівномірний обертальний рух та стан відносного спокою.

1.2. Аксиоми статички

В основу статички покладені аксиоми – положення, які базуються на основі досвіду практичних знань і приймаються без доведення.

I аксіома. визначає врівноважену систему сил.

Система сил, що прикладена до матеріальної точки, буде врівноваженою, якщо під її дією цієї системи точка знаходиться у стані відносного спокою або рухається рівномірно і прямолінійно.

II аксіома встановлює умову рівноваги двох сил.

Дві сили, які прикладені до абсолютно твердого тіла, будуть взаємно врівноваженими, якщо вони однакові за модулем і діють по одній прямій у протилежних напрямках.

На рис. 1.2 показане довільне тіло, яке перебуває у стані рівноваги під дією двох сил \vec{P}_1 і \vec{P}_2 з однаковими модулями $|\vec{P}_1| = |\vec{P}_2|$ і розташованими на одній прямій MN в протилежних напрямках. Точки прикладання сил можуть співпадати.

Таким чином, $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$.

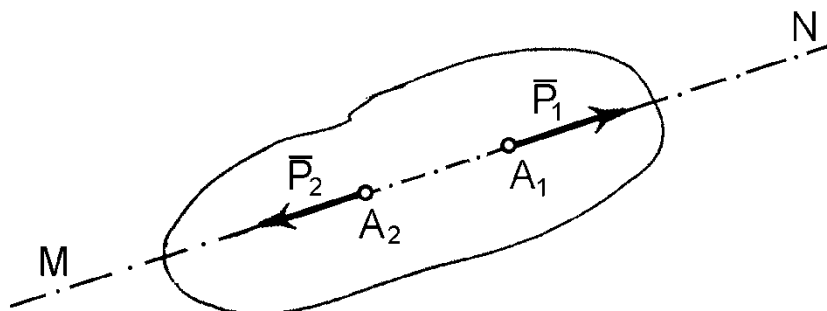


Рис. 1.2

III аксіома є основою для перетворення систем сил.

Стан рівноваги тіла не порушиться, якщо до тіла приєднати або відкинути зрівноважену систему сил.

Наприклад, система зрівноважених сил (\vec{P}_1, \vec{P}_2) показана на рис. 1.2. Ця аксіома носить назву аксіоми виключення сил.

Наслідок з II-ї і III-ї аксіом.

Точку прикладання сили можна пересувати в межах даного тіла вздовж лінії дії сили (сила є ковзним вектором).

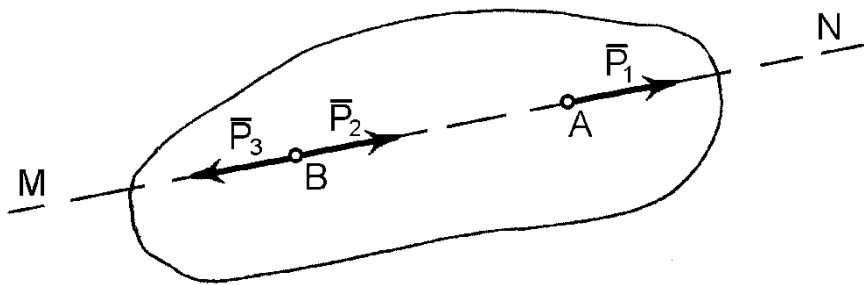


Рис. 1.3

Наприклад, прикладемо до тіла (рис. 1.3) на лінії MN в точці A вектор сили \vec{P}_1 , а в довільній точці B - сили \vec{P}_2 і \vec{P}_3 , такі, що $\vec{P}_2 = \vec{P}_1$, а $\vec{P}_3 = -\vec{P}_1$.

Згідно другої аксіоми сили \vec{P}_2 і \vec{P}_3 зрівноважені, а згідно третьої аксіоми їх можна приєднати, не змінюючи кінематичного стану тіла.

Але цю систему трьох сил можна розглядати по іншому: як силу \vec{P}_2 , яка дорівнює силі \vec{P}_1 і перенесена з точки A в точку B , і зрівноважену систему двох сил (\vec{P}_1 і \vec{P}_3), яку можна відкинути.

IV аксіома визначає правило складання двох непаралельних сил.

Рівнодійна двох непаралельних сил, що прикладені до тіла в одній точці, є діагоналлю паралелограма, який побудований на цих силах, як на сторонах, і прикладена в точці їх перетину.

Ця аксіома носить назву закону паралелограма сил.

Припустимо, що до тіла (рис. 1.4) в точці A прикладені дві сили \vec{P}_1 та \vec{P}_2 , які розташовані під кутом α .

Побудуємо на цих силах, як на сторонах, паралелограм і проведемо крізь точку A діагональ, яка і буде рівнодійною $\vec{R}_{1,2}$ цих сил.

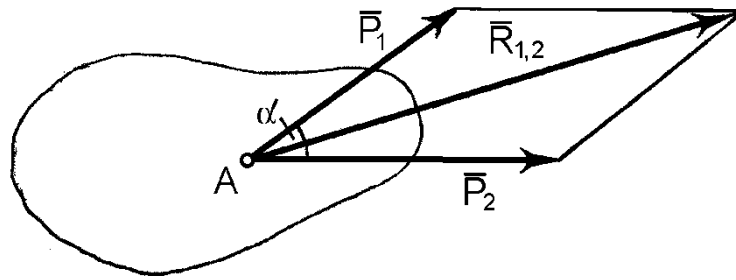


Рис. 1.4

Таким чином, III аксіома статички дає можливість геометрично додати дві сили, що прикладені в одній точці

$$\bar{R}_{1,2} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2. \quad (1.1)$$

З курсу геометрії відомо, що діагональ паралелограма, тобто модуль рівнодійної, дорівнює

$$R_{1,2} = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos \alpha}. \quad (1.2)$$

V аксіома встановлює, що не існує односторонньої дії сили.

Два взаємодіючих тіла діють одне на одне з рівними за модулем, але протилежними за напрямком силами.

Ця аксіома носить назву закону дії та протидії.

Слід зауважити, що сили взаємодії ніколи не зрівноважуються, тому що вони прикладені до різних тіл.

1.3. Вільне і невільне тіло. В'язі та їх реакції

У теоретичній механіці тверді тіла і матеріальні системи поділяються на вільні та невільні.

Тіло вважається *вільним*, якщо воно має можливість рухатись у просторі в будь – якому напрямку і *невільним* – якщо рух його у просторі чимось обмежується.

Тіла, або перешкоди, що обмежують рух даного тіла, називаються *в'язями*. Вважається, що на невільне тіло накладені в'язі.

Механічна дія в'язі на дане тіло називається *реакцією в'язі*. У статиці розглядаються найпростіші в'язі у формі різних твердих та гнучких тіл.

Розглянемо основні типи в'язей як розрахункові моделі. Кожна з цих в'язей має свою назву, графічне зображення і свої реакції.

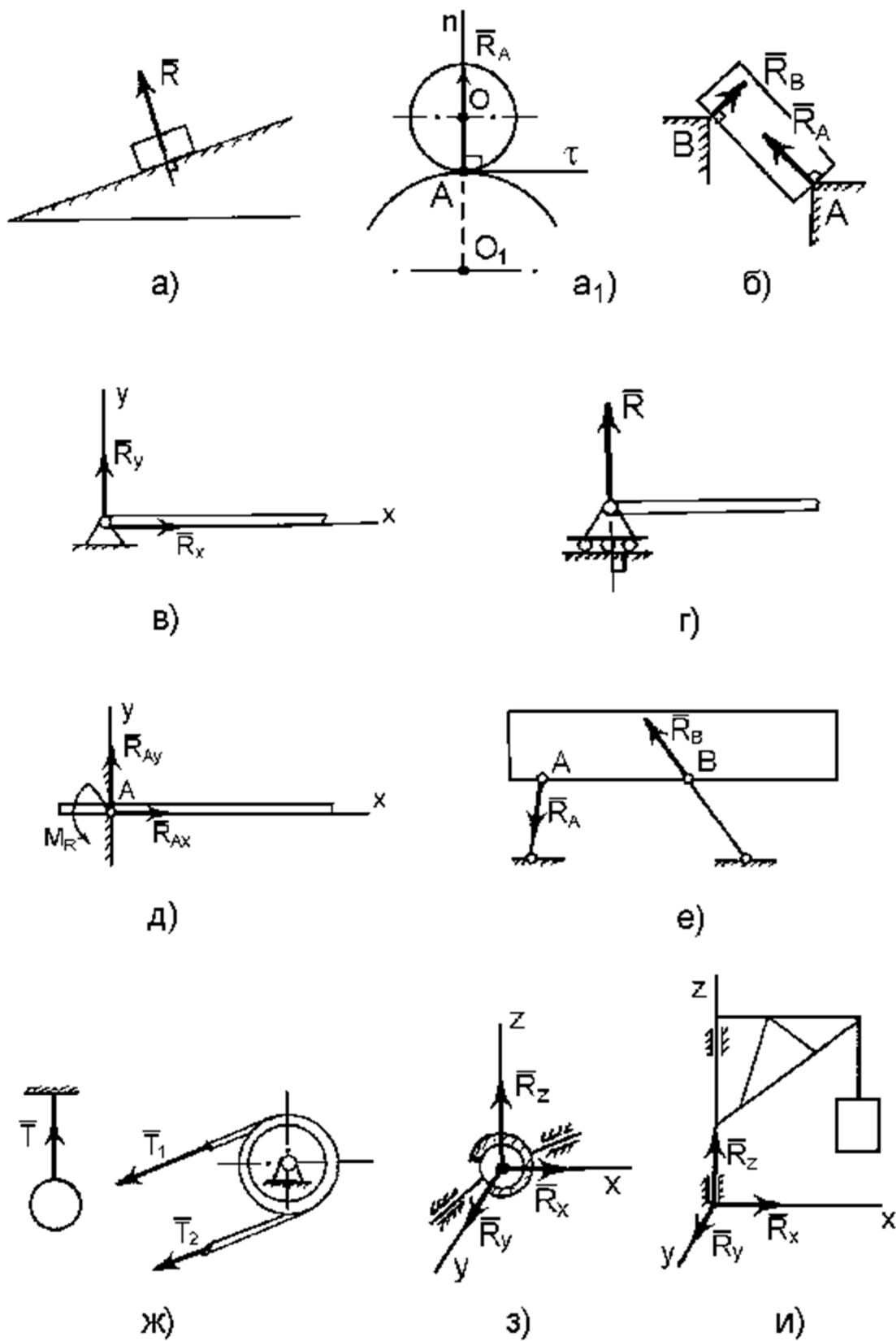


Рис. 1.5

1. *Ідеально гладенька поверхня або опора* (рис. 1.5, а). Реакція цієї в'язі \bar{R} спрямована перпендикулярно до поверхні або розташована вздовж нормалі. Гладенька площина накладає одну в'язь – неможливість рухатись по нормалі від поверхні, тому буде одна реакція, яка напрямлена проти напрямку втраченого переміщення за рахунок накладення в'язі.

Якщо поверхня є сферичною (рис. 1.5, а₁), то реакція \bar{R}_A проходить крізь центри сфер O і O_1 по нормалі n (перпендикулярно до дотичної τ).

2. *Точкова опора* (рис. 1.5, б). Якщо гладенька площина вироджується у лінію або точку, то реакція в'язей \bar{R}_A і \bar{R}_B буде спрямована по перпендикуляру до лінії (поверхні) тіла, яке утримується в даній точці.

3. *Шарнірно – нерухома опора або нерухомий шарнір* (підшипник) (рис. 1.5, в). Реакція шарнірно – нерухомої опори прикладена у центрі шарніра і заздалегідь невідома за напрямком. Невідомий вектор реакції розкладається на дві складових вздовж осей координат \bar{R}_x і \bar{R}_y . З другого боку, ця опора накладає дві в'язі – неможливість вертикального і горизонтального переміщень, тому і буде дві відповідні складові реакції у площині, яка перпендикулярна до осі шарніра.

4. *Шарнірно – рухома опора або коток* (рис. 1.5, г). Реакція цієї в'язі \bar{R} спрямована перпендикулярно до площини, по якій рухається коток.

5. *Жорстке закріплення* (рис. 1.5, д). Реакція цієї в'язі представлена складовими у вигляді сил \bar{R}_{Ax} , і \bar{R}_{Ay} та моменту реакції M_R . Це відповідає кількості в'язей, які накладає ця опора: неможливість вертикального і горизонтального лінійних переміщень та повороту у площині.

6. *Ідеальний стержень, тобто невагомий тонкий стержень, на кінцях якого встановлені циліндричні, точкові шарніри і який працює тільки на розтяг або на стиск* (рис. 1.5, е). Реакція цієї в'язі \bar{R} спрямована вздовж стержня і прикладена у центрі шарніра.

7. *Гнучка нитка* або в'язь, яка здійснюється ідеальними гнучкими тілами, тобто невагомими, нерозтяжними нитками: канатами, пасами, ланцюгами (рис. 1.5, ж). Реакція цієї в'язі \bar{T} напрямлена вздовж нитки і прикладена у точці закріплення A . У пасовій передачі натяги в її гілках \bar{T}_1 і \bar{T}_2 також вважаються реакціями гнучких в'язей.

8. *Сферичний шарнір* або його частковий випадок – *підп'ятник* (рис. 1.5, з, и). Реакція цієї в'язі зображена трьома складовими у вигляді реакцій \bar{R}_x , \bar{R}_y , \bar{R}_z , напрямлених вздовж осей просторової декартової системи координат xuz , з початком у центрі сферичного шарніра або підп'ятника.

У зв'язку з введенням поняття в'язей вводиться VI та VII аксіоми

статики, які носять назви аксіоми про звільнення від в'язей та аксіоми про накладання нових в'язей.

VI аксіома. Рівновага невільного матеріального тіла не порушиться якщо відкинути в'язі, що накладені на нього, а замість них прикласти сили, які дорівнюють їх реакціям.

VII аксіома. Рівновага невільного матеріального тіла не порушиться якщо на нього накласти нові в'язі.

1.4. Плоска система збіжних сил. Визначення рівнодійної системи геометричним способом.

Якщо всі сили, що прикладені до тіла, розташовані в одній площині та лінії їх дії перетинаються в одній точці, то така система сил носить назву плоскої системи збіжних сил.

Покажемо довільне тіло, до якого прикладена плоска система збіжних сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots, \vec{P}_n$ (рис. 1.6). При цьому лінії дії всіх сил перетинаються в точці A .

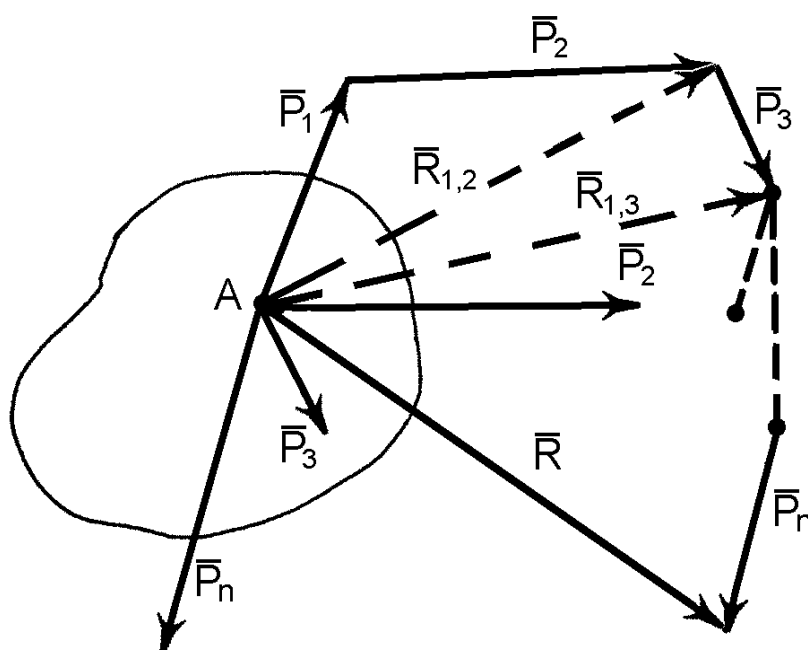


Рис. 1.6

Для визначення рівнодійної цієї системи необхідно додати всі вектори сил, що утворюють систему.

Геометричний спосіб додавання збіжних сил зводиться до побудови силового багатокутника. Він будується шляхом паралельного перенесення векторів сил у масштабі, коли початок наступної сили співпадає з кінцем попередньої сили (рис.1.6). Тоді вектор рівнодійної з'єднує початок першої сили з кінцем останньої сили.

Це можна записати так:

$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \dots + \bar{P}_n, \quad (1.3)$$

або в скороченому вигляді:

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k. \quad (1.4)$$

Тобто, *рівнодійна плоскої системи збіжних сил дорівнює векторній сумі цих сил і є замикаючою стороною силового багатокутника, побудованого на векторах сил цієї системи.*

Величина рівнодійної сили не зміниться, якщо буде змінено порядок приєднання (додавання) сил до багатокутника, але конфігурація силового багатокутника буде іншою.

1.5. Умова рівноваги плоскої системи збіжних сил у геометричній формі

Якщо до вільного матеріального тіла прикладена одна сила певної величини, то про рівновагу цього тіла мови бути не може. Тобто, якщо розглядати плоску систему збіжних сил, яка зведена до рівнодійної, то тіло не може бути у рівновазі.

Тільки у випадку, коли рівнодійна системи дорівнює нулю (рис. 1.7), ця система буде знаходитись у стані рівноваги.

Таким чином, *для рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна всіх сил дорівнювала нулю.*

Ця умова виражається векторним рівнянням:

$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3 + \dots + \bar{P}_n = 0, \quad (1.5)$$

або скорочено:

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k = 0. \quad (1.6)$$

Рівнодійна такої системи сил буде дорівнювати нулю, коли силовий багатокутник буде замкненим, тобто коли початок вектора першої сили буде співпадати з кінцем вектора останньої сили.

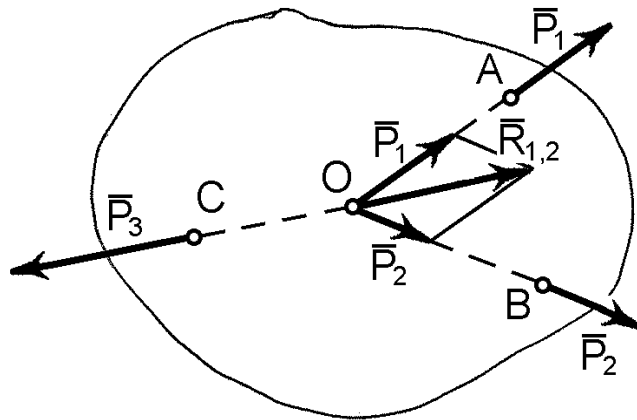


Рис. 1.7

Геометричну умову рівноваги можливо застосовувати при розв'язанні деяких задач статички графічним методом. При цьому:

- 1) вибирають тіло, рівновагу якого будуть розглядати;
- 2) відкидають в'язі, замінюючи їх реакціями;
- 3) користуючись умовою рівноваги, будують замкнений силовий багатокутник і визначають невідомі величини (у більшості випадків – це реакції в'язей).

Розв'язання задач на рівновагу за допомогою графічної побудови силових багатокутників має певні незручності, пов'язані з відкладанням векторів на площині і точністю отриманих результатів.

Доцільніше при розв'язанні таких задач користуватись не геометричною, а аналітичною умовою рівноваги, яка базується на методі проєкцій сил на осі координат.

1.6. Проекція сили на осі координат

Проекцією сили на вісь – називається напрямлений відрізок на осі, утворений між перпендикулярами, які опущені із початку і кінця вектора сили на цю вісь.

Правило знаків для проєкції наступне:

якщо напрямок проєкції сили на вісь співпадає з позитивним напрямком осі, то така проєкція буде додатною, якщо ні – то від'ємною.

Розглянемо вектор сили \vec{P} , що довільно розташований у площині прямокутної декартової системи координат Oxy (рис. 1.8).

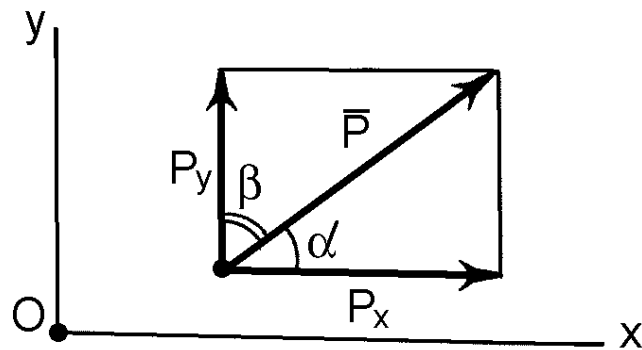


Рис. 1.8

Проекціями сили \bar{P} на осі координат x і y будуть відповідні відрізки P_x і P_y , величину яких можна визначити за відомими із геометрії виразами:

$$P_x = P \cdot \cos \alpha, \quad (1.7)$$

$$P_y = P \cdot \sin \alpha.$$

За знаком ці проекції будуть додатні, коли кут α (кут перетину напрямку вектора сили або лінії дії сили з віссю x) гострий.

Цілком зрозуміло, якщо цей кут дорівнює 90° , то проекції $P_x=0$, $P_y=P$. Тобто, сила, яка направлена паралельно осі, проектується на цю вісь в натуральну величину, а її проекція на перпендикулярну вісь дорівнює нулю.

Коли кут α буде тупим, то практично зручніше знайти інший гострий кут перетину лінії дії сили з віссю x і визначати проекції за його допомогою та правила знаків.

Таким чином, за величиною та напрямком вектора сили \bar{P} завжди можна визначити його проекції на осі координат.

Але справедливим буде і зворотне ствердження. За величиною проекцій P_x та P_y завжди можна визначити модуль вектора самої сили \bar{P} , а також його напрямок.

Модуль сили \bar{P} , як діагональ прямокутника, побудованого на його проекціях, визначається з наступного виразу:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}. \quad (1.8)$$

Кути між вектором сили \bar{P} та осями x та y визначаються за допомогою напрямних косинусів:

$$\cos \alpha = \cos (x, \hat{\bar{P}}) = \frac{P_x}{P},$$

$$\cos \beta = \cos (y, \hat{\bar{P}}) = \frac{P_y}{P}. \quad (1.9)$$

Знаючи напрямні косинуси, через арккосинуси можна знайти і самі кути.

1.7. Визначення рівнодійної плоскої системи збіжних сил аналітичним способом

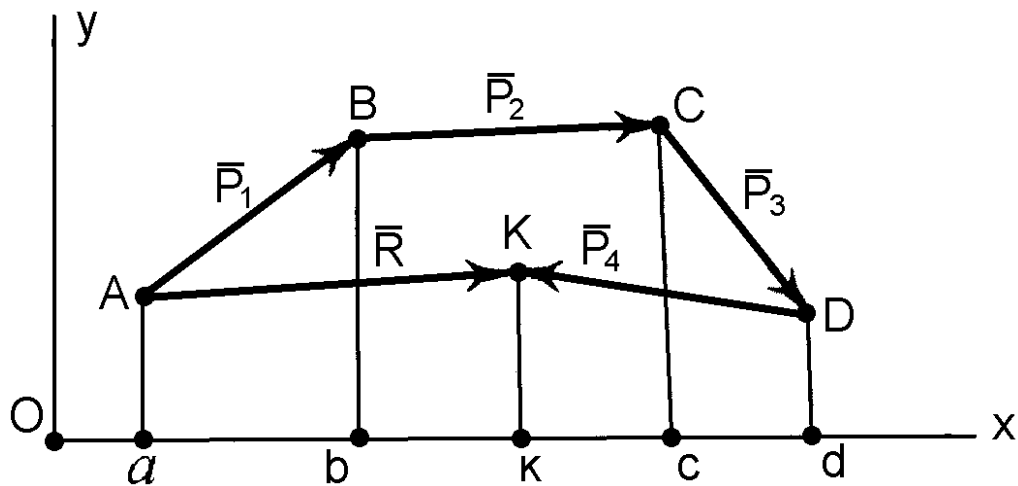


Рис. 1.9

Рівнодійна \bar{R} плоскої системи збіжних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ дорівнює векторній сумі цих сил і є замикаючою стороною силового багатокутника, побудованого на векторах сил цієї системи (рис. 1.9).

Знайдемо проекцією рівнодійної сили \bar{R} на вісь x .

Для цього введемо на площині прямокутну декартову систему координат Oxy і спроектуємо на вісь x всі сили системи.

Позначимо кінці векторів всіх сил літерами – A, B, C, D, K і проведемо перпендикуляри з кожної точки на вісь x .

Точки перетину перпендикулярів з віссю, які позначені відповідними малими літерами – a, b, c, d, k , утворили на осі x напрямлені відрізки, які і є проекціями всіх сил на цю вісь.

Кожна проекція, відповідно, дорівнює:

$$|ab| = P_{1x}; \quad |bc| = P_{2x}; \quad |cd| = P_{3x}; \quad |-dk| = P_{4x}. \quad (1.10)$$

Додамо алгебраїчно всі проекції і підрахуємо, чому ця сума дорівнюватиме:

$$ab + bc + cd - dk = ak. \quad (1.11)$$

Але відрізок ak і є проекцією рівнодійної сили \bar{R} на вісь x . Поширюючи цю суму на n сил, можна записати:

$$R_x = P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \dots + P_{nx} = \sum_{k=1}^n P_{kx}, \quad (1.12)$$

або:

$$R_x = \sum_{k=1}^n P_{kx}. \quad (1.13)$$

Проекція вектора рівнодійної сили на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій векторів складових сил на ту ж саму вісь.

Аналогічно проекція рівнодійної сили \bar{R} на вісь y буде дорівнювати

$$R_y = P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + \dots + P_{ny} = \sum_{k=1}^n P_{ky}. \quad (1.14)$$

Тоді модуль рівнодійної сили дорівнює через її проекції:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \quad (1.15)$$

Кути між вектором рівнодійної \bar{R} та осями координат x та y визначимо через напрямні косинуси:

$$\begin{aligned} \cos(\hat{x}, \bar{R}) &= \frac{R_x}{R}, \\ \cos(\hat{y}, \bar{R}) &= \frac{R_y}{R}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Знаючи напрямні косинуси, через арккосинуси є можливість знайти самі кути.

1.8. Умови рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил в аналітичній формі

Як показано раніше, плоску систему збіжних сил можна замінити однією силою, яка буде рівнодійною цієї системи.

Для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна системи дорівнювала нулю. А якщо рівнодійна дорівнює нулю, то і її проекції на осі x і y теж повинні дорівнювати нулю. Оскільки проекції рівнодійної дорівнюють алгебраїчним суммам проекцій складових сил, то, остаточно, матимемо умови рівноваги тіла під дією плоскої системи збіжних сил:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Для рівноваги тіла, що перебуває під дією плоскої системи збіжних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій всіх сил на осі координат дорівнювали нулю.

Наведемо приклад розв'язання задач на рівновагу тіла, що перебуває у рівновазі під дією плоскої системи збіжних сил.

Приклад

Визначити зусилля у стрижнях AB і BC кронштейна ABC , який тримає два вантажі вагою $P = 40 \text{ кН}$. Вантажі підвішені на тросах і закріплені в точці B кронштейна (рис. 1.10). Вагою стрижнів і тросів знехтувати.

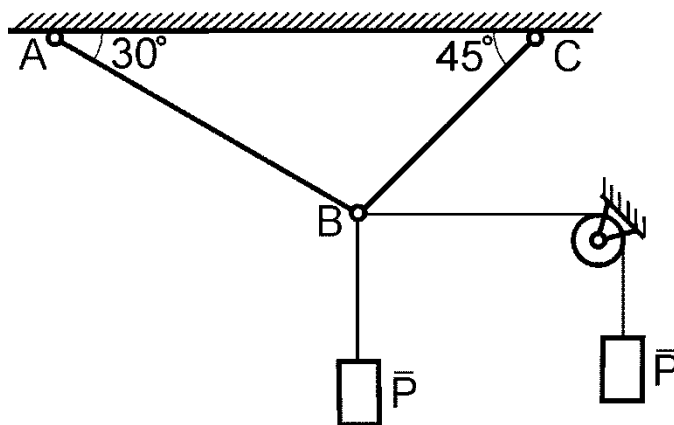


Рис. 1.10

Розв'язання

Розглянемо рівновагу точки B заданої конструкції. До неї прикладені дві активні сили – сили натягу тросів, які за умовою задачі однакові і дорівнюють вазі вантажів $P = 40 \text{ кН}$. Так як троси розтягнуті, то ці сили спрямовані вздовж тросів від точки B .

Відкидаємо в'язі (стрижні AB і BC), замінивши їх дію реакціями стрижнів \bar{R}_{AB} і \bar{R}_{BC} . Реакції \bar{R}_{AB} і \bar{R}_{BC} спрямуємо вздовж стрижнів від точки B , тобто першопочатково будемо вважати їх розтягнутими. Якщо це припущення помилкове, то при розв'язанні задачі отримаємо перед величиною реакції знак "мінус", що буде означати, що стрижень стиснутий.

В умові задачі вагою стрижнів, тросів і тертям на блоці нехтують. Тому точка B конструкції врівноважена тільки двома активними силами \bar{P} і двома реакціями \bar{R}_{AB} , \bar{R}_{BC} , які разом утворюють плоску систему збіжних сил (рис 1.11).

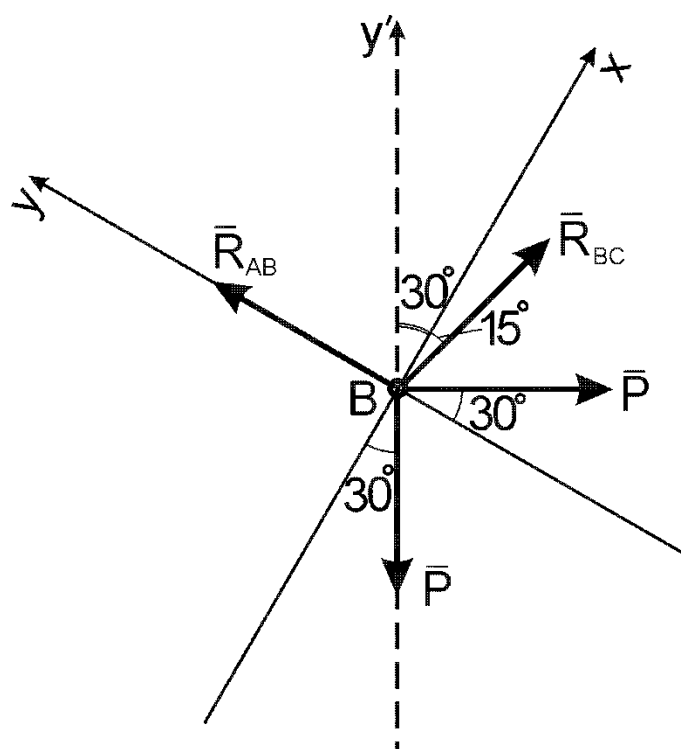


Рис. 1.11

Для отриманої плоскої системи збіжних сил через точку B проводимо координатні осі так, щоб вісь y співпадала з напрямком невідомої реакції \bar{R}_{AB} .

Кути нахилу сил системи до вибраних осей x або y визначаються із геометричних міркувань і показані на розрахунковій схемі (рис 1.11).

При розв'язанні задачі використаємо аналітичні рівняння рівноваги для плоскої системи збіжних сил

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Складемо відповідні рівняння рівноваги

$$\left. \begin{aligned} R_{BC} \cos 15 - P \cos 30 - P \sin 30 &= 0, \\ -R_{BC} \sin 15 + R_{AB} - P \sin 30 - P \cos 30 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

З першого рівняння визначимо R_{BC} , підставивши значення відомих величин:

$$R_{BC} = \frac{P \cos 30 - P \sin 30}{\cos 15} = P \cdot \frac{\cos 30 - \sin 30}{\cos 15} = 40 \cdot \frac{0,866 - 0,5}{0,966} = 15,16 \text{ кН}.$$

З другого рівняння визначимо R_{AB} :

$$R_{AB} = R_{BC} \sin 15 + P(\sin 30 + \cos 30) = 15,16 \cdot 0,259 + 40(0,5 + 0,866) = 58,57 \text{ кН}.$$

Виконаємо перевірку розв'язання задачі.

Для цього виберемо нове розміщення координатної осі y' і складемо додаткове аналітичне рівняння рівноваги, яке має дорівнювати нулю:

$$\sum_{k=1}^n F_{ky'} = 0; \quad R_{BC} \cos 45 + R_{AB} \cos 60 - P = 0.$$

Підставивмо задані та знайдені значення у це рівняння рівноваги і отримаємо:

$$15,16 \cos 45 + 58,57 \cos 60 - 40 = 15,16 \cdot 0,707 + 58,57 \cdot 0,5 - 40 = 40,003 - 40 \approx 0.$$

Отримана невелика розбіжність у третьому знаку після коми допустима і пояснюється похибкою підрахунків.

Таким чином, в заданій конструкції кронштейна **ABC** стрижень **AB** розтягнутий зусиллям $R_{AB} = 58,57 \text{ кН}$, стрижень **BC** також розтягнутий зусиллям $R_{BC} = 15,16 \text{ кН}$.

Запитання для самоконтролю

-
1. Що вивчає теоретична механіка? Що таке механічний рух?
 2. Що вивчає статика? Які задачі статички?
 3. В чому полягає суть понять матеріальна точка та абсолютно тверде тіло?
 4. Що таке сила? Назвіть три параметри, що характеризують силу?
 5. Що таке система сил?
 6. Яка сила є рівнодійною системи сил?
 7. Як формулюються аксіоми статички?
 8. В якому випадку матеріальне тіло буде вільним?
 9. Що таке в'язь і що таке реакція в'язі?
 10. Які основні типи в'язей зустрічаються при розв'язуванні задач статички і які напрями мають їх реакції?
 11. Яку систему сил називають системою збіжних сил?
 12. Для чого і яким чином будується силовий многокутник?
 13. Як формулюється умова рівноваги системи збіжних сил у геометричній формі?
 14. Як формулюється теорема про рівновагу тіла під дією трьох непаралельних сил?
 15. Як визначаються проекції сили на вісь і площину?
 16. Який напрям має сила, якщо її проекція на вісь дорівнює нулю?
 17. Як визначити силу за її проекціями?
 18. Чому дорівнює проекція рівнодійної сили на вісь через її складові?
 19. Як знайти аналітично рівнодійну силу?
 20. Які умови і які рівняння рівноваги системи збіжних сил?

РОЗДІЛ 2. ПЛОСКА СИСТЕМА ПАРАЛЕЛЬНИХ ТА ДОВІЛЬНИХ СИЛ

2.1. Плоска система паралельних сил. Додавання двох паралельних сил

Система сил, лінії дії яких паралельні і знаходяться в одній площині називається плоскою системою паралельних сил.

Розглянемо питання про додавання двох паралельних сил з лініями дії в одній площині. При цьому паралельні сили можуть мати однаковий напрямок або бути протилежно напрямлені.

1. Розглянемо випадок, коли дві паралельні сили мають однаковий напрямок (рис. 1.12).

Додати сили – це означає визначити їх рівнодійну.

Рівнодійна двох паралельних сил, які спрямовані в один бік, є сумою цих сил, паралельна цим силам і спрямована в той же бік, точка її прикладання ділить внутрішнім чином відрізок, що з'єднує сили, на частини, які обернено пропорційні силам.

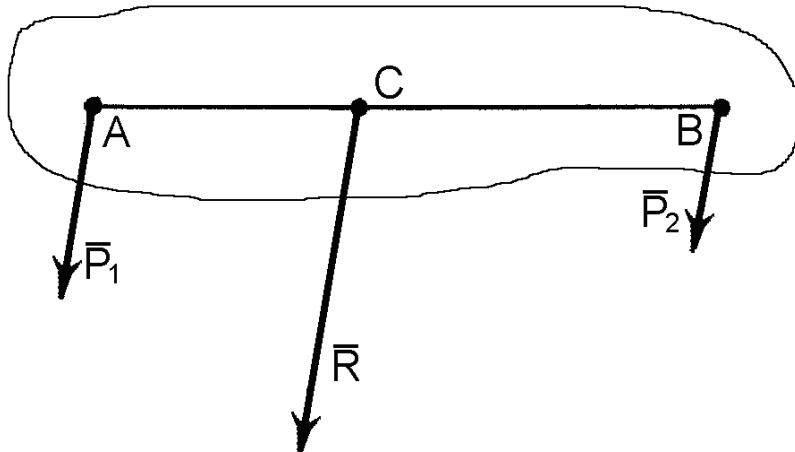


Рис. 1.12

Таким чином, якщо в точках A і B довільного тіла діють в одному напрямку дві паралельні сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 , то їх рівнодійна \bar{R} має той же напрямок і буде прикладена в точці C , яка ділить пряму AB на відрізки AC і BC у співвідношенні:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{BC}{AC}. \quad (1.18)$$

Модуль рівнодійної \bar{R} при цьому дорівнює:

$$R = P_1 + P_2. \quad (1.19)$$

2. Розглянемо випадок, коли дві паралельні сили, мають протилежний напрямок. При цьому вважаємо, що модулі сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 не однакові (рис. 1.13). Випадок, коли такі сили однакові за модулем буде розглянутий окремо.

Рівнодійна двох паралельних сил, які спрямовані в протилежні сторони, дорівнює різниці цих сил і напрямлена у бік більшої сили; точка прикладання рівнодійної сили ділить зовнішнім чином відстань між точками прикладання заданих сил на відрізки, які обернено пропорційні цим силам.

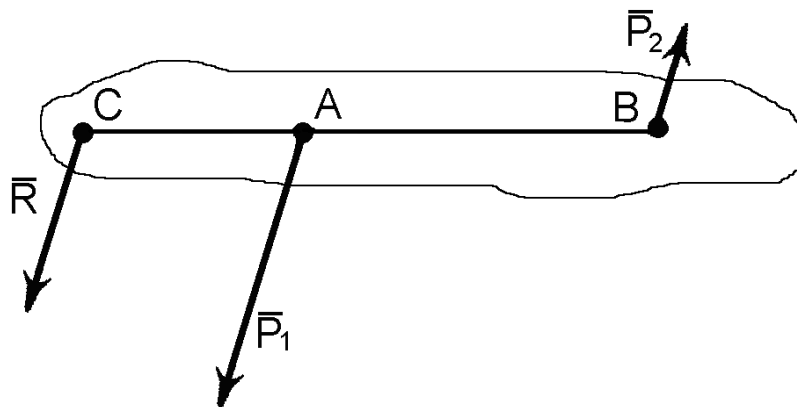


Рис. 1.13

Тобто, якщо в точках A і B довільного тіла діють дві паралельні сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 , що мають протилежний напрямок, то їх рівнодійна направлена в бік більшої сили \bar{P}_1 і буде прикладена в точці C , яка розміщена за межами відрізка AB за точкою A (точкою прикладення більшої сили \bar{P}_1). При цьому точка C ділить відрізки AC і BC у співвідношенні:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{BC}{AC}. \quad (1.20)$$

В даному випадку модуль рівнодійної дорівнює різниці сил:

$$R = P_1 - P_2. \quad (1.21)$$

2.2. Пара сил. Момент пари сил

Розглянемо випадок, коли дві паралельні сили, мають протилежний напрямок і однакові за модулем. Такі сили називають парою сил.

Пара сил – це сукупність двох рівних за величиною, паралельних і протилежно спрямованих сил.

Розглянемо довільне тіло (рис. 1.14), до якого в точках A і B прикладена пара сил \vec{P}_1 і \vec{P}_2 . Площина, в якій розташовані сили пари, має назву площини дії пари. Пара сил не має рівнодійної сили, тому вона не може зрівноважитись однією силою, і характеризується моментом, що викликає обертання тіла під дією сил пари у площині дії пари.

Моментом пари називається взятий з відповідним знаком добуток однієї із сил пари на плече пари. Плече пари – це відстань (по перпендикуляру) між лініями дії сил, які складають пару.

Момент пари вважається додатним, якщо він намагається обертати тіло проти годинникової стрілки і, навпаки, – від'ємним, якщо намагається обертати тіло за годинниковою стрілкою.

Момент пари за модулем позначається $m(\vec{P}_1, \vec{P}_2)$. Визначимо момент пари сил, яка зображена на рис. 1.14.

$$m(\vec{P}_1, \vec{P}_2) = P_1 h. \quad (1.22)$$

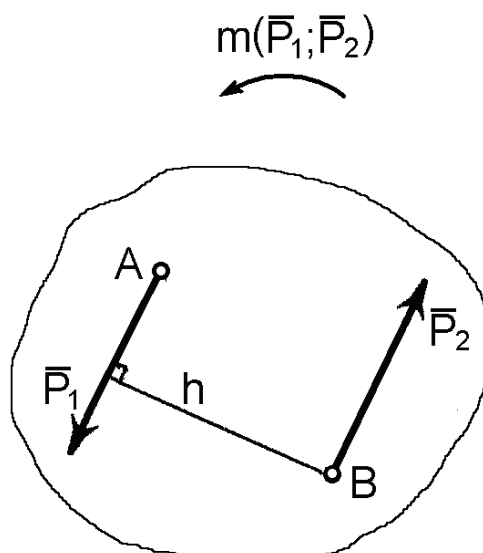


Рис. 1.14

2.3. Властивості пари сил

До тіла можуть бути прикладені декілька пар сил. Дві пари сил будуть еквівалентними, якщо при інших рівних умовах їхня дія на тіло однакова.

Оскільки пара сил характеризується моментом пари, то пари сил, що лежать в одній площині будуть еквівалентні, якщо вони мають однакові моменти (однакові за величиною та напрямком).

З цих положень випливають основні властивості (умови еквівалентності) пар сил:

– не змінюючи дії пари сил на тіло, пару сил можна повертати та переносити, як завгодно, в площині її дії;

– дія пари на тіло не змінюється, якщо складові сили і плече пари змінювати, але так, щоб момент пари і площа дії залишалися незмінними;

– коли на тіло діє система пар сил, то пари і моменти пар можна додавати.

Якщо всі пари даної системи пар розташовані в одній площині, то момент результуючої пари дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар

$$M = \sum_{k=1}^n m_k. \quad (1.23)$$

2.4. Умови рівноваги тіла під дією системи пар сил, що розташовані в одній площині

Якщо на тіло діє система пар сил з моментами m_1, m_2, \dots, m_n і момент результуючої пари M , як вже відомо, буде дорівнювати алгебраїчній сумі моментів складових пар, то для рівноваги тіла необхідно і достатньо, щоб момент результуючої пари дорівнював нулю.

В такому разі і алгебраїчна сума моментів складових пар теж повинна дорівнювати нулю.

Аналітично це буде мати такий вигляд

$$M = \sum_{k=1}^n m_k = 0. \quad (1.24)$$

2.5. Момент сили відносно центра (точки). Алгебраїчна величина моменту

Якщо тіло закріпити в точці O і прикласти до нього силу \vec{P} , лінія дії якої не проходить через точку O , то тіло буде обертатись навколо цієї точки.

Обертальний ефект сили характеризується її моментом відносно центра (точки).

Моментом сили відносно центра (точки) називається взятий з відповідним знаком добуток величини сили на плече. Плече сили відносно центра – це найкоротша відстань (перпендикуляр) між даним центром і лінією дії сили.

Момент вважається додатнім, якщо сила намагається повернути тіло відносно даної точки проти годинникової стрілки і від'ємним, якщо - за годинниковою стрілкою.

Момент сили \vec{P} відносно точки O позначається як $m_o(\vec{P})$.

Розглянемо довільне тіло (рис. 1.15), яке може повертатися навколо точки O (точніше навколо осі, яка перпендикулярна площині рисунка і проходить через точку O).

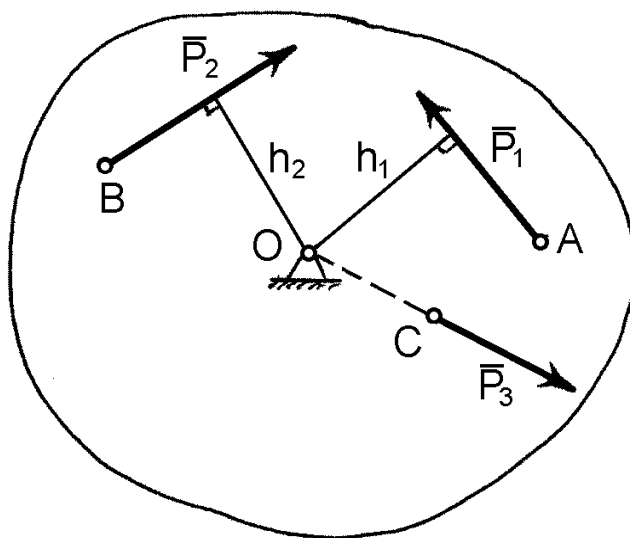


Рис. 1.15

Прикладемо в інших точках тіла A , B , C вектори сил \vec{P}_1 , \vec{P}_2 , \vec{P}_3 і визначимо їх обертальний ефект навколо точки O .

Як бачимо з рисунка, сила P_1 , яка прикладена у точці A , може

повернути тіло навколо точки O проти ходу стрілки годинника. Сила \bar{P}_2 - за ходом стрілки годинника.

Проте сила \bar{P}_3 не може повертати тіло навколо точки O , оскільки лінія дії сили \bar{P}_3 перетинає дану точку.

Таким чином, сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 створюють обертальний ефект (момент) відносно точки O , а сила \bar{P}_3 - ні.

Покажемо на рис. 1.15 плечі сил, які створюють моменти відносно точки O , і визначимо алгебраїчні величини моментів цих сил

$$m_o(\bar{P}_1) = P_1 \cdot h_1, \quad (1.25)$$

$$m_o(\bar{P}_2) = -P_2 \cdot h_2, \quad (1.26)$$

$$m_o(\bar{P}_3) = P_3 \cdot 0 = 0. \quad (1.27)$$

Таким чином, момент сили характеризується трьома параметрами: модулем, площиною дії і напрямом повороту.

2.6. Плоска система довільно розташованих у площині сил.

Теорема про паралельне перенесення сили

Якщо лінії дії сил, прикладених до тіла довільно розташовані в одній площині, то така система сил є *плоскою системою довільних сил*.

Розглянемо теорему про паралельне перенесення сили, що прикладена до тіла, яку можна вважати лемою.

Візьмемо довільне тіло, до якого в точці A прикладена сила \bar{P}_1 з лінією дії MN (рис. 1.16, а).

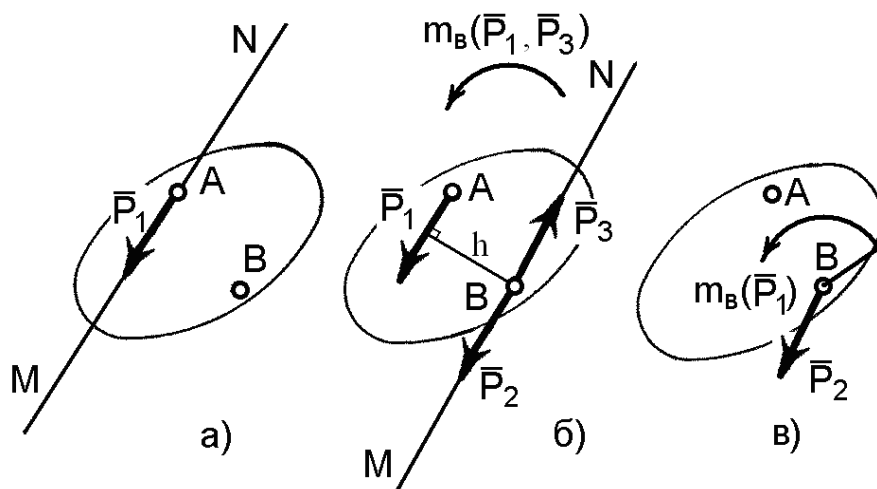


Рис. 1.16

Виберемо на тілі другу точку B і проведемо крізь неї пряму, паралельну прямій MN .

Прикладемо на цій прямій у точці B зрівноважену систему сил $\bar{P}_2 = -\bar{P}_3$, модулі усіх трьох сил виберемо однаковими, тобто

$$P_1 = P_2 = P_3. \quad (1.28)$$

Тепер, як бачимо з рис. 1.16, б, сили \bar{P}_1 і \bar{P}_3 можна об'єднати у пару сил ($P_1 = P_3$, $\bar{P}_1 \parallel \bar{P}_3$) і її можна замінити моментом $m(\bar{P}_1, \bar{P}_3)$ пари.

Величина моменту цієї пари буде дорівнювати моменту даної сили \bar{P}_1 відносно точки B :

$$m(\bar{P}_1, \bar{P}_3) = P_1 \cdot h = m_B(\bar{P}_1). \quad (1.29)$$

Отже, остаточно маємо силу \bar{P}_1 , яка перенесена паралельно в точку B (сила \bar{P}_2 , $\bar{P}_2 = \bar{P}_1$) і, так звану, "приєднану" пару (\bar{P}_1, \bar{P}_3), момент якої дорівнює моменту сили \bar{P}_1 , що переноситься, відносно точки B (рис. 1.16, в).

Таким чином, теорему можна сформулювати так: при паралельному переносі сили в іншу точку рівновага тіла не зміниться, якщо додати, так звану, "приєднану", або компенсуючу пару, момент якої дорівнює моменту даної сили відносно точки, в яку переноситься сила.

2.7. Зведення плоскої системи довільних сил до даного центру

Уявимо довільне тіло, що знаходиться під дією системи сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$, лінії дії яких розміщені у площині рисунку і розташовані довільно (рис. 1.17, а).

Виберемо на тілі довільну точку O як центр зведення. Перенесемо у центр зведення всі сили, які діють на тіло, паралельно самим собі (якщо лінія дії сили перетинає точку O , то ця сила просто переноситься по лінії дії у центр зведення).

Розпочнемо з сили \bar{P}_1 . Сила переноситься паралельно самій собі у точку O , але при цьому до тіла додається момент "приєднаної" пари сил, який дорівнює моменту сили \bar{P}_1 відносно точки O :

$$m_1 = P_1 h_1 = m_o(\bar{P}_1). \quad (1.30)$$

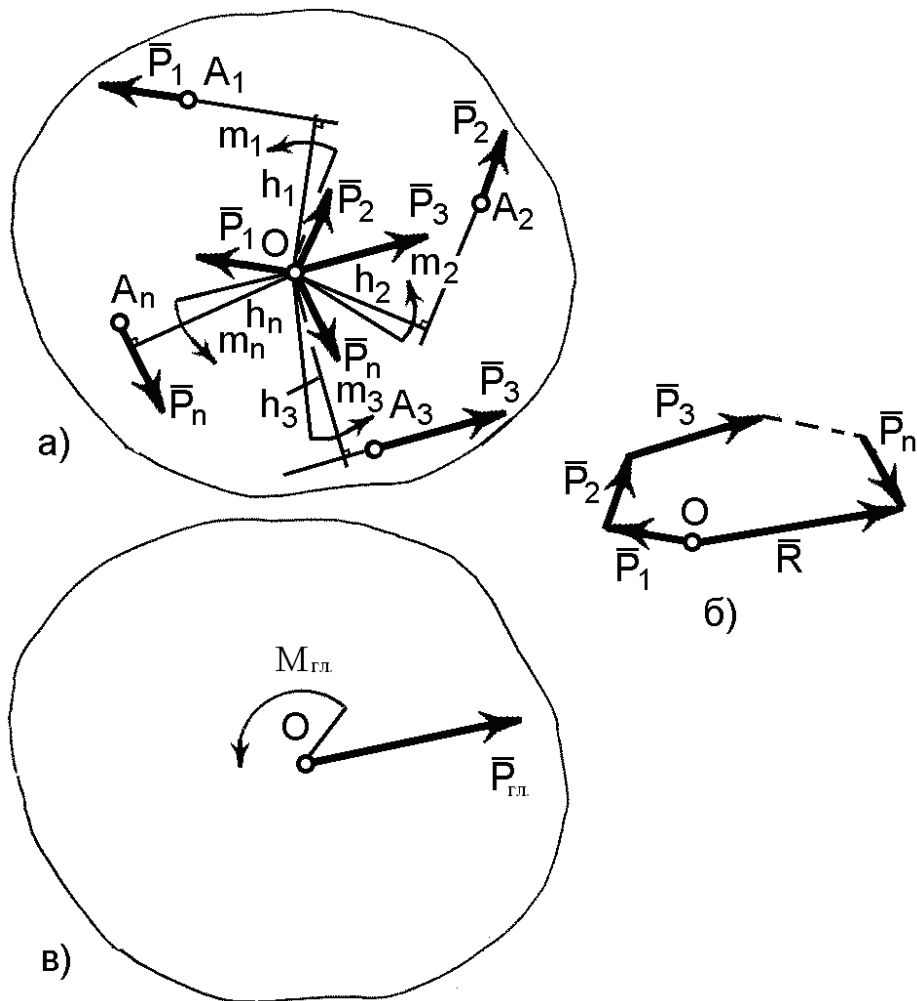


Рис. 1.17

Тепер маємо силу \bar{P}_1 , яка прикладена до тіла у центрі зведення O , та приєднану до тіла пару сил з моментом m_1 .

Подібно вчинимо і з рештою сил $\bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$. Всі вони переносяться паралельно самим собі у центр зведення O і при цьому до тіла додаються “приєднані” пари сил

$$\begin{aligned}
 m_2 &= P_2 h_2 = m_o(\bar{P}_2), \\
 m_3 &= P_3 h_3 = m_o(\bar{P}_3), \\
 &\dots\dots\dots, \\
 m_n &= P_n h_n = m_o(\bar{P}_n).
 \end{aligned}
 \tag{1.31}$$

В результаті таких операцій до тіла в точці O прикладена плоска система збіжних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ і на тіло діє система пар сил з

моментами $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, величини яких визначаються залежностями (1.30) і (1.31).

Систему збіжних сил у точці O можна замінити однією рівнодієюною силою \bar{R} , яка називається головним вектором $\bar{P}_{зл.}$ плоскої системи довільних сил. Для цього необхідно геометрично додати систему збіжних сил, прикладених у центрі зведення O , тобто побудувати силовий багатокутник (рис. 1.17, б):

$$\bar{P}_{зл.} = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k. \quad (1.32)$$

Систему пар сил, яка тепер прикладена до тіла, також можна додати, отримавши головний момент плоскої системи довільних сил, який дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар:

$$M_{зл.} = \sum_{k=1}^n m_k = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k). \quad (1.33)$$

Таким чином, плоска система довільних сил може бути зведена до двох силових факторів: однієї сили $\bar{P}_{зл.}$ – головного вектора системи, і однієї пари сил з моментом $M_{зл.}$ – головного моменту системи (рис. 1.17, в).

Головний вектор системи дорівнює геометричній сумі векторів складових сил, а головний момент системи дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил відносно центра зведення.

Головний вектор $\bar{P}_{зл.}$ і головний момент $M_{зл.}$ плоскої системи довільних сил мають деякі особливості.

Величина головного вектора $\bar{P}_{зл.}$ не залежить від положення центра зведення, а величина головного моменту $M_{зл.}$ залежить від зміни центра зведення.

Якщо головний вектор $\bar{P}_{зл.}$ дорівнює нулю, то головний момент $M_{зл.}$ також буде незалежним від вибору центра зведення.

Якщо головний момент $M_{зл.}$ дорівнює нулю, то головний вектор $\bar{P}_{зл.}$ буде рівнодієюною плоскої системи сил.

Визначимо аналітично головний вектор та головний момент плоскої системи довільних сил.

Для головного вектора $\bar{P}_{зл.}$ спочатку визначимо його проєкції на осі плоскої декартової системи координат:

$$\left. \begin{aligned} P_{zл.x} &= \sum_{k=1}^n P_{kx}, \\ P_{zл.y} &= \sum_{k=1}^n P_{ky}, \end{aligned} \right\} \quad (1.34)$$

де P_{kx}, P_{ky} - проекції k -тої сили системи на відповідні осі координат.

Модуль головного вектора $P_{zл.}$ плоскої системи довільних сил дорівнює

$$P_{zл.} = \sqrt{P_{zл.x}^2 + P_{zл.y}^2}. \quad (1.35)$$

Головний момент $M_{zл.}$ плоскої системи довільних сил визначається алгебраїчним додаванням моментів складових сил відносно центра зведення O , а саме:

$$M_{zл.} = \sum_{k=1}^n m_k = m_o(\bar{P}_1) + m_o(\bar{P}_2) + \dots + m_o(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k). \quad (1.36)$$

2.8. Деякі випадки зведення плоскої системи довільних сил до даного центру

Розглянемо окремі випадки, які можуть бути при зведенні плоскої системи довільних сил до даного центру O . А саме:

1. Головний вектор $\bar{P}_{zл.} = 0$, а головний момент $M_{zл.} \neq 0$. У цьому випадку величина головного моменту $M_{zл.}$ не залежить від вибору центра зведення;

2. Головний момент $M_{zл.} = 0$, а головний вектор $\bar{P}_{zл.} \neq 0$. У даному випадку головний вектор $\bar{P}_{zл.}$ є рівнодійною силою \bar{R} системи сил.

Покажемо, що в загальному випадку, коли відносно точки зведення O системи головний вектор $\bar{P}_{zл.} \neq 0$ і головний момент $M_{zл.} \neq 0$, завжди існує інша точка зведення системи, відносно якої головний момент $M_{zл.} = 0$.

Нехай головний вектор і головний момент плоскої системи довільних сил зведені до точки O (рис.1.18). Зобразимо головний момент парою сил \bar{R}', \bar{R} , паралельних головному вектору $\bar{P}_{zл.}$. Причому плече пари сил виберемо так, щоб модулі цих сил дорівнювали модулю головного вектора:

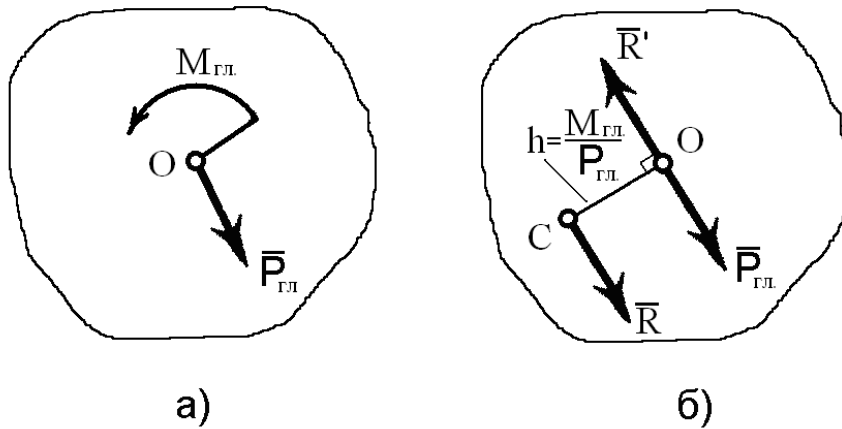


Рис. 1.18

$$h = \frac{M_{gl.}}{P_{gl.}}. \quad (1.37)$$

Так як в точці O сили \bar{R}' і $\bar{P}_{gl.}$ врівноважуються, їх можна відкинути. Тоді система зводиться до однієї рівнодійної \bar{R} , що прикладена в точці зведення C .

Відповідно, відносно цієї точки C головний момент системи $M_{gl.} = 0$. При цьому рівнодійна \bar{R} системи дорівнює за величиною головному вектору $\bar{P}_{gl.}$ системи, але має іншу точку прикладання (точка C).

2.9. Теорема Варіньона про момент рівнодійної плоскої системи сил

Для плоскої системи сил, яка зводиться до однієї рівнодійної, буде справедлива теорема про момент рівнодійної або теорема Варіньона.

Розглянемо плоску систему довільних сил (рис.1.18), що зведена до рівнодійної \bar{R} в точці C , але має головний вектор $\bar{P}_{gl.}$ і головний момент $M_{gl.}$ відносно точки O .

Момент рівнодійної такої системи відносно точки O буде дорівнювати моменту пари сил \bar{R}', \bar{R} , тобто головному моменту системи $M_{gl.}$:

$$m_o(\bar{R}) = m(\bar{R}', \bar{R}) = M_{gl.}. \quad (1.38)$$

З іншого боку, як відомо, головний момент системи дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх заданих сил відносно точки O :

$$M_{\text{зл.}} = m_o(\bar{P}_1) + m_o(\bar{P}_2) + m_o(\bar{P}_3) + \dots + m_o(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k). \quad (1.39)$$

З виразів (1.38) і (1.39) отримаємо:

$$m_o(\bar{R}) = m_o(\bar{P}_1) + m_o(\bar{P}_2) + m_o(\bar{P}_3) + \dots + m_o(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k). \quad (1.40)$$

Якщо плоска система сил зводиться до рівнодійної, момент цієї рівнодійної відносно будь-якого центра (точки) дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно того ж центра.

2.10. Умови рівноваги тіла під дією плоскої системи довільних сил

Як доведено, плоска система довільних сил завжди може бути зведена до однієї сили, яка має назву головного вектора системи, і однієї пари – головного моменту системи.

Тоді для рівноваги плоскої довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор $\bar{P}_{\text{зл.}}$ і її головний момент $M_{\text{зл.}}$ дорівнювали нулю.

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_{\text{зл.}} &= 0, \\ M_{\text{зл.}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.41)$$

або через проєкції головного вектора отримаємо наступну систему із трьох рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= 0, \\ P_y &= 0, \\ M_{\text{зл.}} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

або остаточно рівняння рівноваги тіла під дією плоскої системи довільних сил має вигляд

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_o(\bar{P}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.43)$$

Таким чином, для рівноваги тіла, що перебуває під дією плоскої системи довільних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проєкцій всіх сил на осі координат і сума моментів всіх сил відносно довільного центра дорівнювали нулю.

Існують дві інші форми запису системи рівнянь рівноваги плоскої системи довільних сил.

А саме:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.44)$$

Третя форма системи рівнянь рівноваги має вигляд

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_C(\bar{P}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.45)$$

На систему рівнянь рівноваги (1.44) накладається обмеження: пряма, яка може з'єднати точки A і B , відносно яких визначаються суми моментів усіх сил, не повинна бути перпендикулярною осі (у даному випадку осі x), на яку проєктуються сили.

На систему рівнянь рівноваги (1.45) також накладається обмеження: точки A , B і C , відносно яких визначаються суми моментів усіх сил, не повинні бути розміщені на одній прямій.

Запитання для самоконтролю

1. Чому дорівнює рівнодійна двох однаково спрямованих і двох протилежних паралельних сил? Де знаходиться точка їх прикладення?
2. Що таке момент сили відносно центра (точки)?
3. Куди спрямований вектор моменту сили відносно точки?
4. Що таке пара сил, або просто пара?

-
5. Які властивості має пара сил у площині?
 6. Як визначити момент пари? Куди спрямований момент пари як вектор?
 7. Яка умова рівноваги системи пар у площині?
 8. Які дві пари є еквівалентними?
 9. Сформулюйте теорему про паралельне перенесення сили.
 10. Що таке головний вектор і головний момент плоскої системи довільних сил?
 11. В якому випадку плоска система сил зводиться до рівнодійної?
 12. В якому випадку головний момент не залежить від вибору центра зведення?
 13. Сформулюйте теорему Варіньона про момент рівнодійної сили відносно центра.
 14. Які умови рівноваги тіла, що знаходиться під дією плоскої системи довільних сил?

РОЗДІЛ 3. БАЛКИ І СИСТЕМИ БАЛОК

3.1. Поняття про балки і системи балок.

Балка – це елемент конструкції, довжина якого значно перевищує його поперечні розміри. Балки призначені в основному для сприйняття поперечних навантажень і працюють на згин, але в загальному випадку можуть сприймати одночасно і інші види навантажень.

Термін «балка» в інженерній практиці – поняття широкіє.

Балкою може бути не тільки будівельна балка, але любий стрижень з прямою віссю, працюючий на згин, вали і осі машин, гвинти, болти та інші.

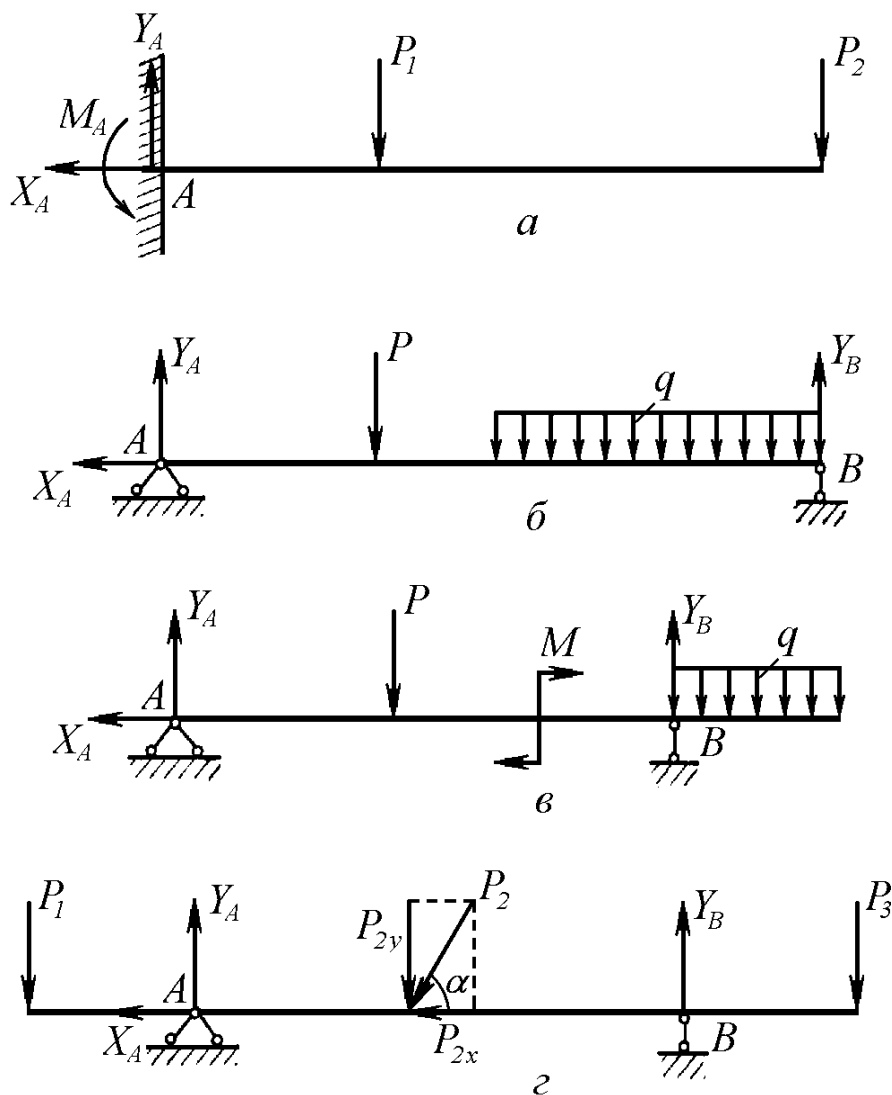


Рис. 1.19

Декілька балок (стрижнів), що вільно опираються одна на одну або з'єднані між собою шарнірами з можливістю відносного руху, утворюють систему балок. Ця конструкція належить до системи з'єднаних тіл. Прикладами таких конструкцій є шарнірно з'єднані розрізні балки, рами та арки.

Балки і системи балок мають спеціальні опорні пристрої, для сполучення їх з іншими елементами і передачі на них зусиль.

Як відомо, опори в балках можуть бути конструктивно виконані шарнірно – рухомими, шарнірно – нерухомими, у вигляді жорсткого закріплення, точкової опори, гнучкого стержня, нитки і т. ін.

Розглянемо найбільш прості види балок, що працюють на згин і їх опорне закріплення.

Балку з одним закріпленням кінцем, а другим вільним, називають консольною (рис.1.19, а).

Балку на двох опорах, одна з яких шарнірно – рухома, а друга шарнірно – нерухома, називають однопролітною (рис.1.19, б).

Двохопорну балку, опори якої знаходяться на деякій відстані від її кінців, називають однопролітною консольною (рис.1.19 в, г).

Характер, величина і напрямки реакцій, що виникають в опорах балки, залежать як від типу опор, так і від навантажень (активних сил і моментів), діючих на балку.

3.2. Навантаження, що діють на балку

Активні навантаження, що діють на балку, можна розділити за наступними ознаками:

1. По способу прикладання навантаження діляться на зосереджені і розподілені.

Зосереджені навантаження мають одну точку прикладання. Таким навантаженням є, наприклад, вектори активних сил \vec{P}_1 , \vec{P}_2 і \vec{P}_3 (рис.1.19 г). При цьому зосереджену силу \vec{P}_2 , яка діє на балку під кутом нахилу α до поздовжньої осі, для зручності розрахунків бажано розкласти на її проекції P_{2x} , P_{2y} в координатних осях x, y .

Поняття про зосереджені навантаження є умовним, так як в реальних умовах їх практично не існує. Навантаження, які розглядаються як зосереджені, уявляють собою по суті рівнодійні деяких систем розподілених сил, наприклад, сил тяжіння, тиск повітря, води і т.ін.

Навантаження, розподілені по певному закону в заданому об'ємі, на заданій площі поверхні або довжині називаються *розподіленими*.

Прикладом такого навантаження є плоска система розподілених сил

по довжині балки, яка характеризується його інтенсивністю \bar{q} . Інтенсивність навантаження в даному випадку – це сила, що припадає на одиницю довжини балки.

У загальному випадку таке розподілене навантаження зображується у вигляді певної кривої, що відображає даний закон зміни інтенсивності навантаження на ділянці балки (рис. 1.20). Напрямок дії навантаження показується стрілками.

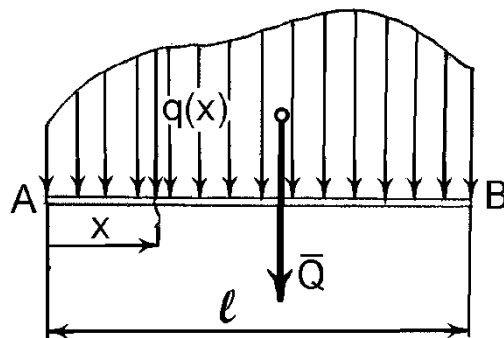


Рис. 1.20

В задачах статички розподілене навантаження заміняють його рівнодійною, тобто зосередженою силою.

Розглянемо два простіших випадки заміни плоскої системи розподілених сил на зосереджену силу \bar{Q} :

– рівномірно розподілене навантаження (або навантаження, яке розподілене за законом прямокутника) зображується на схемах у вигляді прямокутника (рис. 1.21).

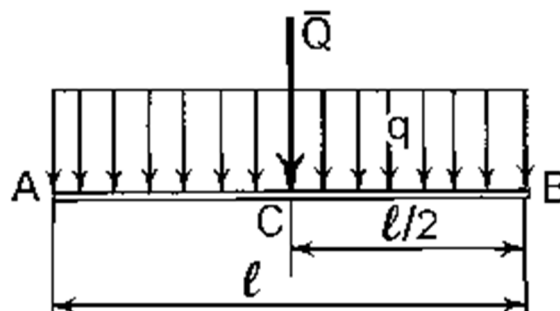


Рис. 1.21

Для такої системи інтенсивність навантаження q – величина стала. У даному випадку рівнодійна сила \bar{Q} визначається як:

$$Q = q \cdot l, \quad (1.46)$$

де q - інтенсивність навантаження, H/m ; l - довжина ділянки тіла, на якій прикладене навантаження, m .

Точка C прикладання рівнодійної сили \bar{Q} розташована посередині ділянки тіла, на якій діє навантаження. Тобто $AC = \frac{l}{2} = CB$. Напрямок \bar{Q} співпадає з напрямком розподіленого навантаження.

– навантаження розподілене за лінійним законом (тобто за законом трикутника). У цьому випадку (рис. 1.22) інтенсивність розподіленого навантаження на ділянці l змінюється від 0 до максимального значення q_{max} . Рівнодійна сила \bar{Q} від цього навантаження за величиною дорівнює

$$Q = \frac{1}{2} q_{max} \cdot l. \quad (1.47)$$

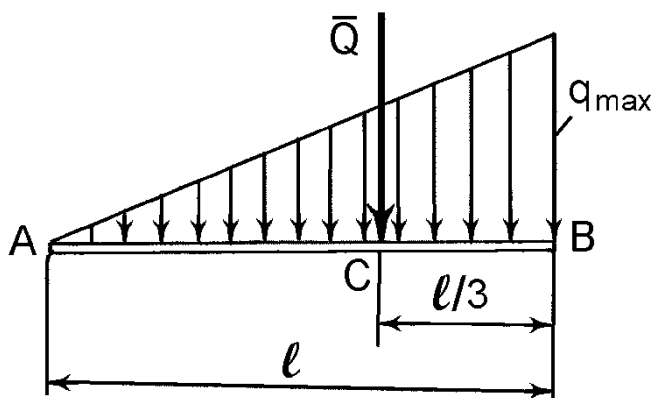


Рис. 1.22

Точка C прикладання рівнодійної \bar{Q} розташована на відстані $AC = \frac{2}{3} \cdot l$ або $BC = \frac{1}{3} \cdot l$. Напрямок \bar{Q} співпадає з напрямком навантаження.

2. По виду навантаження діляться на сили і моменти сил (або пари сил).

3. По характеру дії навантаження діляться на статичні і динамічні.

Статичні навантаження збільшуються від нуля до кінцевого значення поступово, а динамічні – діють швидко, миттєво до кінцевого значення (наприклад ударні навантаження).

4. По часу дії навантаження діляться на постійні і тимчасові.

Постійні навантаження діють протягом тривалого часу, наприклад, власна вага балки, вага обладнання і т. ін.

Тимчасові навантаження діють протягом обмеженого періоду часу, наприклад, тиск вітру, вага снігу і т.

3.3. Визначення опорних реакцій балок

Визначення реакцій опор – важливіша задача статички. Розрахунки на міцність балок, рам і інших інженерних конструкцій, що вивчаються в наступних розділах технічної механіки, можливо здійснити тільки після визначення величини і напрямку реакцій опор.

Для визначення опорних реакцій балок застосовують умови рівноваги плоскої системи довільних сил.

Розглянемо приклади задач на рівновагу тіла під дією плоскої системи довільних сил.

Приклад

Однорідна балка AB прямокутного перерізу вагою 400 Н має один кінець A , який закріплений шарнірно, і опирається на точкову опору O (рис. 1.23). До другого кінця балки B підвішений вантаж вагою 200 Н . Довжина балки 4 м , точкова опора розташована на відстані $\frac{3}{4}$ довжини балки від шарнірної опори. Кут нахилу балки до горизонту складає $\alpha = 30^\circ$. Визначити реакції опор балки.

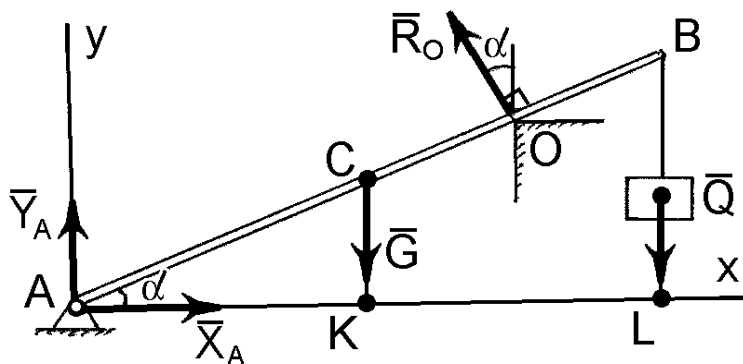


Рис. 1.23

Розв'язання

Складаємо розрахунково – силову схему задачі. Прикладемо до осі балки задані активні сили: силу тяжіння \bar{G} самої балки та силу тяжіння \bar{Q} вантажу. Сила тяжіння балки \bar{G} прикладена посередині балки у точці C

(оскільки балка однорідна) і спрямована вертикально донизу. Сила тяжіння вантажу \bar{Q} прикладена до кінця балки B і спрямована вертикально донизу.

Далі умовно звільняємо балку від в'язей і замінюємо їх відповідними реакціями в'язей. У точці A розміщена нерухома шарнірна опора, вона має дві складові реакції \bar{X}_A і \bar{Y}_A , які розташовані вздовж відповідних осей координат. У точці O - точкова опора, яка має одну реакцію \bar{R}_O , що напрямлена перпендикулярно до балки.

Таким чином, балка знаходиться у рівновазі під дією плоскої системи довільних сил. Для розв'язання цієї задачі використовуємо умови рівноваги (1.54),

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Оскільки осі координат x і y задані за умовою задачі, то складемо відповідні рівняння рівноваги

$$\left. \begin{aligned} X_A - R_O \sin \alpha &= 0, \\ Y_A - G - Q + R_O \cos \alpha &= 0, \\ -G \cdot \frac{AB}{2} \cos \alpha + R_O \cdot AO - Q \cdot AB \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Якщо підставити значення відомих величин у ці рівняння рівноваги, то отримаємо

$$\left. \begin{aligned} X_A - 0,5R_o &= 0, \\ Y_A - 400 - 200 + 0,866R_o &= 0, \\ -400 \cdot 2 \cdot 0,866 + 3R_o - 200 \cdot 4 \cdot 0,866 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

З третього рівняння обчислимо реакцію R_O :

$$R_O = \frac{692,8 + 692,8}{3} = 461,86 \text{ Н},$$

і підставимо її значення у перші два рівняння.

Будемо мати

$$X_A = \frac{1}{2} R_O = 230,93 \text{ Н};$$

$$Y_A = 400 + 200 - 0,866 \cdot 461,86 = 160,04 \text{ Н}.$$

Оскільки визначені дві складові реакції, які прикладені в точці A , – X_A та Y_A , то геометричним додаванням можна обчислити модуль повної реакції R_A . А саме:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{230,93^2 + 160,04^2} = \sqrt{78941,5} = 280,97 \text{ Н}.$$

Таким чином визначенні усі шукані реакції:

$$R_A = 280,97 \text{ Н};$$

$$R_O = 461,86 \text{ Н}.$$

Приклад

Визначити реакції опори однорідної балки AB прямокутного перерізу, один кінець якої A жорстко закріплений у стіні і яка перебуває під дією зосередженої сили $P = 4,0 \text{ кН}$, пари сил з моментом $m = 2,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$ та рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю $q = 1,5 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$. Довжина балки AB – 5 м , рівномірно розподілене навантаження діє на ділянці 3 м від точки A . Кут нахилу зосередженої сили \bar{P} до горизонту складає $\alpha = 30^\circ$, осі x та y показані на рис. 1.24.

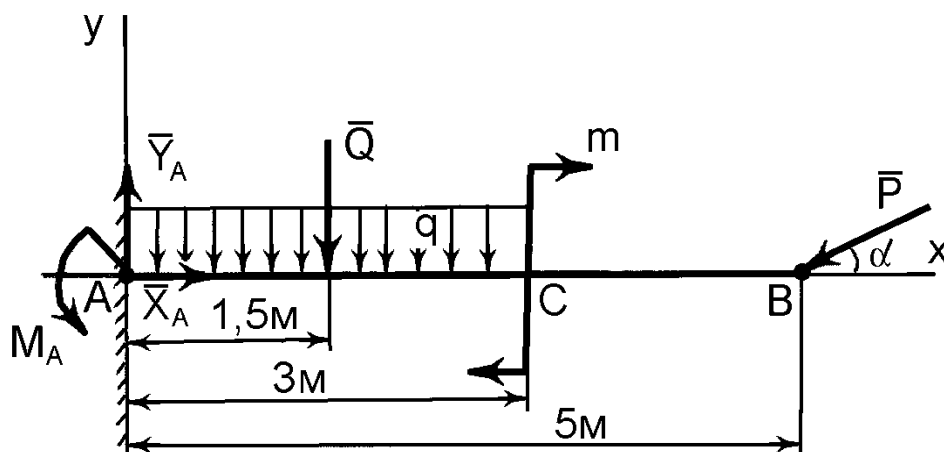


Рис. 1.24

Розв'язання

Складаємо розрахунково – силову схему. Покажемо всі сили, що прикладені до балки AB . Насамперед, це задані активні сили – сила \bar{P} , що прикладена до кінця балки B і спрямована під кутом α до горизонту. Рівномірно розподілене навантаження замінюємо зосередженою силою \bar{Q} , яка дорівнює $Q = q \cdot AC = 1,5 \cdot 3 = 4,5 \text{ kH}$.

Сила \bar{Q} прикладена посередині ділянки AC і спрямована у той же бік, що і саме навантаження, тобто вертикально донизу. Покажемо на силовій схемі пару сил, яка визначається моментом m .

Далі умовно звільняємо балку від в'язі і замінюємо її відповідними реакціями в'язі.

У точці A – жорстке закріплення балки у стіні, а тому воно має дві складові реакції: \bar{X}_A , \bar{Y}_A , які розташовані вздовж відповідних осей координат, і реактивний момент M_A . Напрямок цього невідомого моменту показуємо на силовій схемі довільно, наприклад, – проти напрямку стрілки годинника.

Якщо ж при остаточному визначенні моменту M_A отримаємо від'ємний знак, то матимемо, що дійсний напрямок моменту – протилежний. Покажемо на силовій схемі лінійні і кутові розміри. Осі координат показані на схемі.

Як видно з побудованої розрахунково – силової схеми, балка перебуває під дією плоскої системи довільних сил. Використовуємо умови рівноваги (1.54).

А саме

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Складемо відповідні рівняння рівноваги

$$\left. \begin{aligned} X_A - P \cos \alpha &= 0, \\ Y_A - Q - P \sin \alpha &= 0, \\ -Q \cdot \frac{AC}{2} - P \sin \alpha \cdot AB + M_A - m &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Якщо підставити значення відомих величин у ці рівняння рівноваги, то отримуємо

$$\left. \begin{aligned} X_A - 4,0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} &= 0, \\ Y_A - 4,5 - 4,0 \cdot \frac{1}{2} &= 0, \\ -4,5 \cdot \frac{3}{2} - 4,0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 + M_A - 2,0 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

З першого рівняння обчислимо X_A :

$$X_A = 4,0 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} = 3,46 \text{ кН}.$$

З другого рівняння обчислимо Y_A :

$$Y_A = 4,5 + 4,0 \cdot \frac{1}{2} = 6,50 \text{ кН}.$$

З третього рівняння обчислимо M_A :

$$M_A = 2,0 + 4,5 \frac{3}{2} + 4,0 \frac{1}{2} \cdot 5 = 2,0 + 6,75 + 10,0 = 18,75 \text{ кН}.$$

Оскільки складові реакцій X_A та Y_A , що прикладені у точці A , обчислені, то можна знайти модуль R_A повної реакції у точці A :

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(3,46)^2 + (6,5)^2} = \sqrt{54,22} = 7,36 \text{ кН}.$$

Таким чином, визначені всі шукані реакції:

$$R_A = 4,30 \text{ кН};$$

$$M_A = 18,75 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Приклад

Визначити опорні реакції балки на яку діють зосереджена сила $P = 10 \text{ кН}$ під кутом $\alpha = 45^\circ$ до горизонту, рівномірно розподілене навантаження з інтенсивністю $q = 0,6 \text{ кН/м}$ та пара сил з моментом $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$ (рис. 1.25).

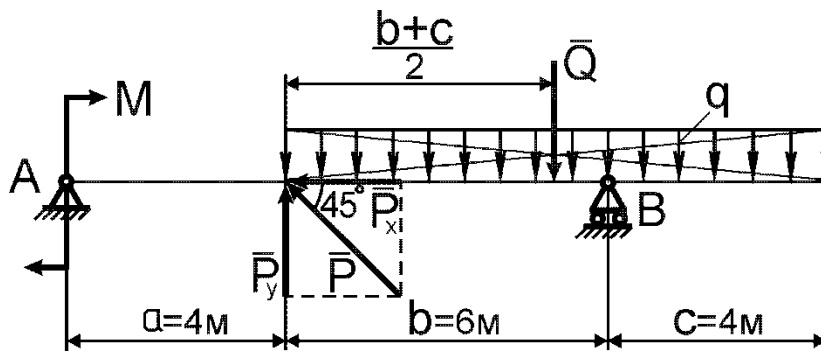


Рис. 1.25

Розв'язання

Накреслимо розрахункову схему заданої балки (рис 1.26).

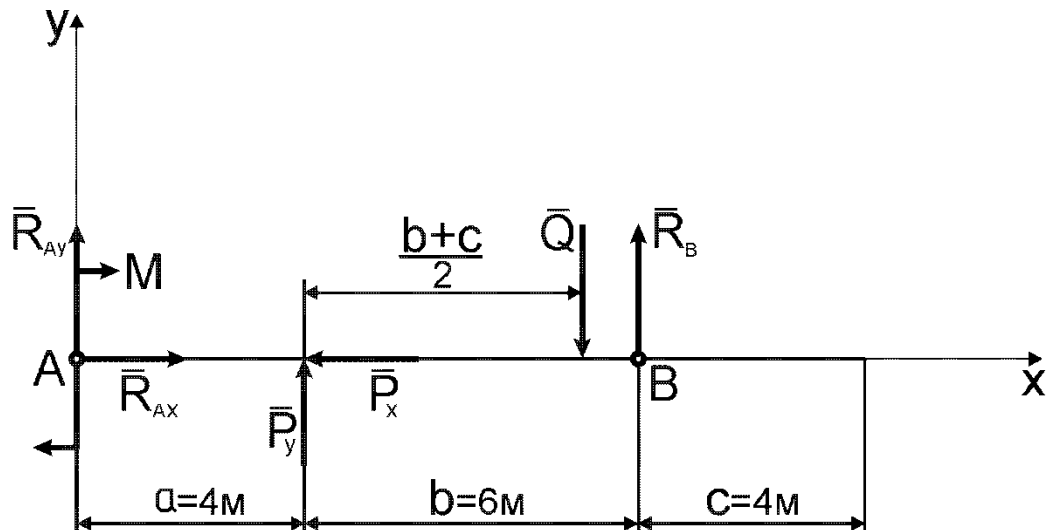


Рис. 1.26

Для цього проводимо осі координат: вісь x направляємо вздовж горизонтальної осі балки, а вісь y – через ліву крайню точку A балки.

Прикладемо до горизонтальної осі балки у відповідних точках задані активні навантаження.

При цьому силу \bar{P} , що спрямована під кутом $\alpha = 45^\circ$, розкладемо для зручності на дві складові вздовж координатних осей, які за модулем будуть дорівнювати:

$$P_x = P \cos \alpha = 40 \cos 45 = 10 \cdot 0,707 = 7,07 \text{ кН};$$

$$P_y = P \sin \alpha = 40 \sin 45 = 10 \cdot 0,707 = 7,07 \text{ кН}.$$

Рівномірно розподілене навантаження, що діє з інтенсивністю $q = 0,6 \text{ кН/м}$ на ділянці балки довжиною $l = (b + c)$, замінемо

зосередженою силою \bar{Q} , яка прикладена по центру цієї ділянки і за величиною дорівнює

$$Q = q \cdot l = q(b + c) = 0,6(6 + 4) = 6 \text{ кН}.$$

Сила \bar{Q} спрямована у той же бік, що і саме розподілене навантаження, тобто вертикально донизу.

Покажемо також на розрахунковій схемі пару сил, яка визначається моментом $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$ і прикладена в точці A балки.

Далі умовно звільнемо балку від в'язей і замінемо їх відповідними реакціями в'язей. У точці A розміщена нерухома шарнірна опора, вона має дві складові реакції \bar{R}_{Ax} і \bar{R}_{Ay} , які розташовані вздовж відповідних осей координат.

У точці B – рухома шарнірна опора, яка має одну реакцію \bar{R}_B , що напрямлена перпендикулярно до поверхні опори балки вздовж координатної осі y .

Як видно з побудованої розрахункової схеми, балка перебуває у рівновазі під дією плоскої системи довільних сил.

Для розв'язання цієї задачі використовуємо наступні аналітичні рівняння рівноваги

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Складемо відповідні рівняння рівноваги

$$\left. \begin{aligned} R_{Ax} - P_x &= 0, \\ R_B(a + b) - Q \cdot \left(a + \frac{b + c}{2} \right) + P_y \cdot a - M &= 0, \\ -R_{Ay}(a + b) - P_y \cdot b + Q \cdot \left(b - \frac{b + c}{2} \right) - M &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Розв'язавши отриману систему рівнянь, знаходимо невідомі реакції. З першого рівняння системи визначимо R_{Ax} :

$$R_{Ax} = P_x = 7,07 \text{ кН}.$$

З другого рівняння визначимо R_B :

$$R_B = \frac{Q \cdot \left(a + \frac{b+c}{2} \right) - P_y \cdot a + M}{a+b} = \frac{6 \cdot \left(4 + \frac{6+4}{2} \right) - 7,07 \cdot 4 + 20}{4+6} = 4,57 \text{ кН}.$$

З третього рівняння визначимо R_{Ay} :

$$R_{Ay} = \frac{Q \cdot \left(b - \frac{b+c}{2} \right) - P_y \cdot b - M}{a+b} = \frac{6 \cdot \left(6 - \frac{6+4}{2} \right) - 7,07 \cdot 6 - 20}{4+6} = -5,64 \text{ кН}.$$

Знак мінус вказує на те, що дійсний напрямок складової реакції \bar{R}_{Ay} буде протилежним, ніж це показано на розрахунковій схемі.

Виконуємо перевірку проведених розрахунків.

Скористаємось тим, що алгебраїчна сума проекцій всіх сил на вісь y також повинна дорівнювати нулю:

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0.$$

Склавши це додаткове рівняння рівноваги і підставивши в нього задані і знайдені значення, отримаємо:

$$R_{Ay} + P_y - Q + R_B = -5,64 + 7,07 - 6 + 4,57 = 11,64 - 11,64 = 0.$$

Повна реакція \bar{R}_A у точці A може бути визначена через складові \bar{R}_{Ax} та \bar{R}_{Ay} . Вона буде розташована у четвертій чверті і за модулем дорівнює

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{(7,07)^2 + (-5,64)^2} = \sqrt{81,79} = 9,04 \text{ кН}.$$

Таким чином, $R_A = 9,04 \text{ кН}$, $R_B = 4,57 \text{ кН}$.

3.4. Розв'язання задач на рівновагу системи тіл. Статично означені та статично неозначені задачі.

Система тіл – це сукупність декількох тіл, які спираються одне на одне або з'єднані шарнірами з можливістю відносного руху цих тіл.

При розв'язанні задач на систему тіл розрізняють сили зовнішні та внутрішні.

Зовнішні сили – це сили взаємодії тіл даної системи з іншими тілами, які не входять до складу системи.

Внутрішні сили – це сили взаємодії між окремими тілами, які входять до складу даної системи. Внутрішні сили існують попарно, як дія і протидія.

При цьому задача на визначення невідомих сил вважається статично означеною, якщо для неї можна скласти таку кількість рівнянь рівноваги матеріальної системи, яка не менша, ніж число невідомих.

Якщо число рівнянь рівноваги системи менше, ніж число невідомих, задача буде статично неозначеною.

У теоретичній механіці будемо розглядаються тільки статично означені матеріальні системи.

Рівновагу системи тіл можна розглядати в цілому під дією тільки зовнішніх сил. Але може так статись, що кількість рівнянь рівноваги буде меншою, ніж кількість невідомих і задача буде статично неозначеною. Тоді необхідно розглядати рівновагу окремих тіл системи, умовно розділяючи її обов'язково по внутрішніх в'язях. Причому необхідно враховувати, що внутрішні сили реакцій входять попарно, як дія та протидія.

Розглянемо приклад розв'язання задач на рівновагу системи тіл.

Приклад

На трьохшарнірну арку ABC (рис. 1.27) діє вертикальна сила $P = 10 \text{ kH}$. Вага кожної частини балки $Q_1 = Q_2 = 6 \text{ kH}$. Визначити реакції шарнірів A, B, C арки, розміри якої дані на рисунку.

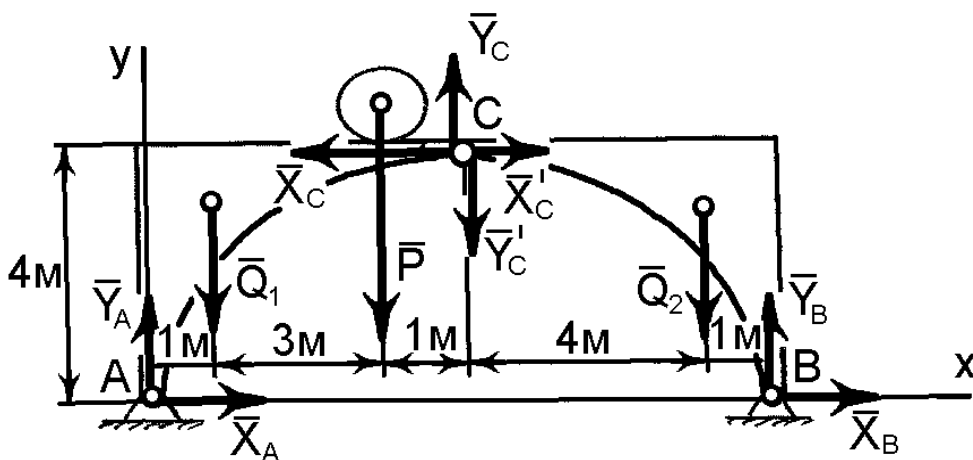


Рис. 1.27

Розв'язання

Покажемо осі прямокутної декартової системи координат $Axу$. Як видно зі схеми, задана система тіл складається з двох піварок I та II , які з'єднані шарніром у точці C .

Складемо розрахунково – силову схему, де покажемо задані активні сили \bar{Q}_1 , \bar{Q}_2 , \bar{P} та реакції в'язей: у точках A і B (нерухомі шарнірні опори) – \bar{X}_A , \bar{Y}_A і \bar{X}_B , \bar{Y}_B та у точці C (шарнірне з'єднання) – \bar{X}_C , \bar{X}'_C та \bar{Y}_C , \bar{Y}'_C . Ці невідомі реакції у точці C є внутрішніми силами системи тіл, а тому $X_C = X'_C$ і $Y_C = Y'_C$.

Умовно розділяємо систему тіл на два окремих тіла по шарніру C . Дію відкинутої частини замінюємо двома реакціями \bar{X}_C і \bar{Y}_C , які дорівнюють

$$\begin{aligned}\bar{X}_C &= \bar{X}'_C, \\ \bar{Y}_C &= \bar{Y}'_C.\end{aligned}$$

Тепер розглянемо окремо рівновагу кожного тіла, для чого складемо дві системи рівнянь рівноваги. Використаємо умови рівноваги (1.54).

Для першого тіла (ліва половина арки):

$$\left. \begin{aligned}\sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0; X_A - X_C = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0; Y_A + Y_C - Q_1 - P = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{P}_k) &= 0; X_C \cdot 4 + Y_C \cdot 5 - Q_1 \cdot 1 - P \cdot 4 = 0.\end{aligned}\right\}$$

Для другого тіла (права половина арки):

$$\left. \begin{aligned}\sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0; X_B + X'_C = 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0; Y_B - Y'_C - Q_2 = 0, \\ \sum_{k=1}^n m_B(\bar{P}_k) &= 0; Q_2 \cdot 1 - X'_C \cdot 4 + Y'_C \cdot 5 = 0.\end{aligned}\right\}$$

Як видно з отриманих шести рівнянь рівноваги, в них містяться шість невідомих: X_A , X_B , X_C , Y_A , Y_B , Y_C .

Визначимо ці невідомі величини. З третього рівняння другої системи визначимо Y'_C .

Перепишемо це рівняння наступним чином:

$$5Y'_C = 4X'_C - Q_2,$$

звідки знаходимо реакцію Y'_C :

$$Y'_C = \frac{4X'_C - Q_2}{5};$$

Оскільки чисельно $Y'_C = Y_C$, а $X_C = X'_C$, то підставивши значення цих реакцій у третє рівняння першої системи, отримуємо

$$5 \frac{(4X_C - Q_2)}{5} + 4X_C = Q_1 + 4P,$$

або

$$8X_C = Q_1 + Q_2 + 4P,$$

звідки

$$X_C = \frac{6 + 6 + 40}{8} = \frac{52}{8} = 6,5 \text{ kH}.$$

Тепер є можливість визначити невідому реакцію Y'_C .

Підставивши значення X_C у третє рівняння другої системи, будемо мати

$$Y'_C = \frac{4X_C - Q_2}{5} = \frac{4 \cdot 6,5 - 6,0}{5} = 4,0 \text{ kH}.$$

З першого рівняння першої системи маємо $X_A = X_C = 6,5 \text{ kH}$. А з першого рівняння другої системи маємо $X_B = -X'_C = -6,5 \text{ kH}$. Напрямок цієї реакції є протилежним показаному на силовій схемі.

З другого рівняння першої системи одержуємо

$$Y_A = Q_1 + P - Y_C = 6,0 + 10,0 - 4,0 = 12,0 \text{ kH}.$$

З другого рівняння другої системи обчислимо останню невідому реакцію Y_B , яка буде дорівнювати $Y_B = Y'_C + Q_2 = 4,0 + 6,0 = 10,0 \text{ kH}$.

Таким чином, обчислено всі шукані величини:

$$X_A = 6,5 \text{ kH}; \quad Y_A = 12,0 \text{ kH}; \quad X_B = -6,5 \text{ kH}; \quad Y_B = 10,0 \text{ kH};$$

$$X_C = 6,5 \text{ kH}; \quad Y_C = 4,0 \text{ kH}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Що таке зосереджене та розподілене навантаження?
2. Як замінити рівномірно розподілене навантаження зосередженою силою?
3. Як замінити розподілене за лінійним законом навантаження зосередженою силою?
4. Скільки рівнянь рівноваги можна скласти для плоскої системи паралельних сил?
5. Що таке статично означені і статично неозначені задачі?
6. Які особливості має метод розв'язання задач на рівновагу системи тіл?

РОЗДІЛ 4. ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ

4.1. Види просторових систем сил

Якщо лінії дії усіх сил, що прикладені до твердого тіла, розташовані не в одній площині, то така система сил має назву просторової.

В залежності від розташування сил у просторі може існувати просторова система збіжних сил, просторова система паралельних сил і просторова система довільних сил. В декартовій системі координат $Oxyz$ ці три випадки показані на рис. 1.28:

- а) просторова система збіжних сил (рис. 1.28, а);
- б) просторова система паралельних сил (рис. 1.28, б);
- в) просторова система довільних сил (рис. 1.28, в).

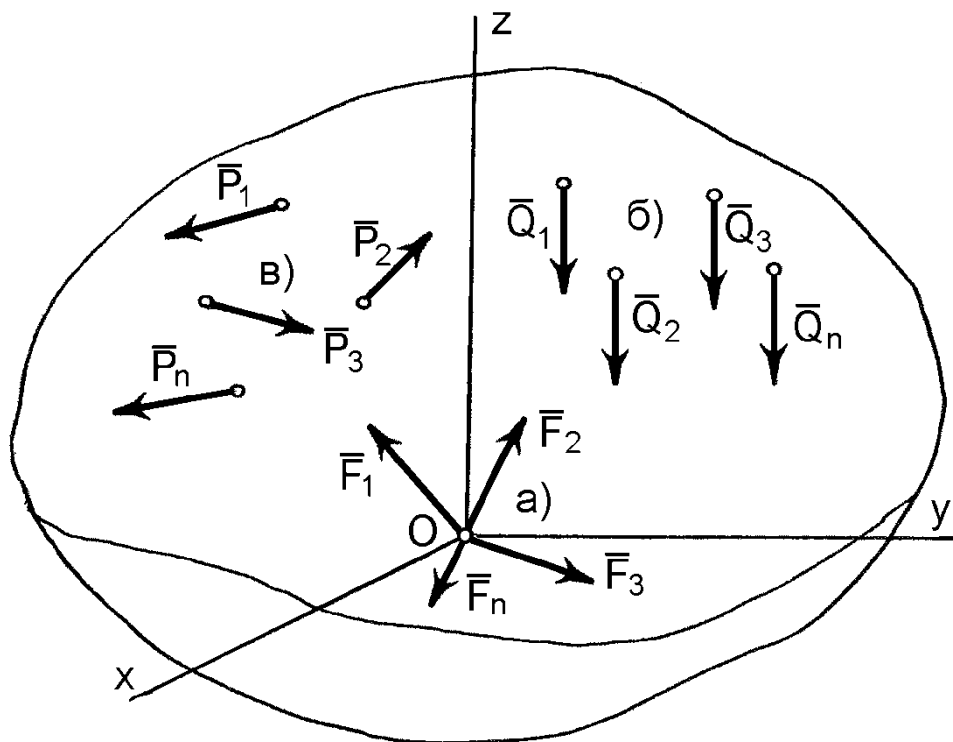


Рис. 1.28

4.2. Визначення вектора сили у просторі за його проєкціями на координатні осі

У просторі вектор сили можна спроектувати на три координатні осі x, y, z декартової системи координат.

Візьмемо силу \bar{P} , вектор якої довільно розташований у просторі (рис. 1.29).

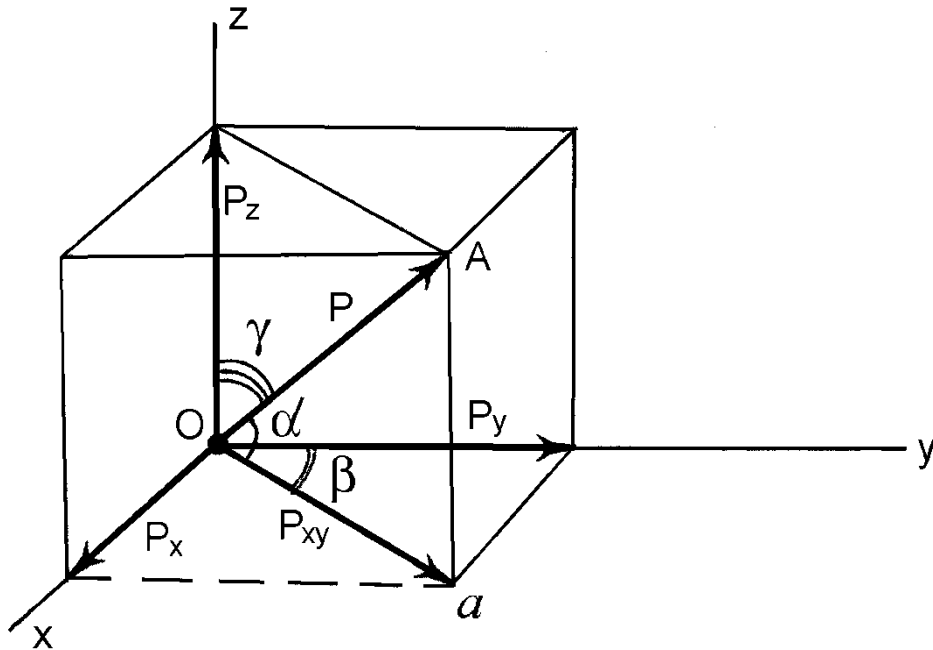


Рис. 1.29

Виберемо у просторі прямокутну систему координат $Oxyz$, початок відліку якої (точка O) знаходиться в точці прикладання вектора сили \bar{P} . Спроекуємо вектор сили \bar{P} на площину xOy . Опустимо з точки A (кінець вектора сили) на вказану площину перпендикуляр, який перетинає її в точці a . На площині xOy утворено вектор \overline{Oa} , який і є проекцією \bar{P}_{xy} сили на площину.

За модулем ця проекція дорівнюватиме:

$$P_{xy} = P \cos \alpha, \quad (1.48)$$

де α - кут між вектором сили \bar{P} та площиною xOy .

Слід зауважити, що проекція вектора сили на площину є вектором, тому що площина на має базисних векторів, ортів.

Якщо в площині xOy позначити кут β , то є можливість спроектувати силу \bar{P} на осі x та y , опускаючи з точки a на осі перпендикуляри і за відомим вже правилом отримати проекції вектора \bar{P}_{xy} на вказані осі:

$$P_x = P_{xy} \cdot \cos(90^\circ - \beta) = P \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta, \quad (1.49)$$

$$P_y = P_{xy} \cdot \cos \beta = P \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta. \quad (1.50)$$

У даному випадку крізь вісь z та вектор сили \bar{P} можна провести площину, тому є можливість спроектувати силу на цю вісь за відомим правилом. Ця проекція буде дорівнювати

$$P_z = P \cdot \cos \gamma, \quad (1.51)$$

де γ - кут між вектором сили \bar{P} та віссю z .

Таким чином, за величиною і напрямком вектора сили завжди можна знайти його проекції на координатні осі. Справедливим буде і зворотне ствердження.

В загальному випадку вектор сили \bar{P} у просторі може бути визначений діагоналлю прямокутного паралелепіпеда, побудованого на його проекціях на осі xuz .

Модуль вектора сили \bar{P} визначається за виразом:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}.$$

Напрямок вектора цієї сили визначається через напрямні косинуси його кутів з відповідними осями координат x , y і z :

$$\cos(\hat{x}, \bar{P}) = \frac{P_x}{P},$$

$$\cos(\hat{y}, \bar{P}) = \frac{P_y}{P},$$

$$\cos(\hat{z}, \bar{P}) = \frac{P_z}{P}.$$

Через арккосинуси можна визначити і самі кути.

4.3. Умови рівноваги тіла під дією просторової системи збіжних сил

Рівнодіюча просторової системи збіжних сил визначається геометричним способом за правилом багатокутника, таким же чином, як і для плоскої системи, але в даному випадку силовий багатокутник буде не плоским, а просторовим.

Геометрична умова рівноваги просторової системи збіжних сил полягає у замкненості силового багатокутника, побудованого на векторах сил системи і зводиться до умови, коли рівнодіюча цієї системи дорівнює нулю:

$$\bar{R} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \dots + \bar{P}_n = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k. \quad (1.52)$$

Так як абсолютна величина рівнодіючої системи може бути визначена через проєкції її складових сил на три осі координат:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n P_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n P_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n P_{kz}\right)^2}, \quad (1.53)$$

то аналітична умова рівноваги для просторової системи збіжних сил буде мати вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{kz} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.54)$$

4.4. Момент сили відносно осі

Якщо сила намагається обернути тіло навколо осі, то вона створює момент відносно цієї осі.

Момент сили відносно осі характеризує обертальні властивості сили відносно цієї осі.

Визначимо момент відносно осі z від сили \bar{P} , вектор якої довільно розташований у просторі (рис. 1.30).

Виберемо довільно розташовану у просторі вісь z . Розкладемо силу \bar{P} на дві складові: \bar{P}_z , яка паралельна осі z , та \bar{P}_π , яка перпендикулярна до цієї осі. Проведемо площину π , в якій буде розташована складова \bar{P}_π (тобто площина π буде перпендикулярною до осі z і \bar{P}_π є проєкцією сили \bar{P} на площину π).

Як бачимо з рис. 1.30, складова \bar{P}_z не може повертати тіло навколо осі z , отже вона не створює моменту відносно цієї осі.

Складова \bar{P}_π , навпаки, може повертати тіло навколо осі z .

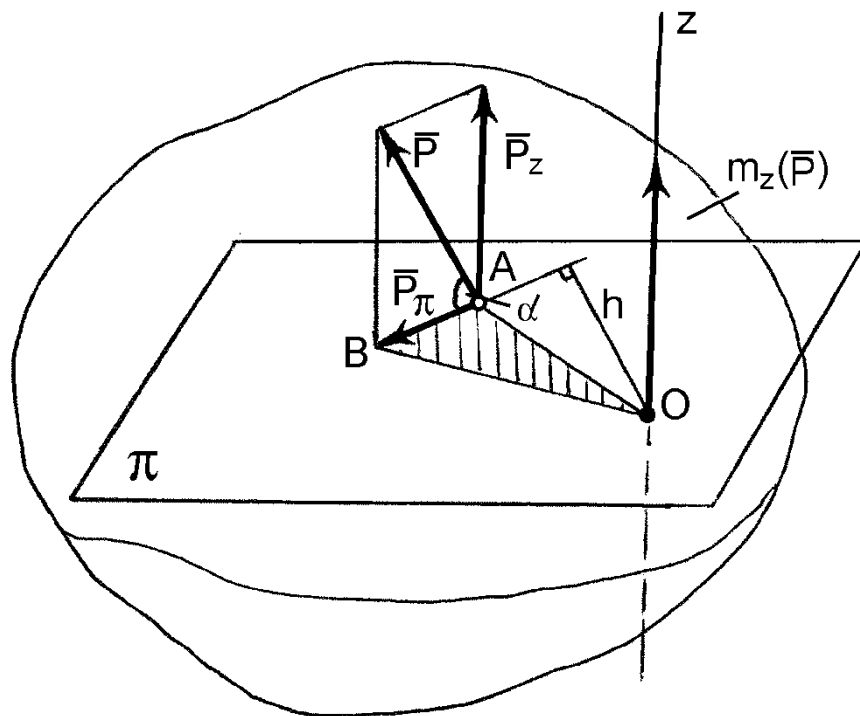


Рис. 1.30

Таким чином, відносно осі z створюється момент

$$m_z(\bar{P}) = m_z(\bar{P}_\pi). \quad (1.55)$$

Визначимо модуль моменту $m_z(\bar{P}_\pi)$. Проекція \bar{P}_π розташована у площині π і за величиною дорівнює

$$P_\pi = P \cos \alpha, \quad (1.56)$$

де α - кут між вектором сили \bar{P} та площиною π .

Момент у площині π створюється відносно точки O , в якій перетинаються вісь z та площина π . Покажемо плече h , опускаючи перпендикуляр з точки O до лінії дії складової \bar{P}_π або до її продовження. Остаточно момент буде дорівнювати

$$m_z(\bar{P}) = m_z(\bar{P}_\pi) = m_o(\bar{P}_\pi) = P_\pi h = P \cos \alpha \cdot h. \quad (1.57)$$

Знак моменту сили відносно осі визначається наступним чином:

“Якщо, дивлячись з додатного кінця осі, бачимо поворот площини під дією проекції проти напрямку годинникової стрілки, то момент сили відносно осі вважається додатним, і навпаки”.

Це правило свердлика: *“Вектор моменту сили відносно осі спрямований вздовж осі руху свердлика, якщо свердлик обертає в*

напрямку обертання моменту”.

Остаточно сформулюємо визначення:

“Моментом сили відносно осі називається взята з відповідним знаком скалярна величина, що дорівнює моменту проекції даної сили на площину, яка перпендикулярна до осі, відносно точки перетину осі з цією площиною”.

Розглянемо особливі умови, за яких момент сили відносно осі дорівнює нулю:

- коли сила паралельна осі (у цьому випадку проекція сили на площину, що перпендикулярна осі, буде дорівнювати нулю),
- коли лінія дії сили перетинає дану вісь (плече $h = 0$).

Звідси випливає, що якщо сила та вісь розміщені в одній площині, то момент сили відносно даної осі дорівнюватиме нулю.

Якщо вектор сили не лежить з віссю в одній площині, але він перпендикулярний до осі, то момент даної сили дорівнює добутку модуля сили на відстань між силою та віссю (з відповідним знаком).

4.5. Визначення моментів сили відносно координатних осей

Визначимо моменти відносно координатних осей x, y, z від сили \bar{P} , вектор якої довільно розташований у просторі (рис. 1.31).

Позначимо кінці вектора сили \bar{P} літерами A і B . Позначимо координати точки A (точки прикладання сили до тіла) через x, y і z .

Для визначення моменту сили \bar{P} відносно осі z , спроектуємо дану силу на площину xOy . При цьому з точок A і B опускаємо на цю площину перпендикуляри, отримуючи на площині проекцію \bar{P}_{xy} . Отриману проекцію можна розкласти на складові \bar{P}_x і \bar{P}_y .

Тепер визначимо момент сили \bar{P} відносно осі z (за теоремою Варіньона), як суму моментів, що створюють складові \bar{P}_x і \bar{P}_y відносно точки O .

Як бачимо з рисунка, цей момент дорівнює

$$m_z = P_y \cdot x - P_x \cdot y. \quad (1.58)$$

Таким же чином можна визначити моменти сили \bar{P} відносно двох інших осей.

Для визначення моменту сили \bar{P} відносно осі x необхідно спроектувати її на площину yOz .

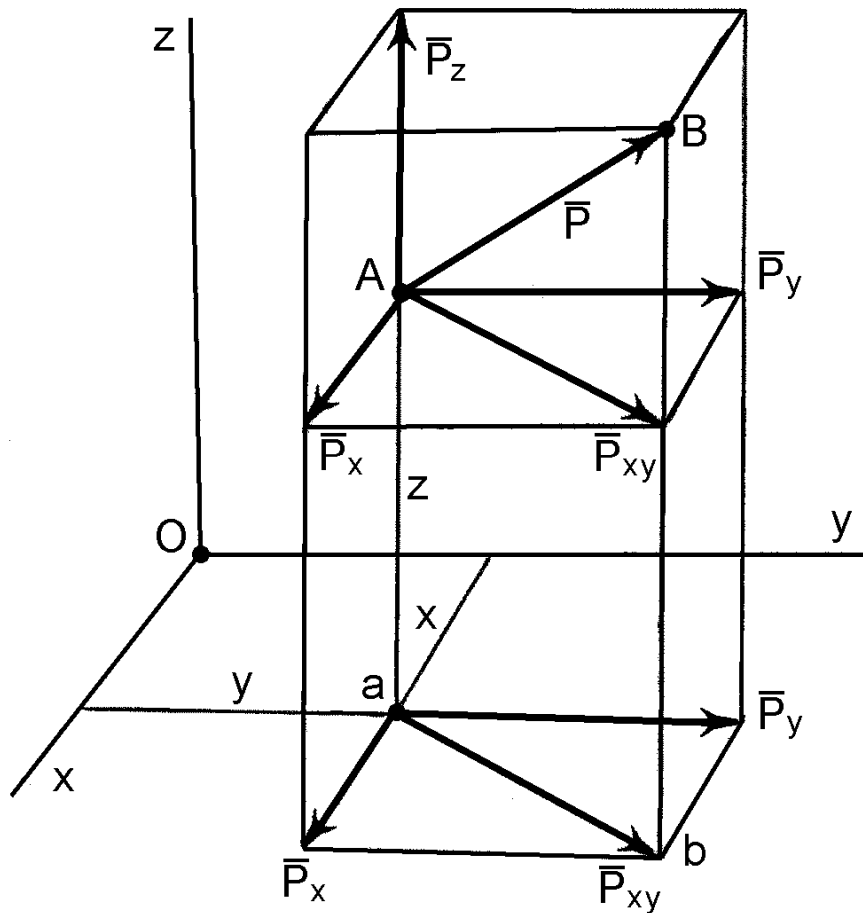


Рис. 1.31

Отриману проекцію розкласти на складові \bar{P}_z і \bar{P}_y і визначити момент сили \bar{P} відносно осі x , як суму моментів її складових відносно точки O :

$$m_x = P_z \cdot y - P_y \cdot z. \quad (1.59)$$

І, нарешті, відносно осі y :

$$m_y = P_x \cdot z - P_z \cdot x. \quad (1.60)$$

Таким чином, значення моментів сил визначаються виразами:

$$\begin{aligned} m_x &= yP_z - zP_y, \\ m_y &= zP_x - xP_z, \\ m_z &= xP_y - yP_x. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Тобто, для розрахунку моменту сили відносно координатних осей необхідно задати координати точки прикладання сили і проекції сили на осі координат.

4.6. Головний вектор і головний момент просторової системи довільних сил

Подібно до плоскої системи просторову систему довільно розташованих сил можна звести до будь-якої точки простору.

Порядок зведення такий самий, як і для плоскої системи довільно розташованих сил, при цьому від кожної сили отримуємо силу і пару сил в центрі зведення.

Таким чином, *будь-яка просторова система довільних сил, що діє на тіло, може бути зведена до однієї сили – головного вектора системи і однієї пари – головного моменту системи просторових сил.*

Головним вектором просторової системи довільних сил називається геометрична сума всіх сил даної системи:

$$\bar{P}_{зл.} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \dots + \bar{P}_n = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k. \quad (1.62)$$

Проекції головного вектора просторової системи довільних сил на координатні осі x, y, z можна визначити аналітичним способом, як алгебраїчну суму проекцій всіх сил системи ці осі:

$$\left. \begin{aligned} P_{зл.x} &= P_{1x} + P_{2x} + P_{3x} + \dots + P_{nx} = \sum_{k=1}^n P_{kx}, \\ P_{зл.y} &= P_{1y} + P_{2y} + P_{3y} + \dots + P_{ny} + \sum_{k=1}^n P_{ky}, \\ P_{зл.z} &= P_{1z} + P_{2z} + P_{3z} + \dots + P_{nz} + \sum_{k=1}^n P_{kz}. \end{aligned} \right\} \quad (1.63)$$

Тоді модуль головного вектора просторової системи довільних сил визначається через його проекції як діагональ паралелепіпеда, побудованого на цих проекціях:

$$P_{зл.} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n P_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n P_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n P_{kz}\right)^2}. \quad (1.64)$$

На відміну від плоскої системи сил моменти сил просторової системи відносно центру зведення діють в різних площинах.

Тому головний момент просторової системи довільно розташованих сил визначається як геометрична сума моментів всіх сил системи відносно центра зведення:

$$\bar{M}_{zл.} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \dots + \bar{m}_n = \sum_{k=1}^n \bar{m}_k. \quad (1.65)$$

Проекції головного моменту просторової системи довільних сил на координатні осі x, y, z , що проходять через дану точку зведення системи, можна визначити аналітично як алгебраїчну суму моментів всіх сил системи відносно цих осей x, y, z :

$$\left. \begin{aligned} M_{zл.x} &= m_x(\bar{P}_1) + m_x(\bar{P}_2) + m_x(\bar{P}_3) + \dots + m_x(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k), \\ M_{zл.y} &= m_y(\bar{P}_1) + m_y(\bar{P}_2) + m_y(\bar{P}_3) + \dots + m_y(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k), \\ M_{zл.z} &= m_z(\bar{P}_1) + m_z(\bar{P}_2) + m_z(\bar{P}_3) + \dots + m_z(\bar{P}_n) = \sum_{k=1}^n m_z(\bar{P}_k). \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$

Абсолютне значення головного моменту заданої системи сил відносно центра зведення системи через знайдені проекції дорівнює:

$$M_{zл.} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n m_z(\bar{P}_k)\right)^2}. \quad (1.67)$$

Слід відмітити, що у загальному випадку головний вектор \bar{R} не залежить від положення центра зведення O , а головний момент \bar{M} , навпаки, залежить від його положення, тому що змінюються плечі "приєднаних" пар, або плечі заданих сил відносно центра зведення.

4.7. Умови рівноваги тіла, що перебуває під дією просторової системи довільних сил

Оскільки будь-яку просторову систему довільних сил можна звести до однієї сили – головного вектора $\bar{P}_{zл.}$ та однієї пари – головного моменту $\bar{M}_{zл.}$, які прикладені до тіла, то для рівноваги тіла необхідно і достатньо, щоб головний вектор $\bar{P}_{zл.}$ і головний момент $\bar{M}_{zл.}$ одночасно дорівнювали нулю:

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_{zл.} &= 0, \\ \bar{M}_{zл.} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.68)$$

Причому, якщо $\bar{P}_{zл.} = 0$, то $P_{zл.x} = 0$, $P_{zл.y} = 0$ і $P_{zл.z} = 0$, а якщо

$\bar{M}_{z1} = 0$ то $M_{z1.x} = 0, M_{z1.y} = 0$ і $M_{z1.z} = 0$.

Проекції головного вектора \bar{P}_{z1} на осі просторової декартової системи координат дорівнюють:

$$\left. \begin{aligned} P_{z1.x} &= \sum_{k=1}^n P_{kx}, \\ P_{z1.y} &= \sum_{k=1}^n P_{ky}, \\ P_{z1.z} &= \sum_{k=1}^n P_{kz}. \end{aligned} \right\} \quad (1.69)$$

Проекції головного моменту на ці ж осі координат дорівнюють:

$$\left. \begin{aligned} M_{z1.x} &= \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k), \\ M_{z1.y} &= \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k), \\ M_{z1.z} &= \sum_{k=1}^n m_z(\bar{P}_k). \end{aligned} \right\} \quad (1.70)$$

Тоді, з урахуванням (1.68) та (1.69), вираз (1.70) можна остаточно подати у вигляді аналітичних рівнянь рівноваги тіла під дією просторової системи довільних сил:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kx} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{ky} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n P_{kz} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_z(\bar{P}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.71)$$

На підставі цих рівнянь складаються конкретні рівняння рівноваги тіл під дією просторової системи, що складається із зовнішніх сил і реакцій в'язей.

Таким чином, для рівноваги тіла, яке перебуває під дією просторової системи довільних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проєкцій всіх сил на осі просторової декартової системи координат і алгебраїчні суми моментів всіх сіл відносно цих осей дорівнювали нулю.

4.8. Умови рівноваги тіла, що перебуває під дією просторової системи паралельних сил

Якщо сили, що прикладені до тіла, розташовані у просторі, але паралельні, то можна вибрати систему координат так, щоб одна з осей (наприклад, вісь z) була паралельна даним силам (рис. 1.32).

Тоді дві інші осі (x, y) будуть утворювати площину, яка буде перпендикулярною цим силам.

Проекції заданих сил на осі x та y дорівнюють нулю.

Задані сили також не створюють моментів відносно осі z , так як вони паралельні цій осі.

Тоді для просторової системи паралельних сил три умови рівноваги з загальної системи рівнянь рівноваги (1.71) випадають, а залишаються три інші.

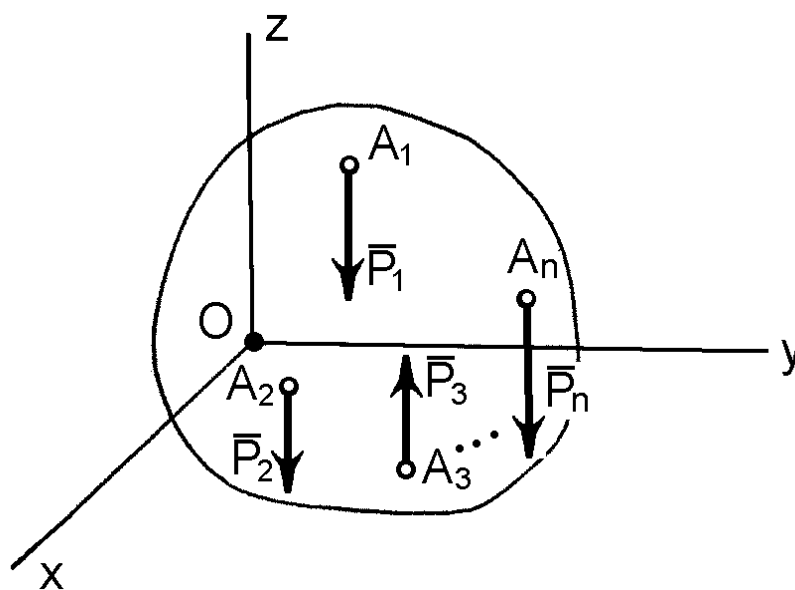


Рис. 1.32

Отже, для рівноваги просторової системи паралельних сил маємо наступні рівняння рівноваги:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n P_{kz} &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k) &= 0, \\ \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.72)$$

Таким чином, для рівноваги тіла, що перебуває під дією просторової системи паралельних сил, необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на вісь, яка паралельна силам, і алгебраїчні суми моментів відносно двох інших осей дорівнювали нулю.

4.9. Теорема Варіньона про момент рівнодійної сили відносно осі

Розглянемо тіло під дією просторової системи довільних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$, що зведена до рівнодійної \bar{R} , яка прикладена до тіла в точці C (рис. 1.33).

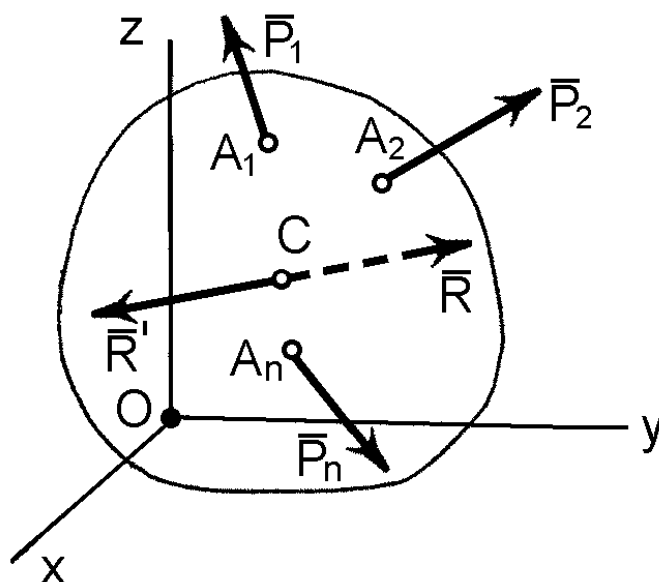


Рис. 1.33

Прикладемо до цієї точки C зрівноважувальну силу \bar{R}' , яка по модулю дорівнює рівнодійній силі \bar{R} і розташована з нею на одній прямій, але має протилежний напрямок.

У цьому випадку тіло під дією системи сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ і зрівноважувальної сили \bar{R}' , буде знаходитись у стані рівноваги.

Це означає, що алгебраїчна сума моментів всіх цих сил відносно будь-якої осі декартової системи координат повинна дорівнювати нулю.

Запишемо дану умову рівноваги спочатку відносно осі x :

$$\sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k) + m_x(\bar{R}') = 0. \quad (1.73)$$

Знайдемо з цього виразу момент сили \bar{R}' відносно осі x . Він буде дорівнювати:

$$-m_x(\bar{R}') = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k). \quad (1.74)$$

Оскільки модуль сили \bar{R}' дорівнює модулю сили \bar{R} , але протилежний за напрямком, то $\bar{R}' = -\bar{R}$.

Це означає, що $m_x(\bar{R}') = -m_x(\bar{R})$.

Підставимо значення цього моменту у (1.74) і матимемо:

$$m_x(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k). \quad (1.75)$$

Такі умови можна скласти відносно двох інших осей.

Теорема доведена.

Таким чином, якщо просторова система довільних сил зводиться до рівнодійної, то момент рівнодійної сили відносно довільної осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно цієї ж осі.

4.10. Приклад рівноваги тіла під дією просторової системи довільних сил

Горизонтальний вал трансмісії (рис. 1.34) несе два шківів C і D пасової передачі і може обертатися у підшипниках A і B . Радіуси шківів дорівнюють $r_C = 0,2$ м, $r_D = 0,25$ м. Натяги гілок паса на шківі C – горизонтальні \bar{T}_1 і \bar{t}_1 , причому, $T_1 = 2t_1 = 4905$ Н. Натяги гілок паса на шківі D – \bar{T}_2 і \bar{t}_2 , причому, $T_2 = 2t_2$, із вертикаллю вони утворюють кут

$\alpha = 30^\circ$. Розміри валу дорівнюють: $a = b = 0,5$ м, $c = 1$ м. Система перебуває у рівновазі.

Визначити натяги T_2 і t_2 та реакції підшипників A і B .

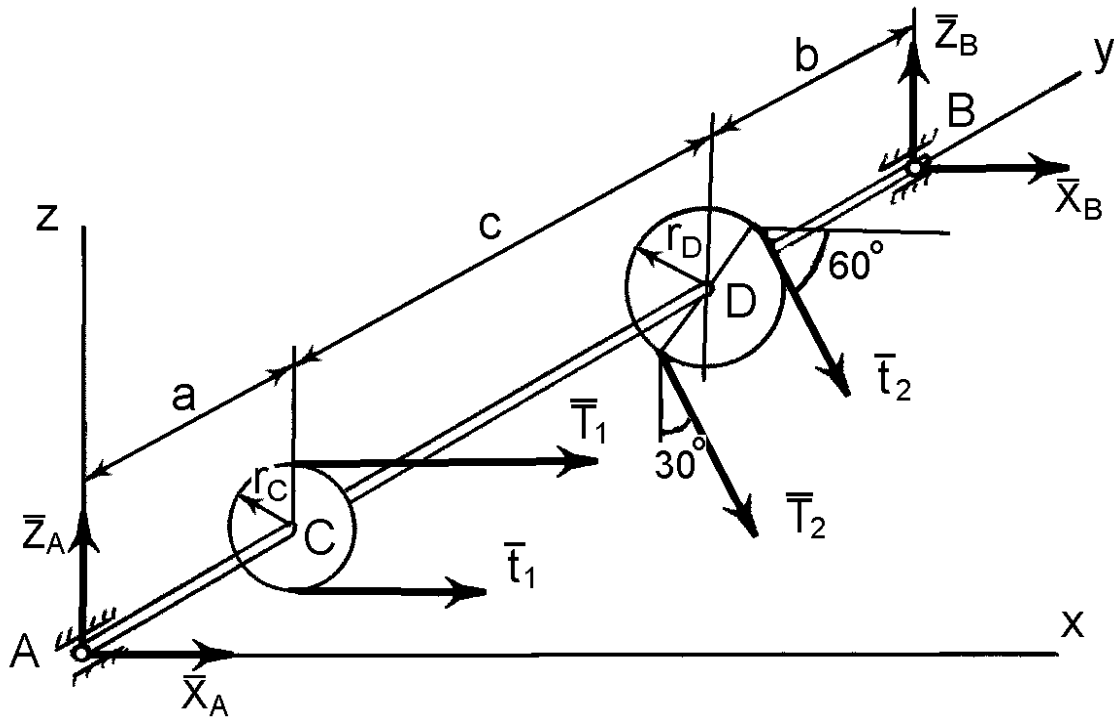


Рис. 1.34

Розв'язання

Розглянемо рівновагу валу AB із шківками C і D . Звільнимо вал від в'язей, замінивши їх відповідними реакціями. У підшипниках реакції розташовані у площині, яка перпендикулярна до осі валу AB .

Таким чином, реакції підшипників A і B розташовані відповідно у площині xAz та у площині, що паралельна до неї і проходить крізь точку B . Невідомий вектор кожної реакції підшипників у площині визначається двома проекціями на осі x і z , як це показано на рис. 1.34.

Після зроблених припущень вважаємо, що отримана просторова система довільних сил перебуває у стані рівноваги.

Запишемо на підставі умов рівноваги (1.71) відповідні рівняння рівноваги просторової системи довільних сил.

В результаті отримаємо:

$$\left. \begin{aligned}
\sum_{k=1}^n P_{kx} = 0; \quad X_A + X_B + t_1 + T_1 + t_2 \cos 60^\circ + T_2 \cos 60^\circ = 0, \\
\sum_{k=1}^n P_{ky} = 0; \\
\sum_{k=1}^n P_{kz} = 0; \quad Z_A + Z_B - t_2 \cos 30^\circ - T_2 \cos 30^\circ = 0, \\
\sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k) = 0; \quad -t_2 \cos 30^\circ (a+c) - T_2 \cos 30^\circ (a+c) + Z_B (a+b+c) = 0, \\
\sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k) = 0; \quad -t_1 r_C + T_1 r_C - T_2 r_D + t_2 r_D = 0, \\
\sum_{k=1}^n m_z(\bar{P}_k) = 0; \quad -(t_1 + T_1) a - (T_2 + t_2) \cos 60^\circ (a+c) - X_B (a+b+c) = 0.
\end{aligned} \right\}$$

Як бачимо з отриманої системи рівнянь рівноваги, друге рівняння відсутнє, оскільки серед сил, що прикладені до тіла, немає таких, які б могли бути спроектовані на вісь y (тобто всі сили лежать у площинах, що перпендикулярні осі y).

Проте, дана система є статично означеною, оскільки число невідомих величин (t_2, X_A, Z_A, X_B, Z_B) дорівнює числу рівнянь рівноваги – 5.

Якщо підставити у дану систему рівнянь числові значення величин, що задані (враховуючи, що за умовою задачі $T_2 = 2t_2$) і розв'язати ці рівняння відносно невідомих, отримаємо наступні відповіді:

$$\begin{aligned}
t_2 &= 1962 \text{ Н}; \\
T_2 &= 3924 \text{ Н}; \\
X_A &= -6553,9 \text{ Н}; \\
Z_A &= 1275,3 \text{ Н}; \\
X_B &= -4046,7 \text{ Н}; \\
Z_B &= 3825,9 \text{ Н}.
\end{aligned}$$

Значення невідомих величин X_A та X_B від'ємні, а це означає, що, фактично, ці реакції, які показані на рис. 1.30, мають протилежний напрямок.

Для остаточного визначення реакцій підшипників у точках A і B необхідно додати геометрично їх складові:

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Z_A^2} = \sqrt{(-6553,9)^2 + (1275,3)^2} = 6676,8 \text{ Н};$$

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = \sqrt{(-4046,7)^2 + (3825,9)^2} = 5569,8 \text{ Н}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Яка система сил є просторовою довільною системою?
2. Як знайти момент сили відносно осі?
3. У яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
4. Що треба знати, щоб обчислити момент сили відносно осей координат?
5. Які умови рівноваги тіла, що перебуває під дією просторової системи довільних сил?
6. Скільки незалежних рівнянь рівноваги можна скласти для просторової системи довільних сил?
7. Скільки рівнянь рівноваги можна скласти для просторової системи паралельних сил?
8. Як читається теорема Варіньона про момент рівнодійної сили відносно осі?

РОЗДІЛ 5. ЦЕНТР ВАГИ

5.1. Центр паралельних сил

Центром паралельних сил – називається точка прикладання рівнодійної цих сил, яка не змінює свого положення при повороті усіх сил на однаковий кут в один і той же бік.

Знайдемо центр системи паралельних і однаково спрямованих сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$, прикладених до тіла у точках $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ (рис. 1.35).

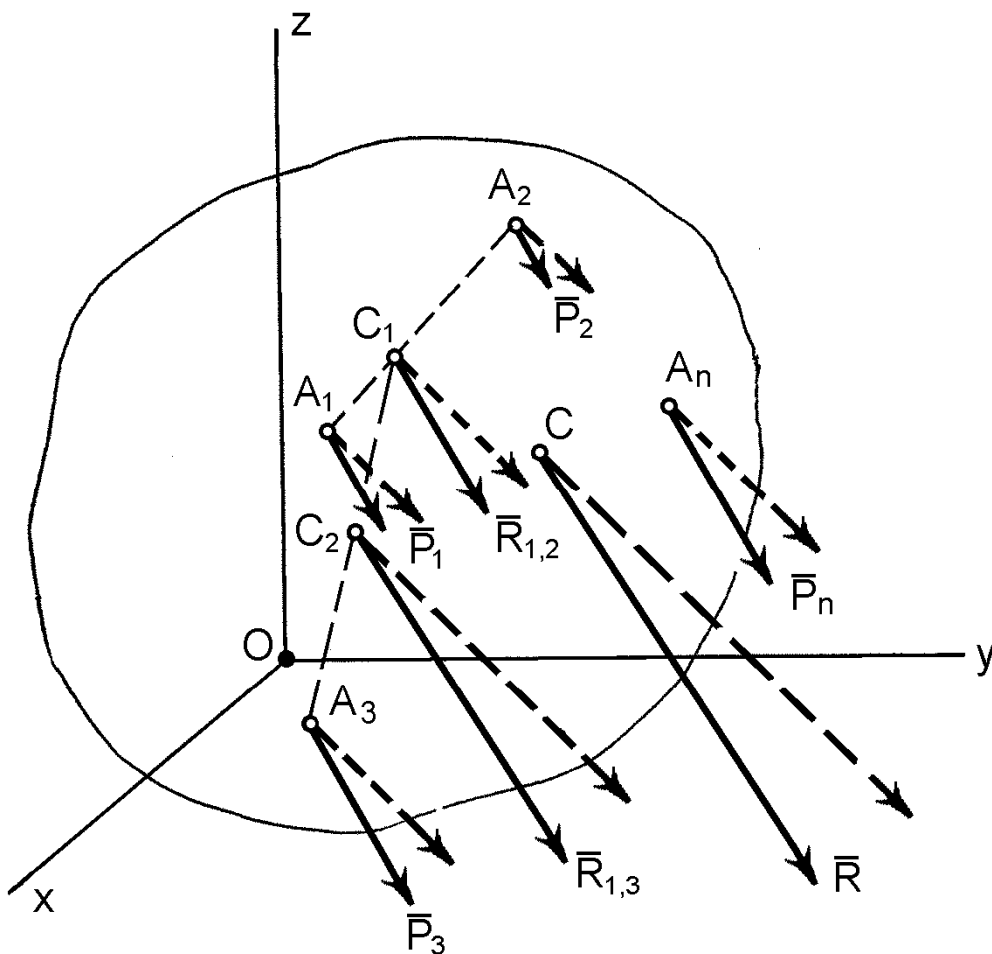


Рис. 1.35

Спочатку додамо геометрично сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 . Їх рівнодійна $\bar{R}_{1,2}$ буде дорівнювати:

$$\bar{R}_{1,2} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2. \quad (1.76)$$

Точка C_1 прикладання цієї рівнодійної $\bar{R}_{1,2}$ визначається за відомим правилом додавання двох паралельних сил з однаковим напрямком.

Оскільки сили \bar{P}_1 і \bar{P}_2 прикладені у точках A_1 і A_2 , то, з'єднавши ці точки прямою, знаходимо положення точки C_1 на цій прямій за пропорцією

$$P_1 \cdot A_1 C_1 = P_2 \cdot A_2 C_1. \quad (1.77)$$

Аналогічно складаємо сили $\bar{R}_{1,2}$ і \bar{P}_3 , отримуючи їх рівнодійну $\bar{R}_{1,3}$, яка є фактично рівнодійною трьох сил і буде дорівнювати

$$\bar{R}_{1,3} = \bar{R}_{1,2} + \bar{P}_3 = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3. \quad (1.78)$$

Точка C_2 прикладання цієї рівнодійної $\bar{R}_{1,3}$ також визначається за вказаним вище правилом на прямій $C_1 A_3$.

Аналогічно поведимося з рештою сил, послідовно їх додаючи, і, остаточно, отримаємо рівнодійну \bar{R} системи паралельних сил.

Рівнодійна \bar{R} системи паралельних сил прикладена в точці C , спрямована у той же бік, що і задані паралельні сили, а по величині буде дорівнювати

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = \sum_{k=1}^n P_k. \quad (1.79)$$

Повернемо тепер всі задані сили навколо їх точок прикладання в один бік на один і той же кут і знову знайдемо їх рівнодійну. При цьому також починаємо з додавання сил \bar{P}_1 і \bar{P}_2 .

Але, як бачимо з рис. 1.35 і рівнянь (1.78) і (1.79), ні модуль рівнодійної $\bar{R}_{1,2}$, ні положення точки її прикладання C_1 на прямій $A_1 A_2$, не змінюються. Змінюється лише напрямок, який буде паралельним новому напрямку сил.

Якщо провести до кінця додавання паралельних сил, які вже мають новий напрямок, то можна побачити, що і рівнодійна \bar{R} у даному випадку не змінює ні свого модулю, ні точки прикладання C . Змінюється лише напрямок її лінії дії.

Таким чином, точка прикладання рівнодійної \bar{R} системи паралельних сил завжди знаходиться в точці C , положення якої по відношенню до положення точок $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ завжди буде незмінним. Ця точка і є центром паралельних сил.

5.2. Координати центра паралельних сил

Якщо відомі координати точок прикладення системи паралельних сил $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ відносно осей x, y, z : $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, ..., $A_n(x_n, y_n, z_n)$ (рис. 1.36), то координати точки прикладення рівнодіючої \bar{R} цієї системи – точки $C(x_C, y_C, z_C)$, яка є центром паралельних сил, можна знайти наступним чином.

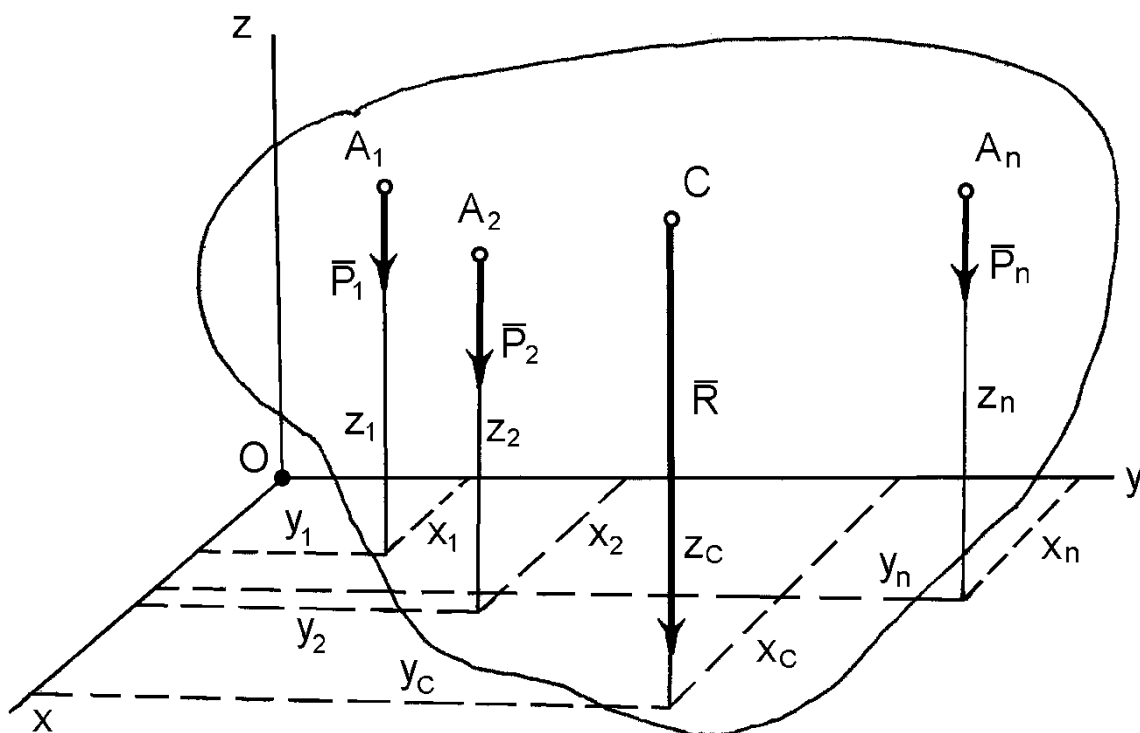


Рис. 1.36

Виберемо положення координатних осей x, y, z так, щоб одна з них (наприклад, вісь z) була паралельна заданим силам. Знайдемо моменти усіх сил відносно осей координат x, y і z .

Обчислимо спочатку моменти всіх сил відносно осі y . Оскільки

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^n \bar{P}_k,$$

то за теоремою Варіньона

$$m_y(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k),$$

а тому

$$R \cdot x_C = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3 + \dots + P_n \cdot x_n = \sum_{k=1}^n P_k \cdot x_k. \quad (1.80)$$

Звідки координата x_C буде дорівнювати

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k x_k}{R}. \quad (1.81)$$

Аналогічно визначимо моменти усіх сил відносно осі x :

$$-R \cdot y_C = -P_1 \cdot y_1 - P_2 \cdot y_2 - P_3 \cdot y_3 - \dots - P_n \cdot y_n = \sum_{k=1}^n (-P_k \cdot y_k), \quad (1.82)$$

звідки координата y_C буде дорівнювати

$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k y_k}{R}. \quad (1.83)$$

Далі повернемо всі сили на один і той же кут в один бік (наприклад, на кут 90° , перпендикулярно до площини yOz і паралельно осі y). Положення точки C , як відомо, при повороті усіх сил на однаковий кут, в один і той же бік не змінюється.

Обчислимо тепер моменти усіх сил відносно осі y :

$$R \cdot z_C = P_1 \cdot z_1 + P_2 \cdot z_2 + P_3 \cdot z_3 + \dots + P_n \cdot z_n = \sum_{k=1}^n P_k \cdot z_k, \quad (1.84)$$

звідки координата z_C буде дорівнювати

$$z_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k z_k}{R}. \quad (1.85)$$

Остаточні формули для координат центра паралельних сил

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\sum_{k=1}^n P_k x_k}{R}, \\ y_C &= \frac{\sum_{k=1}^n P_k y_k}{R}, \\ z_C &= \frac{\sum_{k=1}^n P_k z_k}{R}. \end{aligned} \quad (1.86)$$

5.3. Центр ваги тіла, об'єму, площі, лінії

Сили ваги, що діють на кожну окрему частинку тіла, біля поверхні Землі внаслідок її великого радіуса по відношенню до розмірів тіла в першому наближенні можна розглядати як систему паралельних сил.

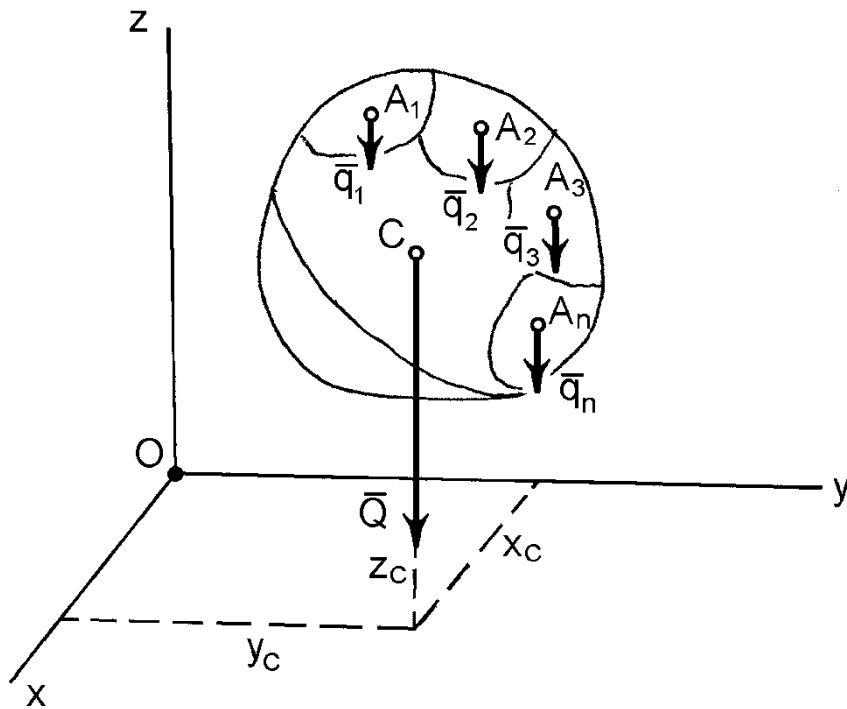


Рис. 1.37

Центр паралельних сил ваги, діючих на всі частинки тіла, називається центром ваги тіла.

Центр ваги тіла не змінює свого положення при будь – якому повороті тіла.

Координати центра ваги тіла знаходять по формулам визначення координат центра паралельних сил.

Якщо тіло умовно можна поділити на багато частинок (рис. 1.37), кожна з котрих має силу ваги $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \dots, \bar{q}_n$, то рівнодійна цієї системи паралельних сил \bar{Q} (вага тіла) дорівнює:

$$\bar{Q} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 + \dots + \bar{q}_n = \sum_{k=1}^n \bar{q}_k, \quad (1.87)$$

а координати точки прикладення цієї рівнодійної (центр ваги тіла) можна знайти як:

$$\begin{aligned}
 x_C &= \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q}, \\
 y_C &= \frac{\sum_{k=1}^n q_k y_k}{Q}, \\
 z_C &= \frac{\sum_{k=1}^n q_k z_k}{Q},
 \end{aligned}
 \tag{1.88}$$

де x_k, y_k і z_k - координати прикладання сил ваги кожної частинки тіла \bar{q}_k .

Якщо тіло однорідне, то вага кожної частинки цього тіла пропорційна її об'єму:

$$q_k = \gamma \cdot v_k, \tag{1.89}$$

де γ - питома вага (вага одиниці об'єму); v_k - об'єм частинки тіла.

Вага усього тіла визначається

$$Q = \gamma \cdot V, \tag{1.90}$$

де V - об'єм усього тіла; γ - питома вага тіла.

Після підстановки (1.89) і (1.90) у (1.88) питома вага γ , як загальний множник, скоротиться:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n q_k x_k}{Q} = \frac{\sum_{k=1}^n \gamma(v_k x_k)}{\gamma \cdot V} = \frac{\sum_{k=1}^n v_k x_k}{V}. \tag{1.91}$$

Аналогічні вирази можна отримати і для двох інших координат. В результаті маємо координати центра ваги об'єму:

$$\begin{aligned}
 x_C &= \frac{\sum_{k=1}^n v_k x_k}{V}, \\
 y_C &= \frac{\sum_{k=1}^n v_k y_k}{V}, \\
 z_C &= \frac{\sum_{k=1}^n v_k z_k}{V}.
 \end{aligned}
 \tag{1.92}$$

Як бачимо, центр ваги однорідного тіла залежить тільки від його геометричної форми. А тому, точка C , координати якої визначені виразом (1.92) носить назву – центр ваги об'єму.

Для однорідних плоских тіл, наприклад, тонкої пластини з відносно малою товщиною h (рис. 1.38), центр ваги C буде знаходитись в одній площині Oxy і визначатись тільки двома координатами x_C, y_C :

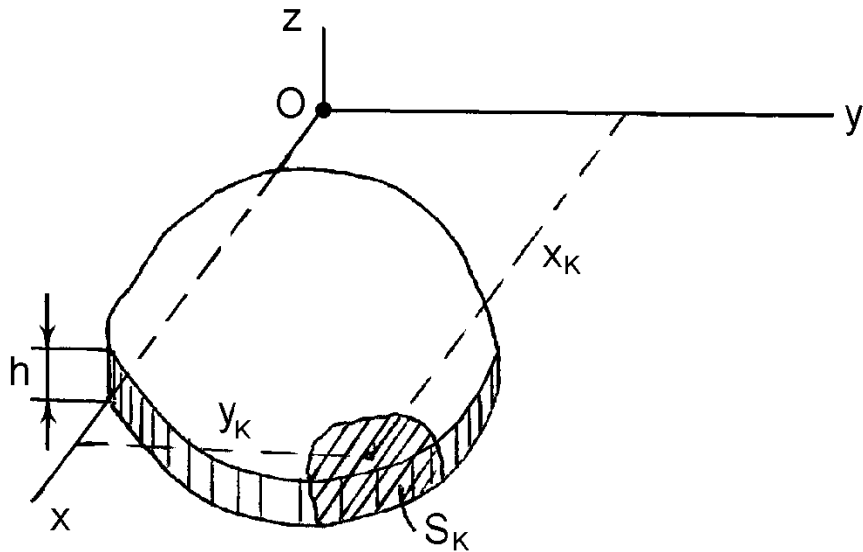


Рис. 1.38

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S}, \tag{1.93}$$

$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k y_k}{S}.$$

де S - площа всієї пластини, s_k - площа частинок, на які розбита пластинка, x_k, y_k - координати центра ваги кожної частинки площі пластини.

Точка C , координати якої визначаються формулами (1.93), має назву центра ваги площі.

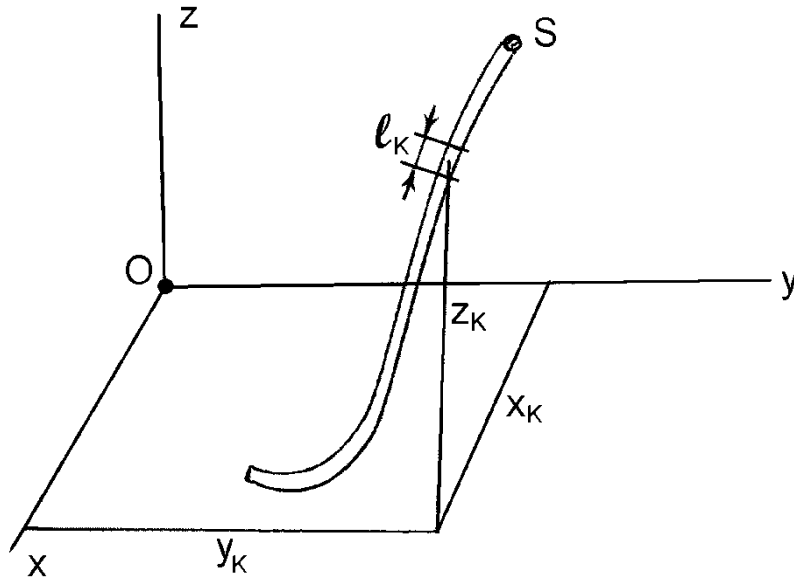


Рис. 1.39

Якщо площа поперечного переріза однорідного тіла однакова по всій довжині і поперечні розміри відносно малі по відношенню до його довжини, то таке тіло можна розглядати як матеріальну лінію. Це може бути, наприклад, дріт малого діаметра і постійного поперечного перерізу S (рис. 1.39).

Вага і об'єм окремих частинок такого тіла будуть пропорційні їх довжинам l_k і положення центра ваги всього тіла будуть залежати тільки від довжини і форми цієї лінії.

Координати центра ваги C однорідної ломаної лінії визначаються по формулам:

$$\begin{aligned}
 x_C &= \frac{\sum_{k=1}^n l_k x_k}{L}, \\
 y_C &= \frac{\sum_{k=1}^n l_k y_k}{L}, \\
 z_C &= \frac{\sum_{k=1}^n l_k z_k}{L},
 \end{aligned}
 \tag{1.94}$$

де L - загальна довжина лінії, l_k - довжина частки лінії, x_k, y_k, z_k - координати центра ваги кожної частки лінії.

Точка C , координати якої визначаються формулами (1.94), має назву центра ваги лінії.

Слід зауважити, що вище наведені формули можуть бути використані для визначення центру ваги однорідних тіл, які можливо розбити на окремі частини правильної форми, центри ваги кожної з яких легко знайти.

Якщо тіло неможливо розбити на кінцеве число правильних елементів, тоді переходять від кінцевих сум до інтегрування. В такому випадку формули визначення координат центра ваги об'єму, площі і лінії приймають відповідно вигляд:

- центра ваги об'єму

$$\begin{aligned}x_C &= \frac{\int x dV}{V}, \\y_C &= \frac{\int y dV}{V}, \\z_C &= \frac{\int z dV}{V},\end{aligned}\tag{1.95}$$

- центра ваги площі

$$\begin{aligned}x_C &= \frac{\int x dS}{S}, \\y_C &= \frac{\int y dS}{S},\end{aligned}\tag{1.96}$$

- центра ваги лінії

$$\begin{aligned}x_C &= \frac{\int x dl}{L}, \\y_C &= \frac{\int y dl}{L}, \\z_C &= \frac{\int z dl}{L},\end{aligned}\tag{1.97}$$

де інтегрування відбувається відповідно по об'єму V , площі S або лінії L тіла.

Із формул (1.92) – (1.97) випливає, що положення центра ваги однорідного тіла не залежить від фізичних властивостей його матеріалу, а залежить лише від геометричної форми і розмірів тіла.

5.4. Статичний момент площі плоского тіла

В плоских тілах (рис. 1.40) добуток елементарної площі dS на відстань від центра ваги цієї площі до осі координат y або x називається статичним моментом елементарної площі відносно осі y або x :

$$\begin{aligned} dS_y &= dS \cdot x, \\ dS_x &= dS \cdot y. \end{aligned} \tag{1.98}$$

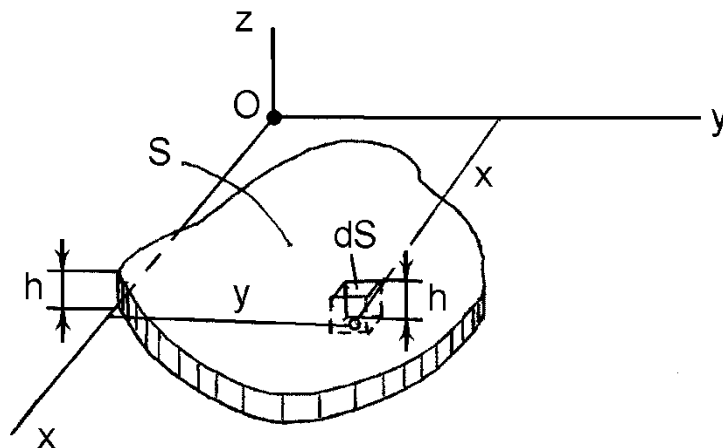


Рис. 1.40

Тоді у формулах (1.98) в чисельниках стоять вирази статичних моментів площі всього плоского тіла відносно координатних осей y і x :

$$\begin{aligned} S_y &= \int_{(S)} x dS, \\ S_x &= \int_{(S)} y dS, \end{aligned} \tag{1.99}$$

а координати центра ваги плоских тіл через їх статичні моменти площі визначаються як:

$$x_C = \frac{S_y}{S},$$

$$y_C = \frac{S_x}{S}.$$
(1.100)

Із формул (1.100) можна зробити висновок, якщо координата x_C і y_C дорівнює нулю, тобто якщо осі y і x проходять через центр ваги площі, то відповідно дорівнюють нулю і статичні моменти площі відносно цих осей. Такі осі називають центральними.

Таким чином, *статичний момент площі плоского тіла відносно осі в площині розміщення тіла – це геометрична характеристика, яка дорівнює добутку площі тіла на відстань від його центра ваги до цієї осі.*

Статичний момент площі відносно будь – якої центральної осі дорівнює нулю.

На завершення слід відмітити, що статичний момент площі, як геометрична характеристика плоского перерізу тіла, знаходить широке застосування в опорі матеріалів.

5.5. Способи визначення координат центра ваги тіла

Існують наступні способи визначення координат центра ваги тіл: метод симетрії, метод розбиття і доповнення, експериментальні способи.

Розглянемо послідовно ці способи.

Метод симетрії.

Якщо однорідне тіло має площину, вісь, або центр симетрії, то його центр ваги лежить відповідно у площині симетрії, або на осі симетрії, або в центрі симетрії.

Таким чином, центр ваги однорідних симетричних тіл, таких як кільця, прямокутні пластини, прямокутні паралелепіпеди, кулі та інші тіла, які мають центр симетрії, розташований у геометричних центрах (центри симетрії) цих тіл.

Метод розбиття.

Якщо тіло можна розбити на скінченне число таких частин, для кожної з яких положення центра ваги неважко визначається, то координати центра ваги усього тіла можна визначити безпосередньо за формулами (1.88), (1.92), (1.93) і (1.94). Причому кількість доданків у чисельнику кожного з указаних виразів буде дорівнювати кількості частин, на яке розбивається тіло.

Наведемо приклад визначення центра ваги тіла методом розбиття

його на окремі тіла, центри ваги яких відомі.

Приклад

Визначити координати центра ваги однорідної пластини (рис. 1.41).

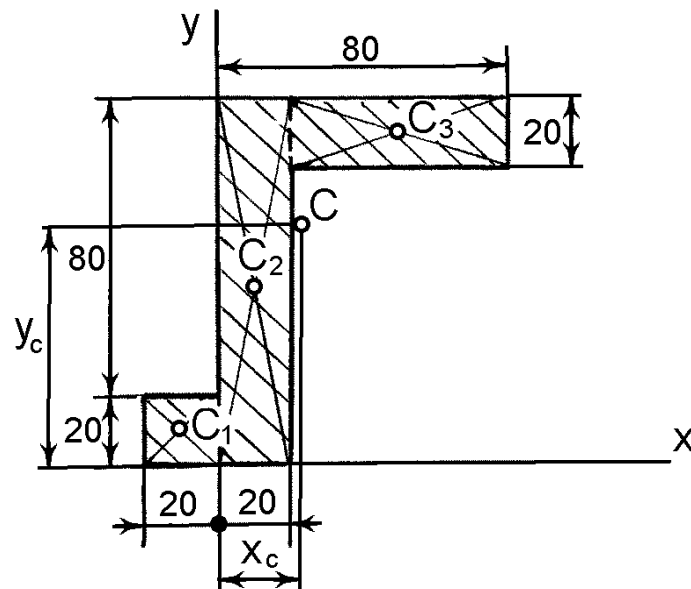


Рис. 1.41

Розв'язання

Оберемо осі координат x і y . Розбиваємо пластину на окремі прямокутні частини.

Для кожного прямокутника проводимо діагоналі, точки перетину яких c_1, c_2 і c_3 відповідають центрам ваги кожного прямокутника.

У прийнятій системі координат неважко отримати значення координат цих точок. А саме: $c_1(-1, 1)$, $c_2(1, 5)$, $c_3(5, 9)$.

Площі кожного тіла відповідно дорівнюють: I – $s_1 = 400 \text{ мм}^2$; II – $s_2 = 2000 \text{ см}^2$; III – $s_3 = 1200 \text{ см}^2$.

Площа всієї пластини дорівнює: $S = s_1 + s_2 + s_3 = 3600 \text{ см}^2$.

Для визначення координат центра ваги заданої пластини використаємо вираз (1.93).

Підставивши значення всіх відомих величин у рівняння, отримаємо

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S} = \frac{s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3}{S} = 210 \text{ мм},$$

$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k y_k}{S} = \frac{s_1 y_1 + s_2 y_2 + s_3 y_3}{S} = 590 \text{ мм}.$$

За обчисленими значеннями координат центра ваги пластини можна позначити точку C на рисунку.

Як бачимо, центр ваги (геометрична точка) пластини розташований за її межами.

Метод доповнення.

Спосіб, про який йдеться далі, є деяким випадком способу розбиття. Він може застосовуватись до тіл, які мають вирізи, порожнини, причому без врахування вирізу, або вирізаної частини тіла положення центра ваги тіла відомо.

Розглянемо приклад застосування такого методу.

Приклад

Визначити положення центра ваги круглої пластини радіусом R , яка має круговий отвір радіуса r (рис. 1.42). Відстань $C_1 C_2 = a$.

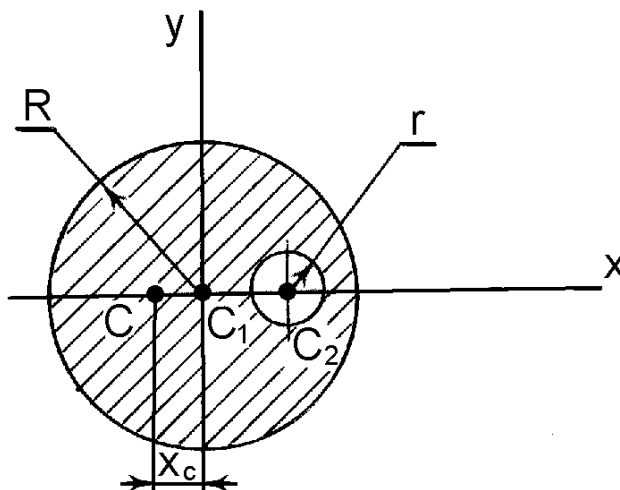


Рис. 1.42

Розв'язання

Як бачимо з рисунка, центр ваги пластини міститься на осі симетрії пластини x , тобто на прямій, яка проходить крізь точки C_1 і C_2 .

Таким чином, для визначення положення центра ваги цієї пластини необхідно обчислити тільки одну координату x_C , оскільки друга координата y_C дорівнює нулю.

Покажемо осі координат x, y . Прийнемо, що пластинка складається з двох тіл – з повного круга (без врахування вирізу) і тіла, яке утворено вирізом.

У прийнятій системі координати x для вказаних тіл будуть дорівнювати: $x_1 = 0$; $x_2 = C_1C_2 = a$.

Площі тіл дорівнюють: $s_1 = \pi R^2$; $s_2 = -\pi r^2$.

Загальна площа всього тіла буде дорівнювати фізичній різниці між площами першого і другого тіл, а саме $S = s_1 - s_2 = \pi(R^2 - r^2)$.

Для визначення невідомої координати центра ваги заданої пластини використаємо перше рівняння виразу (1.93).

Підставивши значення усіх відомих величин у це рівняння, отримаємо

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n s_k x_k}{S} = \frac{x_1 s_1 + x_2 s_2}{S} = \frac{-a \cdot \pi r^2}{\pi (R^2 - r^2)} = -\frac{a r^2}{(R^2 - r^2)}.$$

Таким чином, значення координати x_C від'ємне, а тому, оскільки друга координата $y_C = 0$, то центр ваги пластини C розміщений на осі x зліва від точки C_1 .

Приклад

Визначити положення центру ваги однорідної плоскої фігури в координатних осях x, y (рис. 1.43).

Розв'язання

Оберемо осі координат x і y , як показано на рис. 3.

Уявимо, що задана плоска фігура може бути складена із чотирьох простих фігур: I – прямокутника розмірами $a_1 \times b_1 = 200 \times 300$ мм, II – прямокутника розмірами $a_2 \times b_2 = 200 \times 400$ мм, III – прямокутного трикутника з основою $a_3 = 300$ мм і висотою $h_3 = 600$ мм, IV – кола діаметром $d_4 = 160$ мм, яке вирізано з фігури і тому має від'ємну площу.

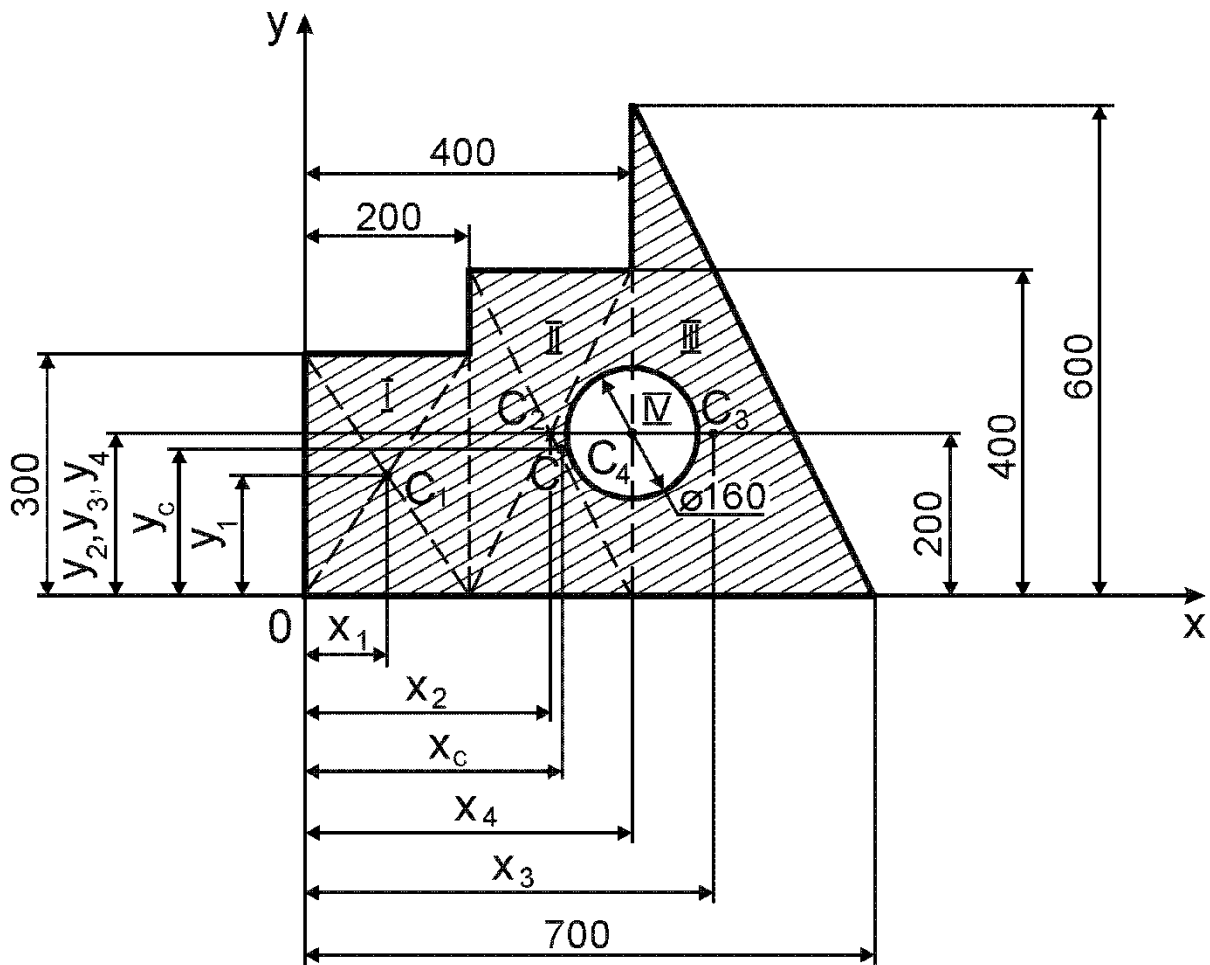


Рис. 1.43

Для кожної простої плоскої фігури знаходимо точки c_1, c_2, c_3 і c_4 , які відповідають їх центрам ваги.

У прийнятій системі координат значення координат цих точок наступні:

$$\text{точки } c_1 - x_1 = 100 \text{ мм}, y_1 = 150 \text{ мм};$$

$$\text{точки } c_2 - x_2 = 300 \text{ мм}, y_2 = 200 \text{ мм};$$

$$\text{точки } c_3 - x_3 = 500 \text{ мм}, y_3 = 200 \text{ мм};$$

$$\text{точки } c_4 - x_4 = 400 \text{ мм}, y_4 = 200 \text{ мм};$$

Площі кожної простої плоскої фігури відповідно будуть дорівнювати:

$$\text{I} - S_1 = a_1 \cdot b_1 = 200 \cdot 300 = 6 \cdot 10^4 \text{ мм}^2;$$

$$\text{II} - S_2 = a_2 \cdot b_2 = 200 \cdot 400 = 8 \cdot 10^4 \text{ мм}^2;$$

$$\text{III} - S_3 = \frac{1}{2} a_3 \cdot h_3 = \frac{1}{2} 300 \cdot 600 = 9 \cdot 10^4 \text{ мм}^2 ;$$

$$\text{IV} - S_4 = \frac{\pi d_4^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 160^2}{4} = 2,0096 \cdot 10^4 \text{ мм}^2 .$$

Визначаємо координати центра ваги заданої фігури за формулами:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n S_k x_k}{S} = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2 + S_3 x_3 - S_4 x_4}{S_1 + S_2 + S_3 - S_4} ,$$

$$y_C = \frac{\sum_{k=1}^n S_k y_k}{S} = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2 + S_3 y_3 - S_4 y_4}{S_1 + S_2 + S_3 - S_4} .$$

Підставивши значення всіх відомих величин у рівняння, отримаємо

$$x_C = \frac{(6 \cdot 100 + 8 \cdot 300 + 9 \cdot 500 - 2,0096 \cdot 400) \cdot 10^4}{(6 + 8 + 9 - 2,0096) \cdot 10^4} = 319 \text{ мм} ,$$

$$y_C = \frac{(6 \cdot 150 + 8 \cdot 200 + 9 \cdot 200 - 2,0096 \cdot 200) \cdot 10^4}{(6 + 8 + 9 - 2,0096) \cdot 10^4} = 186 \text{ мм} .$$

За обчисленими значеннями координат центра ваги фігури можна позначити точку $C(x_C, y_C)$ на кресленні (рис. 1.43).

Експериментальні способи.

Ці способи знайшли широке застосування при відшуванні положення центра ваги тіл складних форм і конфігурацій, для яких інші способи майже непридатні внаслідок громіздкості та складності. До таких тіл, в першу чергу, слід віднести комбайни, трактори, складні сільськогосподарські машини та знаряддя.

При застосуванні експериментальних способів відшування положення центра ваги найбільш широко використовують метод підвішування та метод зважування тіл.

При застосуванні методу підвішування тіло на тросі або нитці підвішують за різні його точки. Напрямок троса або нитки, буде давати кожного разу напрямок сили ваги тіла. Тоді точка перетину цих напрямків і дає положення центра ваги тіла.

Використання другого методу – зважування вимагає вимірювання ваги усього тіла, а також окремих його частин.

5.6. Центри ваги деяких простих геометричних фігур

1. Центр ваги дуги кола

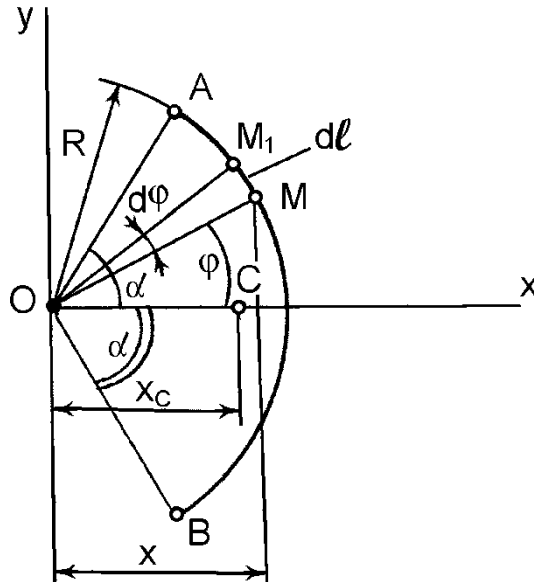


Рис. 1.44

Для дуги AB кола радіусом R , у якої центральний кут OAB дорівнює 2α (радіан) з віссю симетрії Ox (рис. 1.44), центр ваги буде розташований на осі x ($y_C = 0$).

Координата x_C буде дорівнювати

$$x_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}. \quad (1.101)$$

2. Центр ваги трикутника

Для трикутника, вершини якого у прийнятій системі координат Oxy відповідають точкам з координатами $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ і $A_3(x_3, y_3)$ (рис. 1.45) центр ваги C буде розташований у точці перетину його медіан.

Координати цієї точки у прийнятій системі координат визначається залежностями:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \\ y_C &= \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3), \end{aligned} \quad (1.102)$$

де x_1, x_2, \dots, y_3 - координати вершин трикутника.

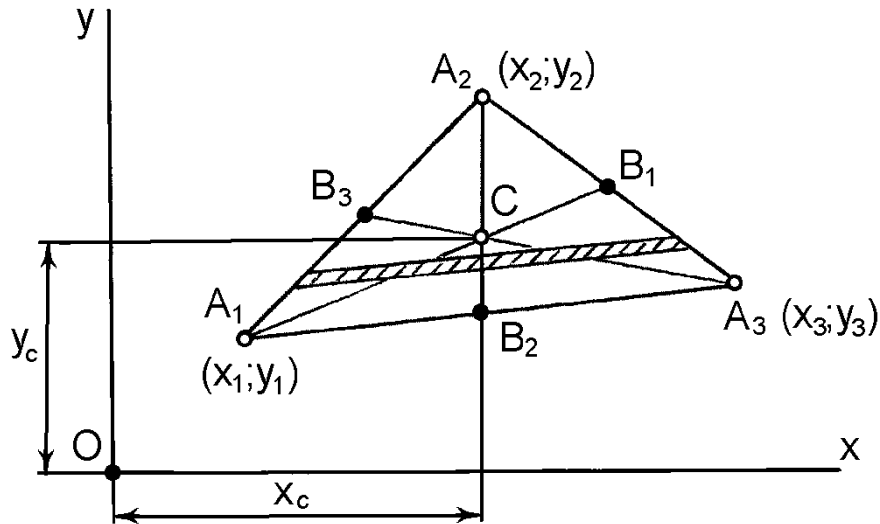


Рис. 1.45

Корисно також знати, що

$$\begin{aligned} CA_1 &= \frac{2}{3} A_1B_1; & CB_1 &= \frac{1}{3} A_1B_1; \\ CA_2 &= \frac{2}{3} A_2B_2; & CB_2 &= \frac{1}{3} A_2B_2; \\ CA_3 &= \frac{2}{3} A_3B_3; & CB_3 &= \frac{1}{3} A_3B_3; \end{aligned}$$

3. Центр ваги сектора

Для сектора OAB радіуса R з центральним кутом 2α (радіан) (рис. 1.46) центр ваги сектора лежить на осі його симетрії - бісектрисі кута AOB .

Якщо цю бісектрису прийняти за вісь x , то положення центра C визначається формулою:

$$x_c = \frac{2 R \sin \alpha}{3 \alpha}. \quad (1.103)$$

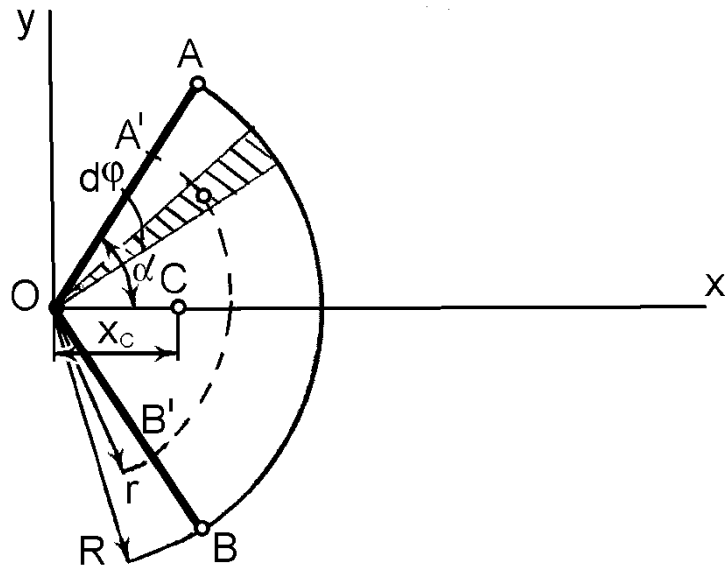


Рис. 1.46

Запитання для самоконтролю

1. Що називають центром паралельних сил?
2. За якими формулами визначаються координати центра паралельних сил?
3. За якими формулами визначаються положення центра ваги тіла, об'єму, площі, лінії?
4. Що таке центр ваги тіла?
5. Як записати формули координат центра ваги тіла, об'єму, площі, лінії в інтегральній формі?
6. Які існують способи визначення координат центра ваги тіла?
7. Як визначити координати центра ваги дуги кола?
8. Як визначити координати центра ваги трикутника?
9. Як визначити координати центра ваги сектора?

ЧАСТИНА II. КІНЕМАТИКА

РОЗДІЛ 6. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

6.1. Вступ до кінематики

Кінематика – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальних тіл з геометричної точки зору, тобто без врахування їх маси та діючих сил.

Кінематика являє собою вступ до динаміки, оскільки встановлення основних кінематичних понять необхідне для вивчення руху тіл з урахуванням діючих сил.

Однак з іншого боку методи кінематики мають і самостійне практичне значення, наприклад передача руху.

Під рухом в теоретичній механіці розуміють зміну положення даного тіла в просторі з плином часу по відношенню до інших тіл.

Таким чином, рух тіл відбувається в просторі і часі. В кінематиці розглядається так званий “евклідовий простір” і за одиницю лінійного вимірювання простору прийнято 1 метр ($1 м = \frac{1}{40} \text{ млн.}$ частина земного меридіану). За одиницю часу прийнята 1 секунда ($1 с = \frac{1}{86,4} \text{ тис.}$ частина доби). Момент, з якого починається відлік часу, зветься початковим. В початковий момент часу $t = 0$.

Для того, щоб вивчати рух матеріальних тіл, необхідно мати якусь систему відліку (систему координат) і відносно неї і вивчати цей рух. Однак, як відомо, в природі абсолютного руху немає.

Будь-який рух є відносним. В кінематиці вивчається рух відносно поверхні землі (іноді разом із землею).

В техніці вивчається рух деяких тіл всередині машини, а тому рух розглядається по відношенню до рами машини, або до рами якогось робочого органу.

Основна задача кінематики зводиться до розгляду руху матеріальної точки, або твердого тіла і визначення їх кінематичних характеристик.

До кінематичних характеристик відносяться – траєкторія руху, швидкість руху та прискорення руху.

Сформулюємо визначення цих характеристик.

Траєкторія руху – це неперервна лінія, по якій рухається матеріальна точка в даній системі відліку (якщо мати на увазі тверде тіло, то під траєкторією руху розуміють траєкторію руху його центру ваги).

Ця лінія може бути заданою у вигляді якогось рівняння, або її треба визначити і побудувати.

Якщо траєкторія руху є пряма лінія, то рух точки має назву прямолінійного, а якщо крива – криволінійного.

Швидкість – це величина, яка характеризує зміну шляху в одиницю часу, тобто показує, як швидко точка, або тіло рухаються.

Швидкість позначається буквою \vec{V} , вона є величиною векторною і вимірюється в $\left[\frac{m}{c} \right]$, або в $\left[\frac{km}{год} \right]$. До речі $10 \frac{m}{c} = 36 \frac{km}{год}$.

Прискорення – це величина, що характеризує зміну швидкості за одиницю часу.

Прискорення позначається буквою \vec{a} , воно також є векторною величиною і вимірюється в $\left[\frac{m}{c^2} \right]$.

Кінематика поділяється на дві частини: кінематика матеріальної точки і кінематика твердого тіла.

Оскільки кожне тіло складається з матеріальних точок, то природньо почати кінематику з вивчення руху матеріальної точки.

6.2. Кінематика матеріальної точки. Способи завдання руху матеріальної точки

Для того, щоб вивчати рух матеріальної точки, необхідно вибрати спосіб його завдання. Існує декілька способів завдання руху матеріальної точки. Кінематично задати рух або закон руху точки означає вказати такий спосіб, який дає можливість визначити положення цієї точки відносно даної системи відліку у будь-який момент часу.

Для завдання руху матеріальної точки можна застосувати один з трьох наступних способів:

1. Векторний;
2. Координатний;
3. Натуральний.

Розглянемо послідовно вказані способи.

1. Векторний спосіб

Якщо з якого-небудь центру O провести радіус-вектор \vec{r} у точку M , яка рухається, то його модуль і напрямок будуть залежати від часу, тобто радіус-вектор \vec{r} буде деякою функцією часу t (рис. 2.1):

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (2.1)$$

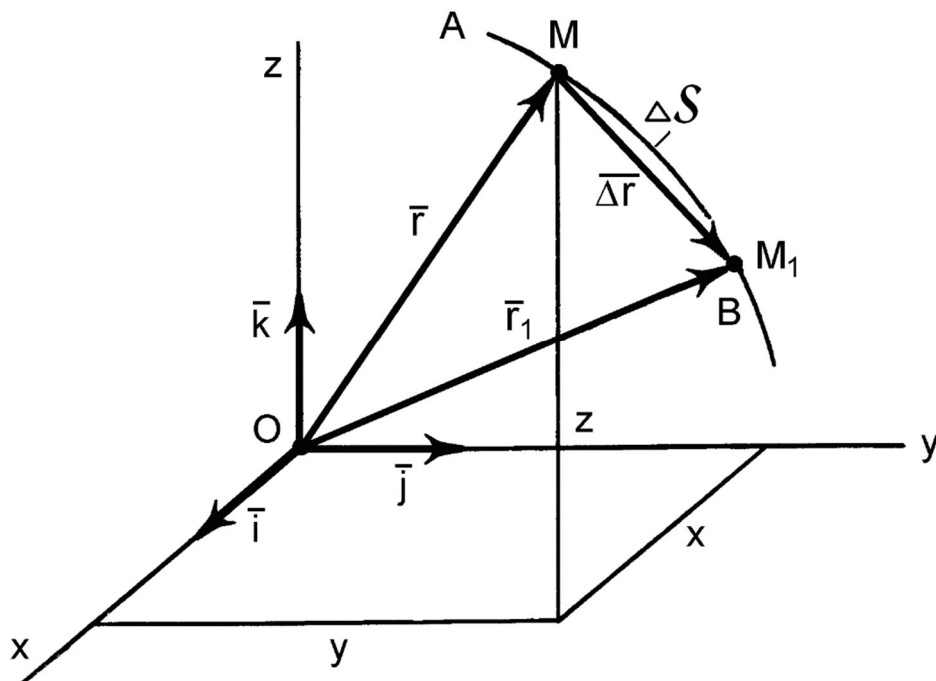


Рис. 2.1

При умові, що ця функція часу відома, положення точки M може бути визначене в будь-який момент часу, і в цьому випадку говорять, що закон руху точки заданий векторним способом.

Співвідношення (2.1) називається кінематичним рівнянням руху матеріальної точки у векторній формі.

Відповідно цьому, траєкторією AB руху матеріальної точки M є геометричне місце кінців радіус-вектора \vec{r} або неперервна лінія, яку описує точка під час свого руху відносно даної системи відліку.

2. Координатний спосіб

При розгляданні руху точки M у системі відліку $xOyz$ координати x , y і z змінюються в часі, тобто координати точки M є деякими функціями часу t :

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Якщо ці функції відомі, то положення точки M визначається в будь-який момент часу t , і тоді говорять, що закон руху матеріальної точки заданий координатним способом.

Рівняння (2.2) називають кінематичними рівняннями руху матеріальної точки у координатній формі.

Рівняння (2.2) фактично є рівняннями траєкторії руху матеріальної точки у параметричній формі, в яких роль параметра відіграє час t .

Для знаходження траєкторії руху у звичайній формі необхідно виключити з рівнянь руху час t , тобто здобути залежність між самими координатами. Це можна зробити декількома способами.

Наприклад, підстановкою або піднесенням обох частин рівнянь до квадрату та почленим додаванням (якщо рівняння містять тригонометричні функції).

Слід зауважити, що у випадку руху матеріальної точки в одній площині xOy в рівняннях (2.2) закон зміни координати z вже не потрібний і рівняння (2.2) набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned}x &= x(t), \\ y &= y(t).\end{aligned}\tag{2.3}$$

У випадку прямолінійного руху матеріальної точки досить вибрати одну вісь координат, наприклад Ox , сумістивши її з напрямом руху, і цей рух буде описаний одним рівнянням:

$$x = x(t).\tag{2.4}$$

3. Натуральний спосіб

Якщо розглянути безпосередньо траєкторію точки M (рис. 2.1), то її відстань S по дузі траєкторії від деякого центра O (нуль), що має назву дугової координати, змінюється в часі, тобто є деякою функцією часу t :

$$S = S(t).\tag{2.5}$$

При умові, що ця функція відома, говорять, що закон руху матеріальної точки заданий натуральним способом.

Співвідношення (2.5) називається кінематичним рівнянням руху матеріальної точки у натуральній формі (або законом зміни криволінійної координати).

Відстань S фактично є відстанню рухомої точки M від початку відліку вздовж траєкторії руху.

6.3. Взаємозв'язок між способами завдання руху матеріальної точки

Для переходу від одного способу завдання руху матеріальної точки до іншого необхідно знайти залежності між основними параметрами цих рухів.

Оскільки радіус-вектор \bar{r} може бути розкладений по координатним ортам \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} (єдиничним векторам на відповідних осях x, y, z):

$$\bar{r} = r_x(t)\bar{i} + r_y(t)\bar{j} + r_z(t)\bar{k}, \quad (2.6)$$

і його проєкції $r_x(t)$, $r_y(t)$, $r_z(t)$, як видно з рис. 2.1, дорівнюють координатам точки M , то взаємозв'язок між векторною і координатною формами завдання закону руху має наступний вираз:

$$\bar{r} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}, \quad (2.7)$$

де $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ - поточні значення координат кінця радіус-вектора \bar{r} або координати рухомої точки M .

Існує також взаємозв'язок між координатною і натуральною формами завдання закону руху.

Якщо заданий закон руху в координатній формі:

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t), \end{aligned} \quad (2.8)$$

то ці рівняння розглядають як рівняння руху точки в параметричній формі.

Для визначення рівняння траєкторії з виразів (2.8) виключають час як параметр, а для визначення функції $S = S(t)$ користуються відомими співвідношеннями для елемента дуги кривої:

$$dS = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \quad (2.9)$$

з якого

$$S = \pm \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt, \quad (2.10)$$

знак вибирають у залежності від напрямку додатного і від'ємного відліку дугової координати.

6.4. Швидкість руху точки

Друга кінематична характеристика – швидкість руху матеріальної точки M , показує, як швидко і в якому напрямку змінюється її положення у просторі.

Швидкість – це векторна величина, яка характеризує степінь змінювання переміщення за часом.

Для визначення цієї кінематичної характеристики розглянемо рух матеріальної точки M по довільній траєкторії AB (рис. 2.2).

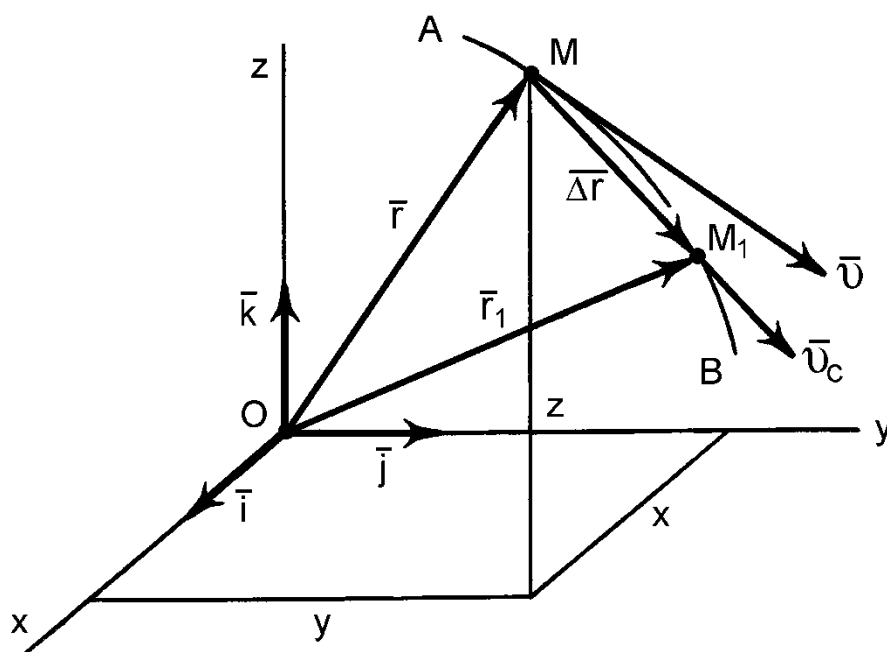


Рис. 2.2

Якщо за деякий проміжок часу Δt точка з положення M переміститься в деяке інше положення M_1 , то вектор $\overline{MM_1}$ називається переміщенням точки за час Δt , а відношення $\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}$ є середньою швидкістю точки за проміжок часу Δt :

$$\bar{v}_c = \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}. \quad (2.11)$$

За напрямком вектор \bar{v}_c буде співпадати з вектором $\overline{MM_1}$, тобто він розташований вздовж хорди MM_1 у бік руху точки M .

Якщо розглянути границю середньої швидкості \bar{v}_c за умовою, що Δt прямує до нуля ($\Delta t \rightarrow 0$), то швидкість точки M у будь-який момент часу t (миттєва швидкість) дорівнює:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{v}_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}. \quad (2.12)$$

Оскільки в граничному випадку (2.12) вектор переміщення $\overline{MM_1}$ спрямований по дотичній до траєкторії точки, то швидкість \bar{v} (м/с) точки M також є вектор, спрямований по дотичній до траєкторії точки у бік її руху (рис. 2.2).

Якщо закон руху точки заданий у векторній формі, тоді за формулою (2.1) отримаємо:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (2.13)$$

Таким чином, при векторному способі завдання руху матеріальної точки її швидкість є першою похідною від радіус-вектора \bar{r} точки за часом t .

Якщо закон руху точки заданий у координатній формі, тоді, враховуючи формули (2.7) і (2.13), а також те, що одиничні вектори $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ постійні за напрямком, одержуємо для швидкості точки наступний вираз:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d \left[x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k} \right]}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}. \quad (2.14)$$

З іншого боку, вектор швидкості \bar{v} (як і будь-який інший вектор) можна у прийнятій системі координат $Oxyz$ представити через його проєкції на осі координат:

$$\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}, \quad (2.15)$$

де v_x, v_y , і v_z - проєкції вектора швидкості на відповідні осі координат.

Із виразів (2.14) і (2.15) бачимо, що є можливість прирівняти коефіцієнти при одиничних векторах $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ і отримати наступні вирази

для проєкцій вектора швидкості на відповідні вісі координат:

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{dx}{dt}, \\v_y &= \frac{dy}{dt}, \\v_z &= \frac{dz}{dt}.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Таким чином, проєкції вектора швидкості матеріальної точки на координатні осі дорівнюють першим похідним за часом від відповідних координат.

Модуль вектора швидкості v матеріальної точки можна знайти через його проєкції на координатні осі x, y, z :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.\tag{2.17}$$

Напрямок вектора швидкості \bar{v} визначається через напрямні косинуси кутів, які цей вектор утворює з відповідними осями координат:

$$\begin{aligned}\cos(\hat{x}, \bar{v}) &= \frac{v_x}{v}, \\ \cos(\hat{y}, \bar{v}) &= \frac{v_y}{v}, \\ \cos(\hat{z}, \bar{v}) &= \frac{v_z}{v}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Знаючи напрямні косинуси, через арккосинуси можна знайти і самі кути.

У випадку руху матеріальної точки в одній площині у виразах (2.16), (2.17) і (2.18) залишається дві координати, а у випадку прямолінійного руху – одна координата.

Якщо закон руху точки заданий у *натуральній формі*, тобто задана траєкторія руху точки (рис. 2.2) і функція відстаней (дугова координата), то проміжку часу Δt відповідає зміна криволінійної координати $S_1 - S = \Delta S$ точки M .

Тоді з виразу (2.5) випливає:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt} = \dot{S}.\tag{2.19}$$

Модуль швидкості матеріальної точки при натуральному способі завдання її руху дорівнює першій похідній за часом від закону руху точки.

Похідна по часу визначає чисельну алгебраїчну величину швидкості. Якщо $v > 0$, то вектор швидкості спрямований у додатному напрямку відліку і точка рухається у бік зростання дугової координати S , а якщо $v < 0$, то протилежно.

6.5. Прискорення руху точки

Третя кінематична характеристика – прискорення руху матеріальної точки M , показує, як швидко і в якому напрямку змінюється її швидкість руху.

Прискорення – це векторна величина, яка характеризує степінь змінювання вектора швидкості за часом.

Тоді для матеріальної точки M при зміні її швидкості на $\Delta \bar{v}$ за проміжок часу Δt (рис. 2.3) їх відношення є середнім прискоренням точки за цей час Δt :

$$\bar{a}_c = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}. \quad (2.20)$$

Вектор \bar{a}_c буде паралельним вектору $\Delta \bar{v}$.

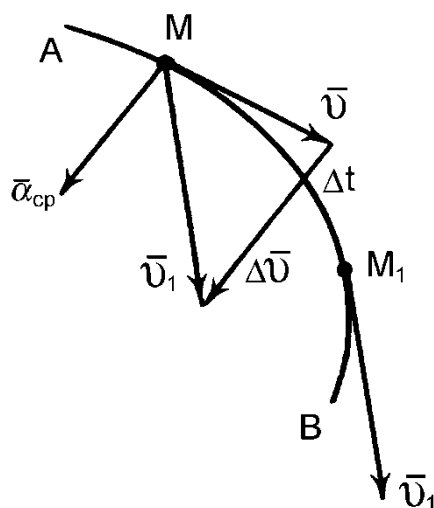


Рис. 2.3

Для визначення миттєвого прискорення матеріальної точки необхідно розглянути нескінченно малий проміжок часу (тобто $\Delta t \rightarrow 0$), а весь вираз (2.20) звести до границі:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt}. \quad (2.21)$$

Тобто, *миттєве прискорення точки дорівнює похідній від вектора швидкості точки за часом.*

Якщо закон руху заданий у векторній формі, то за формулами (2.21) і (2.13) одержимо:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \quad (2.22)$$

Таким чином, при векторному способі завдання руху матеріальної точки її прискорення дорівнює першій похідній від швидкості руху точки за часом, або другій похідній від радіус-вектора точки за часом.

За напрямком вектор \bar{a} буде спрямований у бік угнутості траєкторії точки M , тобто до центра кривизни траєкторії.

Більш детально про напрямок вектора прискорення матеріальної точки буде далі.

Якщо закон руху точки заданий у координатній формі, то з формул (2.7) і (2.22) одержимо для прискорення точки наступний вираз:

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \left[x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k} \right]}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k}. \quad (2.23)$$

З іншого боку, вектор прискорення \bar{a} можна у прийнятій системі координат $Oxyz$ представити через його проєкції на осі координат:

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}. \quad (2.24)$$

Якщо порівняти (2.23) і (2.24), то можна написати такі співвідношення:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{d^2x}{dt^2}, \\ a_y &= \frac{d^2y}{dt^2}, \\ a_z &= \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Таким чином, проєкції вектора прискорення матеріальної точки на осі координат дорівнюють другим похідним за часом від відповідних

координат.

Модуль вектора \bar{a} можна знайти через його проєкції на осі x, y, z :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.26)$$

Напрямок вектора \bar{a} визначається через напрямні косинуси:

$$\begin{aligned} \cos(\hat{x}, \bar{a}) &= \frac{a_x}{a}, \\ \cos(\hat{y}, \bar{a}) &= \frac{a_y}{a}, \\ \cos(\hat{z}, \bar{a}) &= \frac{a_z}{a}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Використовуючи значення напрямних косинусів, через арккосинуси знаходять самі кути.

У випадку руху матеріальної точки в одній площині у виразах (2.25), (2.26) і (2.27) залишається дві координати, а у випадку прямолінійного руху – одна координата.

Якщо закон руху точки заданий у *натуральній формі*, тобто задані траєкторія і закон руху S (рис. 2.4), то повне прискорення точки виражається геометричною сумою нормального і дотичного прискорень:

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \quad (2.28)$$

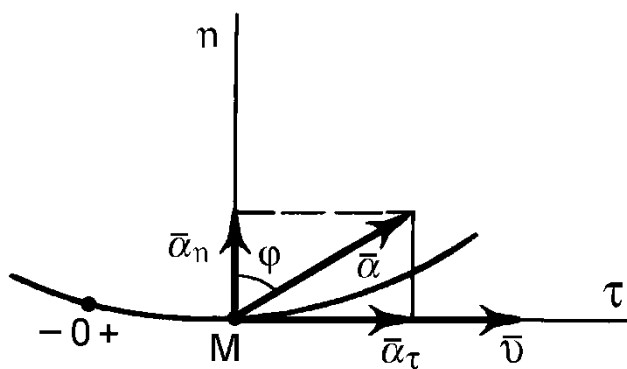


Рис. 2.4

Дотичне прискорення \bar{a}_τ спрямоване по дотичній $\bar{\tau}$ до траєкторії руху точки і характеризує зміну швидкості за величиною в одиницю часу t :

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}. \quad (2.29)$$

Дотичне прискорення матеріальної точки дорівнює першій похідній від функції швидкості за часом або другій похідній від закону руху.

Нормальне прискорення a_n спрямоване по нормалі \bar{n} до траєкторії у бік вгнутості останньої і характеризує зміну швидкості за напрямком в одиницю часу t :

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (2.30)$$

Нормальне прискорення матеріальної точки дорівнює квадрату швидкості, поділеному на радіус кривизни траєкторії у даній точці.

Вектор нормального прискорення \bar{a}_n завжди спрямований вздовж нормалі до центра кривизни в даній точці і його величина завжди додатна, тому що містить у чисельнику вираз v^2 .

Дотичне прискорення a_{τ} може бути як додатним (у випадку прискореного руху), так і від'ємним (у випадку сповільненого руху).

Вектор повного прискорення \bar{a} визначається геометричним додаванням векторів \bar{a}_{τ} та \bar{a}_n і є діагоналлю прямокутника побудованого на вказаних векторах, як на сторонах (рис. 2.4).

Модуль повного прискорення a дорівнює:

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}.$$

Кут φ між вектором \bar{a} і нормаллю n визначається за тригонометричним виразом:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_{\tau}}{a_n}.$$

6.6. Деякі випадки руху матеріальної точки

Розглянемо окремі випадки руху матеріальної точки від наявності дотичної \bar{a}_{τ} і нормальної \bar{a}_n складових прискорень цього руху.

1. Прямолінійний рух

Радіус кривизни траєкторії, якою є пряма лінія, дорівнює $\rho = \infty$,

тому:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0,$$
$$a = a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Тобто, швидкість v руху матеріальної точки змінюється лише по величині за модулем.

Якщо такий рух є ще і рівномірним, ($v = \text{const}$), то прискорення матеріальної точки будуть дорівнювати:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0,$$
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0,$$
$$a = 0.$$

2. Рівномірний криволінійний рух

У даному випадку модуль швидкості $v = \text{const}$, а радіус кривизни траєкторії $\rho \neq \infty$, тому:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0,$$
$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Тобто вектор швидкості \vec{v} , змінюється лише за напрямком.

3. Рівнозмінний рух

У випадку, коли прискорення a_τ є величиною сталою, рух точки буде рівнозмінним (тобто, за рівні проміжки часу швидкість матеріальної точки буде змінюватись на одну і ту ж величину).

Оскільки $a_\tau = \frac{dv}{dt} = \text{const}$, використаємо це для визначення швидкості руху точки.

$$dv = a_\tau \cdot dt.$$

Інтегруємо ліву і праву частини цього виразу в межах від

початкового значення швидкості v_0 при $t = 0$ до кінцевого значення v на момент часу t :

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a_\tau dt,$$

звідки

$$v - v_0 = a_\tau t,$$

або

$$v = v_0 + a_\tau t,$$

де v_0 - початкова швидкість руху матеріальної точки.

Використаємо далі вираз $v = \frac{dS}{dt}$, з якого маємо можливість визначити dS . Переміщення буде дорівнювати:

$$dS = v dt.$$

Замість v підставимо в останній вираз отримане його значення:

$$dS = v_0 dt + a_\tau t dt.$$

Як і у попередньому випадку, знайдемо переміщення S , взявши визначені інтеграли від лівої і правої частин останнього виразу в межах від початкового значення S_0 переміщення точки до кінцевого S :

$$\int_{S_0}^S dS = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t a_\tau t dt,$$

звідки

$$S - S_0 = v_0 t + a_\tau \frac{t^2}{2}.$$

Остаточно останній вираз можна переписати так

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2},$$

де S_0 - початкове переміщення точки.

Таким чином, при рівнозмінному русі матеріальної точки її швидкість та переміщення визначаються за допомогою знайдених виразів.

Слід зауважити, що знаки у правих частинах цих формул (перед a_τ)

визначають характер рівнозмінного руху. Так, якщо вони додатні, то рух точки є рівноприскореним, а якщо від'ємні, то – рівносповільненим.

6.7. Приклади визначення кінематичних параметрів матеріальної точки

Приклад

Рух матеріальної точки здійснюється у площині xOy і заданий рівняннями: $x = 2t$, $y = 12t^2$, м, t - в секундах. Визначити траєкторію руху точки.

Розв'язання

Траєкторію руху матеріальної точки можна визначити двома способами:

а) задати різні моменти часу та зобразити координати точки x , y на графіку;

б) виключити час t із заданих рівнянь руху. Так, з першого рівняння час буде дорівнювати $t = \frac{x}{2}$. Тоді після підстановки часу у друге рівняння, матимемо:

$$y = \frac{12x^2}{4} = 3x^2.$$

Таким чином, траєкторією руху точки є парабола з вершиною, яка розташована в початку координат, і віссю симетрії Oy .

Приклад

Палець кривошипного двигуна рухається відповідно заданих рівнянь:

$$x = b \sin \omega t,$$

$$y = b \cos \omega t,$$

де x і y - у метрах; t - у секундах; b і ω - сталі величини.

Визначити траєкторію руху, швидкість та прискорення пальця.

Розв'язання

Для визначення рівняння траєкторії руху пальця кривошипа треба виключити з заданих рівнянь руху параметр часу t . Спочатку визначимо з заданих рівнянь тригонометричні функції

$$\sin \omega t = \frac{x}{b},$$

$$\cos \omega t = \frac{y}{b}.$$

Оскільки тригонометричні функції є функціями одного аргументу, то піднесемо до квадрату ліві та праві частини цих виразів і додамо їх почленно:

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = \left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Ліва частина останнього виразу дорівнює одиниці, оскільки $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$, тоді

$$\frac{x^2 + y^2}{b^2} = 1,$$

або

$$x^2 + y^2 = b^2.$$

Таким чином, з останнього виразу бачимо, що траєкторією руху пальця кривошипа є коло радіуса b з центром у початку координат.

Для визначення швидкості руху знайдемо спочатку проекції швидкості руху пальця на координатні осі:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = b\omega \cdot \cos \omega t,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -b\omega \cdot \sin \omega t.$$

Модуль швидкості руху буде дорівнювати

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(b\omega \cdot \cos \omega t)^2 + (-b\omega \cdot \sin \omega t)^2} = b\omega.$$

Таким чином, з останнього виразу бачимо, що палець рухається зі сталою швидкістю, яка дорівнює $b\omega$.

Знайдемо прискорення пальця кривошипу. Його також визначимо через проекції на осі координат.

Візьмемо другі похідні від заданих координат руху:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = -b\omega^2 \cdot \sin \omega t,$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} = -b\omega^2 \cdot \cos \omega t.$$

Повне прискорення буде дорівнювати:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-b\omega^2 \cdot \sin \omega t)^2 + (-b\omega^2 \cdot \cos \omega t)^2} = b\omega^2.$$

Оскільки палець кривошипу рухається по колу, тобто по криволінійній траєкторії руху сталого радіуса b , то його прискорення можна було б визначити, якщо використати вирази, що описують натуральний спосіб задання руху матеріальної точки.

Дотичне прискорення пальця кривошипу буде дорівнювати нулю, оскільки швидкість $b\omega = const$.

Тобто:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(b\omega)}{dt} = 0.$$

Нормальне прискорення визначимо так:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(b\omega)^2}{b} = b\omega^2.$$

Оскільки дотичного прискорення немає, то повне прискорення дорівнює нормальному:

$$a = a_n = b\omega^2.$$

Таким чином, як бачимо, прискорення пальця кривошипу, які визначені різними способами, співпадають.

Приклад

Точка на ободі барабана механізму в період розгону рухається згідно рівняння $S = 0,1 \cdot t^3$ (S - у метрах, t - у секундах). Радіус барабана дорівнює $R = 0,5$ м. Визначити дотичне і нормальне прискорення точки в момент, коли її швидкість дорівнює $v = 30$ м/с.

Розв'язання

Рівняння руху точки задане натуральним способом, а тому швидкість можна визначити так:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(0,1 \cdot t^3)}{dt} = 0,3 \cdot t^2.$$

По заданому значенню швидкості точки $v = 30$ м/с знайдемо час. Підставимо значення цієї швидкості в отриманий вираз і знайдемо t :

$$30 = 0,3 \cdot t^2,$$

звідки

$$t = \sqrt{\frac{30}{0,3}} = 10 \text{ с}.$$

Дотичне прискорення точки буде дорівнювати:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(0,3 \cdot t^2)}{dt} = 0,6t,$$

або через 10 сек

$$a_\tau(10) = 0,6 \cdot 10 = 60 \text{ м/с}^2.$$

Нормальне прискорення визначимо так:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(0,3 \cdot t^2)^2}{0,5} = \frac{30^2}{0,5} = 1800 \text{ м/с}^2.$$

Знак "+" перед дотичним прискоренням a_τ означає, що барабан зернозбирального комбайна перебуває у стані розгону, що відповідає умові задачі.

Запитання для самоконтролю

1. Що вивчає кінематика?
2. У чому полягають основні задачі кінематики?
3. Які існують способи завдання руху точки?
4. Що таке закон руху матеріальної точки?
5. Яка залежність між радіус-вектором точки та її координатами?
6. Як спрямовується вектор швидкості точки?

-
7. В яких одиницях вимірюються координати, швидкості та прискорення точки?
 8. Як визначаються положення, швидкість і прискорення точки при векторному способі завдання руху?
 9. Як визначаються положення, швидкість і прискорення точки при координатному способі завдання руху?
 10. Які потрібні умови для завдання руху натуральним способом?
 11. Як визначається швидкість точки за натуральним описом руху?
 12. Яким чином характеризує рух дотичне прискорення точки?
 13. Що характеризує нормальне прискорення точки?

РОЗДІЛ 7. КІНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА. НАЙПРОСТІШІ ВИДИ РУХУ

7.1. Поступальний рух твердого тіла

В задачах кінематики твердого тіла визначають як кінематичні параметри тіла в цілому, так і кінематичні параметри окремих його точок.

Найпростішими видами руху твердого тіла є поступальний і обертальний рухи.

Розглянемо спочатку поступальний рух.

Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому довільна пряма, що проведена в цьому тілі, під час руху залишається завжди паралельною самій собі.

Прикладами поступального руху твердого тіла може бути: рух шарнірного паралелограма O_1ABO_2 (рис. 2.5, а), який здійснює коловий поступальний рух; поступальний рух штанги кулачкового механізму (рис. 2.5, б), що здійснює зворотно-поступальний рух; рух педалі велосипеда відносно рами, поршня двигуна відносно циліндра, рух кузова автомобіля при прямолінійному русі і т.п.

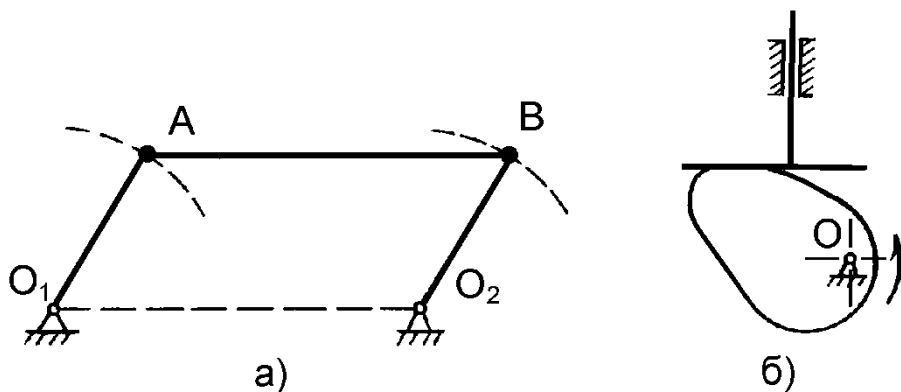


Рис. 2.5

Таким чином, траєкторією руху точок тіла при поступальному русі можуть бути як пряма лінія, так і будь-які криві. Термін “поступальний рух” стосується тільки тіла, а не точки.

При поступальному русі тіла всі його точки описують однакові траєкторії і мають в кожену дану мить часу однакові за модулем і паралельно напрямлені швидкості та прискорення”.

Розглянемо тіло, що рухається поступально і за деякій проміжок часу перейшло з одного положення в друге (рис. 2.6).

Довільно проведена в тілі пряма AB при цьому залишиться паралельною самій собі і займе нове положення $A'B'$. Проведемо з довільної точки O радіуси – вектори \bar{r}_A, \bar{r}_B точок тіла A і B . Із трикутника OAB , що утворено на рис. 2.6, маємо:

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \bar{r}_{AB}. \quad (2.31)$$

Згідно визначення поступального руху тіла вектор \bar{r}_{AB} , який з'єднує точки A і B і переміщується паралельно самому собі, є сталим вектором, тому що точки A і B належать твердому тілу:

$$\bar{r}_{AB} = \overline{AB} = const.$$

Тобто, при поступальному русі тіла радіуси – вектори \bar{r}_A і \bar{r}_B довільних точок A і B , змінюючись за напрямком, будуть відрізнятися згідно (2.31) на один і той же самий сталий вектор \bar{r}_{AB} .

Отже, траєкторію руху точки B можна одержати, змістивши траєкторію точки A у напрямку вектора \bar{r}_{AB} на відстань AB , і тому ці траєкторії будуть тотожними.

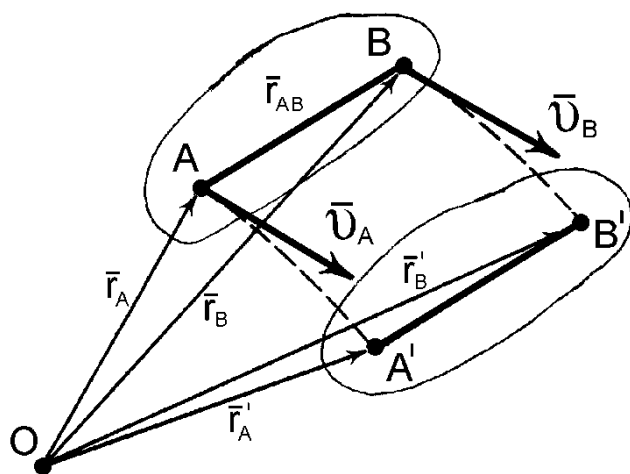


Рис. 2.6

Визначимо швидкості точок A і B тіла. Для цього диференціюємо за часом вираз (2.31.):

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d(\bar{r}_{AB})}{dt}.$$

Оскільки $\bar{r}_{AB} = const$, друга складова правої частини цього виразу буде дорівнювати нулю:

$$\frac{d(\bar{r}_{AB})}{dt} = 0,$$

і остаточно маємо:

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt},$$

а це є швидкості точок A і B :

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A. \quad (2.32)$$

Таким чином, швидкості точок A і B тіла, що рухається поступально, рівні за величиною і мають однаковий напрямок, оскільки вони розташовані на дотичних до однакових траєкторій руху і спрямовані в один і той же бік.

Визначимо прискорення точок A і B . Після другого диференціювання за часом виразу (2.31) маємо:

$$\frac{d^2 r_B}{dt^2} = \frac{d^2 r_A}{dt^2} + \frac{d^2 r_{AB}}{dt^2}.$$

Як і у попередньому випадку маємо $\frac{d^2(\bar{r}_{AB})}{dt^2} = 0$, оскільки

$$\bar{r}_{AB} = \text{const.}$$

Тоді остаточно:

$$\frac{d^2 r_B}{dt^2} = \frac{d^2 r_A}{dt^2},$$

або

$$\frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt},$$

і

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A. \quad (2.33)$$

Таким чином, поступальний рух тіла цілком визначається рухом будь-якої однієї його точки.

Остаточно можна зробити висновок, що визначення поступального руху твердого тіла зводиться до визначення руху тільки однієї його точки, оскільки всі інші точки тіла рухаються ідентично.

Отже більшість задач з кінематики поступального руху тіла вирішується методами кінематики матеріальної точки.

7.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі. Закон обертального руху

Обертальним рухом твердого тіла називається такий рух, при якому всі точки тіла рухаються по колах, центри яких лежать на одній прямій, яка називається віссю обертання.

Вісь обертання може знаходитись, як всередині самого тіла, так і бути зовні його.

Для здійснення обертального руху твердого тіла, необхідно закріпити нерухомо будь-які дві його точки, наприклад, у підшипниках, тоді пряма, яка проходить крізь ці точки і буде віссю обертання.

Розглянемо тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі z (рис. 2.7).

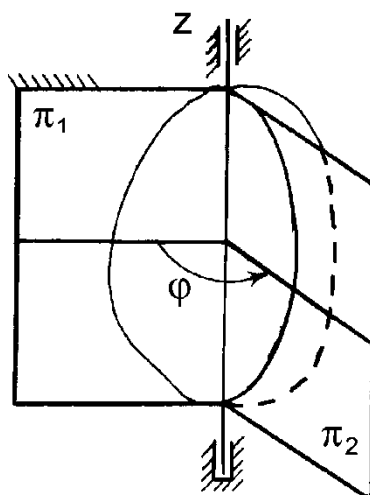


Рис. 2.7

Проведемо через вісь обертання z дві півплощини, одна з яких π_1 є нерухомою, а друга півплощина π_2 незмінно поєднана з тілом і обертається разом з ним. Тоді положення тіла у будь-який момент часу t однозначно визначає кут φ між півплощинами π_1 і π_2 , який називається кутом повороту тіла φ .

При обертанні тіла навколо нерухомої осі z кут повороту φ є неперервною і однозначною функцією часу:

$$\varphi = \varphi(t). \quad (2.34)$$

Вираз (2.34) називається законом обертального руху тіла або кінематичним рівнянням обертального руху.

Кут повороту φ тіла навколо нерухомої осі має знак, який залежить від напрямку обертання і визначається за наступним правилом.

Кут повороту φ рахується додатним ($\varphi > 0$), якщо дивитися з додатного кінця осі z і бачити обертання рухомої площини π_2 у напрямку проти руху годинникової стрілки. І навпаки, рахується від'ємним ($\varphi < 0$), коли цей напрямок обертання - за годинниковою стрілкою.

Кут повороту тіла вимірюється у радіанах або обертах.

Так як один оберт складає 2π рад, тому зв'язок між кутом повороту φ , що вимірюється у радіанах, і кутом повороту N , що вимірюється в обертах, буде таким:

$$\varphi = 2\pi N,$$

де N - кількість обертів тіла.

7.3. Кутова швидкість і кутове прискорення тіла, що обертається

Кутова швидкість ω і кутове прискорення ε тіла, як і його кут повороту φ , являються кінематичними характеристиками його обертального руху. Визначимо ці кінематичні характеристики.

Кутова швидкість

Кутова швидкість ω характеризує зміну кута повороту тіла φ за одиницю часу, тобто показує, як швидко тіло обертається.

Якщо за деякій проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ тіло здійснило поворот на кут $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, то середня кутова швидкість ω_c тіла за цей проміжок часу дорівнює відношенню:

$$\omega_c = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Для знаходження кутової швидкості ω тіла у будь-який момент часу t необхідно середню кутову швидкість ω_c представити у вигляді границі, до якої наближається його значення, коли проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (2.35)$$

Таким чином, кутова швидкість тіла у будь-який момент часу дорівнює першій похідній від кута повороту за часом.

Знак кутової швидкості ω визначає напрямок обертання тіла і залежить від знака кута повороту φ .

Якщо $\omega > 0$, то в даний момент часу тіло обертається в додатному напрямку, і, навпаки, якщо $\omega < 0$, то тіло обертається у від'ємному напрямку.

Одиниця виміру кутової швидкості ω : $\left[\frac{\text{рад}}{c} \right], \left[\frac{1}{c} \right], \left[c^{-1} \right]$.

Кутове прискорення

Кутове прискорення ε тіла, що обертається навколо нерухомої осі характеризує зміну кутової швидкості ω за одиницю часу.

Якщо за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t$ кутова швидкість змінюється на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, то середнє кутове прискорення ε_c тіла за цей проміжок часу буде дорівнювати:

$$\varepsilon_c = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Для знаходження кутового прискорення ε тіла у будь-який момент часу t необхідно ε_c представити у вигляді границі, до якої наближається його значення, коли проміжок часу Δt прямує до нуля:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t},$$

або

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (2.36)$$

Таким чином, кутове прискорення тіла у будь-який момент часу чисельно дорівнює першій похідній від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту за часом.

Одиниця виміру кутового прискорення ε : $\left[\frac{\text{рад}}{c^2} \right], \left[\frac{1}{c^2} \right], \left[c^{-2} \right]$.

Слід відмітити, що у випадку, коли модуль кутової швидкості ω з часом зростає ($\varepsilon > 0$), то обертання тіла буде прискореним, а коли зменшується ($\varepsilon < 0$), то обертальний рух буде сповільненим.

Також зауважимо, що обертання тіла навколо осі буде прискореним, якщо знаки перед кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε будуть однаковими, і навпаки – сповільненим, якщо знаки перед вказаними величинами будуть різними.

7.4. Деякі випадки обертання тіла навколо нерухомої осі

Розглянемо деякі випадки обертального руху в залежності від кінематичних характеристик тіла при обертанні навколо нерухомої осі.

1. Рівномірний обертальний рух

Якщо кутова швидкість тіла залишається під час його руху сталою, то обертання називається рівномірним. При цьому кутова швидкість $\omega = const$, а $\varepsilon = 0$.

Тоді кут повороту тіла визначається за формулою:

$$\varphi = \omega \cdot t, \quad (2.37)$$

або кутова швидкість буде дорівнювати

$$\omega = \frac{\varphi}{t}.$$

У техніці швидкість рівномірного обертання тіл найчастіше визначають частотою обертання n , яка вимірюється у $\left[\frac{\text{об.}}{\text{хв.}} \right]$.

Відомо, що при одному оберті тіло повертається на кут 2π , а при n обертах – на кут $2\pi n$, причому цей поворот (кут $2\pi n$) відбувається за одну хвилину, або 60 сек. Тоді зв'язок між кутовою швидкістю ω і частотою n його обертання можна виразити наступною залежністю:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \approx 0,1 n.$$

2. Рівнозмінний обертальний рух

У такому випадку обертання кутове прискорення тіла $\varepsilon = const$, тобто його кутова швидкість ω за рівні проміжки часу змінюється на одну і ту ж величину.

Оскільки $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = const$, то запишемо цей вираз наступним чином:

$$d\omega = \varepsilon \cdot dt. \quad (2.38)$$

Для знаходження кутової швидкості ω візьмемо визначені інтеграли від лівої та правої частин виразу (2.38) у верхніх та нижніх межах зміни величин ω і t :

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \varepsilon dt.$$

Після інтегрування отримаємо

$$\omega - \omega_0 = \varepsilon t,$$

або

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (2.39)$$

де ω_0 - початкова кутова швидкість тіла.

Далі використаємо вираз (2.35), згідно якого $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Маємо можливість з нього визначити кут φ .

Розділимо змінні:

$$d\varphi = \omega \cdot dt. \quad (2.40)$$

Замість ω підставимо у вираз (2.40) його значення (2.39):

$$d\varphi = \omega_0 \cdot dt + \varepsilon t \cdot dt. \quad (2.41)$$

Як і в попередньому випадку, знайдемо кут повороту тіла φ , взявши визначені інтеграли від лівої і правої частин виразу (2.41) у верхніх та нижніх межах зміни величин φ і t :

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega_0 dt + \int_0^t \varepsilon t dt. \quad (2.42)$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\varphi - \varphi_0 = \omega_0 t + \varepsilon \frac{t^2}{2}.$$

Остаточно матимемо:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (2.43)$$

де φ_0 - початковий кут повороту тіла.

Таким чином, при рівнозмінному обертальному русі твердого тіла кутова швидкість ω та кут повороту φ визначаються за допомогою формул (2.39) та (2.43).

Слід зауважити, що знаки у правих частинах цих формул (перед ε)

показують характер цього руху. Якщо вони додатні, то обертальний рух тіла рівноприскорений, а якщо від'ємні, то рівносповільнений.

Приклад

Привідний вал механічного пристрою починає обертатись із стану спокою з кутовим прискоренням $\varepsilon = 7,5 \text{ рад/с}^2$. Визначити кутову швидкість вала у кінці 15 секунди. Визначити також, скільки обертів зробить вал за ці 15 секунд.

Розв'язання

За умовою прикладу кутове прискорення вала є стала додатна величина, а тому його обертальний рух буде рівноприскореним.

Для визначення кутової швидкості ω і кута повороту φ вала скористуємось виразами (2.39) і (2.43) відповідно:

$$\omega = \omega_o + \varepsilon t,$$

$$\varphi = \varphi_o + \omega_o t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Слід зауважити, що, оскільки вал починає обертатись зі стану спокою, то його початкова кутова швидкість, як і початковий кут повороту, дорівнює нулю:

$$\omega_o = 0,$$

$$\varphi_o = 0.$$

Підставимо далі у вираз для кутової швидкості значення кутового прискорення ε і часу $t_1 = 15 \text{ с}$. Тоді кутова швидкість ω після п'ятнадцятої секунди буде дорівнювати:

$$\omega = \varepsilon t_1 = 7,5 \cdot 15 = 112,5 \text{ рад/с}.$$

Підставимо у вираз для кута повороту φ вала відомі величини і отримаємо його значення за 15 секунд:

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{7,5 \cdot 15^2}{2} = 843,75 \text{ рад}.$$

Для знаходження загального числа обертів вала скористаємось виразом:

$$\varphi = N \cdot 2\pi.$$

Звідси число обертів N вала за 15 с дорівнює:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{843,75}{6,28} = 134 \text{ об.}$$

7.5. Кінематичні характеристики точок тіла, що обертається навколо нерухомої осі

Крім загальних кінематичних характеристик тіла, що обертається навколо нерухомої осі – кутової швидкості ω та кутового прискорення ε – розглянемо кінематичні характеристики окремих його точок.

До таких характеристик відносяться лінійні або колові швидкості точок та лінійні або колові прискорення точок тіла.

Лінійна швидкість

Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі z (рис. 2.8), то будь-яка його точка M , що знаходиться на відстані R від осі обертання z , описує коло радіуса R . Площина цього кола перпендикулярна осі z обертання, а центр C розташований на самій осі z .

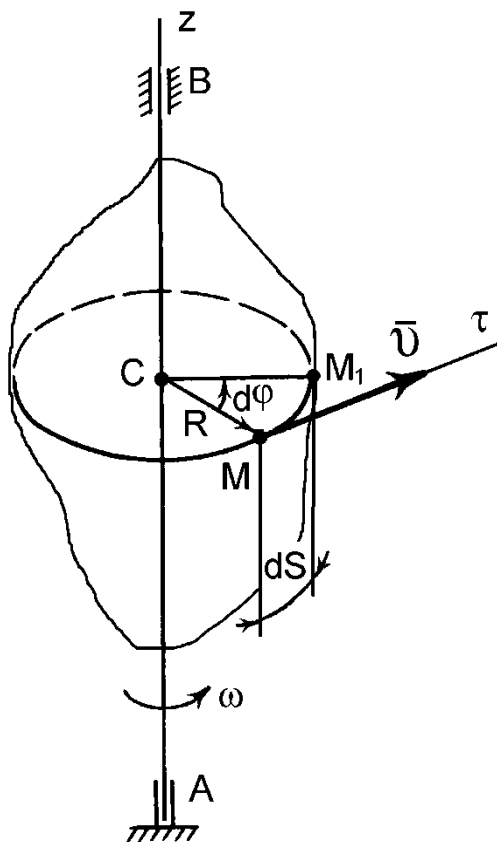


Рис. 2.8

При повороті тіла на кут $d\varphi$ за проміжок часу dt точка M переміститься в положення M_1 на величину елементарної дуги dS кола:

$$dS = R d\varphi.$$

Тоді лінійна швидкість точки M за виразом (2.19) буде дорівнювати:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{d(R d\varphi)}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega,$$

тобто

$$v = \omega R. \quad (2.44)$$

Ця швидкість називається лінійною або коловою швидкістю точки, тіла, що обертається навколо нерухомої осі.

Таким чином, лінійна швидкість точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, чисельно дорівнює добутку кутової швидкості тіла на радіус обертання (відстань від даної точки до осі обертання).

Напрямок вектора лінійної швидкості \vec{v} – по дотичній $\vec{\tau}$ до кола, що описує точка M (перпендикулярно радіусу обертання) у бік обертання тіла.

Оскільки для всіх точок тіла у даний момент часу кутова швидкість ω однакова, то їх лінійні швидкості пропорційні відстаням точок до осі обертання.

Тоді для діаметра KL тіла, що обертається навколо осі, перпендикулярної до площі рисунка, буде мати місце лінійний характер розподілу швидкостей точок (рис. 2.9).

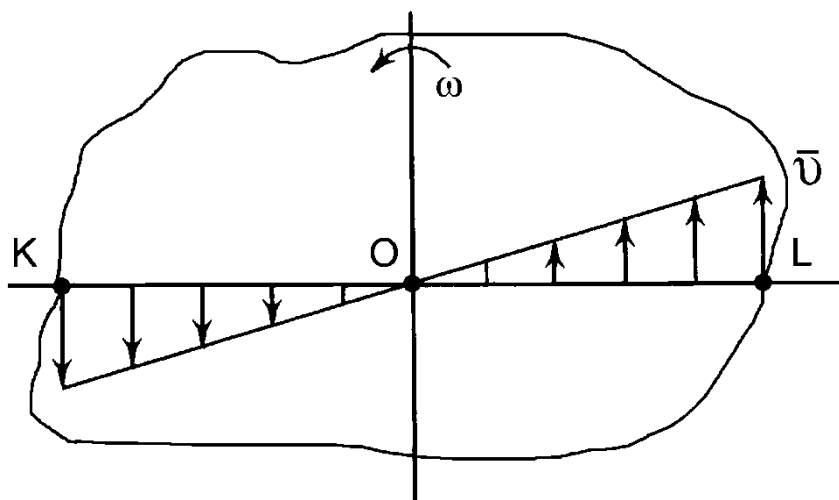


Рис. 2.9

Лінійне прискорення

Лінійне прискорення точки M тіла, яке обертається навколо нерухомої осі (див. рис. 2.9), визначається рівняннями (2.29) і (2.30):

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt},$$
$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Із урахуванням виразу (2.44) та того, що $\rho = R$, отримаємо значення обертального, дотичного прискорення

$$a_{\tau} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon, \quad (2.45)$$

та доцентрового, нормального прискорення

$$a_n = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2. \quad (2.46)$$

При цьому дотичне прискорення \bar{a}_{τ} завжди спрямоване по дотичній до траєкторії руху точки M (перпендикулярно радіусу R). Якщо обертання тіла прискорене, то напрямок \bar{a}_{τ} буде у бік вектора швидкості \bar{v} , якщо сповільнене – то проти.

Нормальне прискорення \bar{a}_n завжди додатне і його вектор спрямований до центра кола, по якому рухається точка M .

Повне прискорення a точки M буде дорівнювати геометричній сумі складових дотичного \bar{a}_{τ} і нормального \bar{a}_n прискорень.

За модулем це прискорення дорівнює:

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = \sqrt{R^2\varepsilon^2 + R^2\omega^4} \quad (2.47)$$

або

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.48)$$

Напрямок вектора повного прискорення \bar{a} точки M тіла із заданими кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε при її русі в площині рисунка (рис. 2.10), залежить від напрямку векторів дотичного \bar{a}_{τ} і нормального \bar{a}_n прискорень.

Тоді кут φ відхилення вектора повного прискорення \bar{a} від нормалі n до траєкторії руху точки визначається як:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{|R\varepsilon|}{R\omega^2} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}, \quad (2.49)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

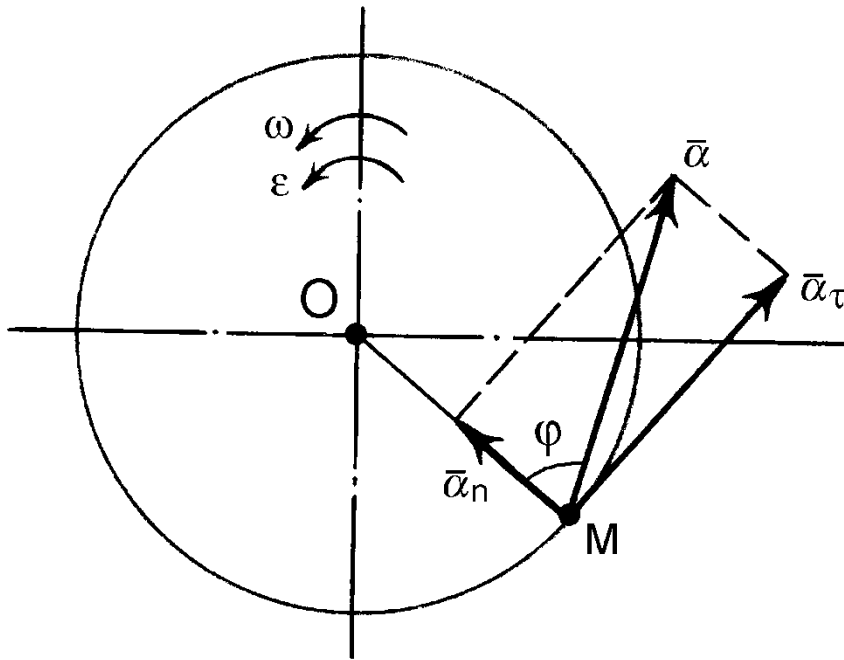


Рис. 2.10

Приклад

Вантаж P масою $m = 100 \text{ кг}$ із стану спокою починає опускатись на тросі за допомогою механічного пристрою (рис. 2.11) згідно закону $S = 0,8t^2$, де $S(\text{м})$ - відстань, яку пройшов вантаж від початкового положення, $t(\text{с})$ - час руху. В момент часу, коли вантаж пройде заданий шлях $S_1 = 0,2 \text{ м}$, визначити його швидкість і прискорення, а також кутову швидкість і кутове прискорення валів барабана і приводу та швидкість і прискорення точки M . Трос прийняти таким, що не розтягується.

Розв'язання

За умовою вантаж P рухається поступально.

Рівняння швидкості руху вантажу має вигляд:

$$V_P = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(0,8t^2) = 1,6t.$$

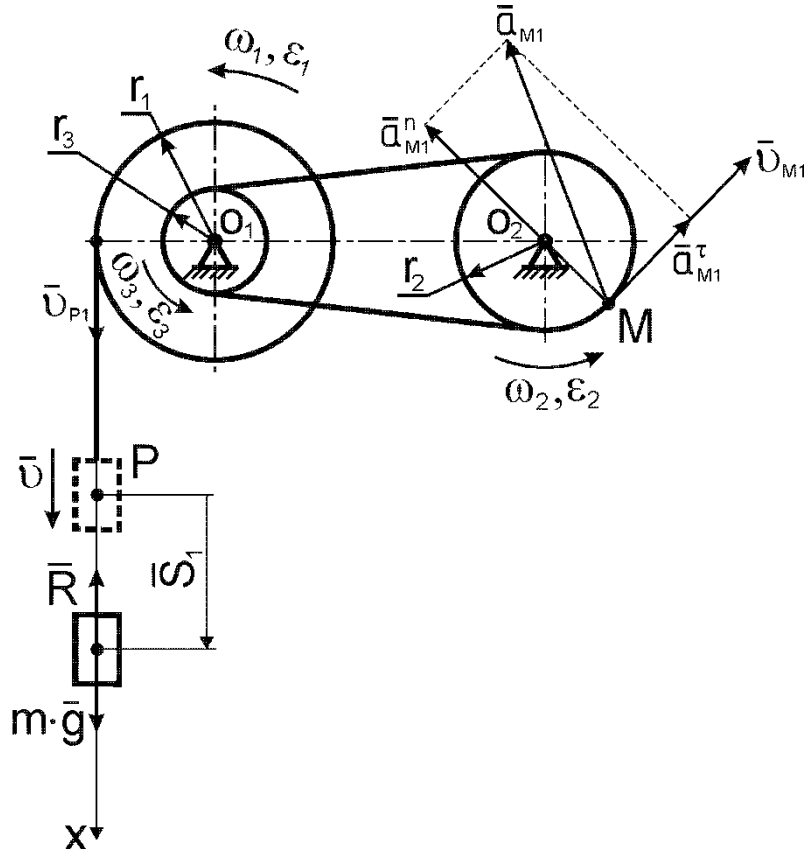


Рис. 2.11

Визначимо час, коли вантаж пройде шлях $S_1 = 0,2 \text{ м}$:

$$S_1 = 0,8t_1^2;$$

$$0,2 = 0,8t_1^2;$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{0,2}{0,8}} = \sqrt{0,25} = 0,5 \text{ с}.$$

В момент часу $t_1 = 0,5 \text{ с}$ швидкість вантажу буде дорівнювати

$$V_{P1} = 1,6t_1 = 1,6 \cdot 0,5 = 0,8 \text{ м/с}.$$

Прискорення вантажу P :

$$a_P = \frac{dV_P}{dt} = \frac{d}{dt}(1,6t) = 1,6 \text{ м/с}^2.$$

В даному випадку прискорення вантажу не залежить від часу, тобто

$$a_{P1} = 1,6 \text{ м/с}^2 = \text{const.}$$

При опусканні вантажу барабан 1 механічного пристрою буде обертатися із кутовою швидкістю ω_1 , яка визначається:

$$\omega_1 = \frac{V_{P1}}{r_1} = \frac{0,8}{0,32} = 2,5 \text{ рад/с},$$

де V_{P1} – колова швидкість точки на ободі барабана (ця швидкість дорівнює швидкості вантажу P , так як за умовою задачі трос не розтягується), $r_1 = 0,32 \text{ м}$ – радіус барабана 1.

Таку саму кутову швидкість буде мати колесо радіусом r_3 , оскільки воно жорстко з'єднано з барабаном і знаходиться з ним на одному валу:

$$\omega_3 = \omega_1 = 2,5 \text{ рад/с},$$

Аналогічно можна визначити кутові прискорення барабана і колеса:

$$\varepsilon_1 = \frac{a_{P1}}{r_1} = \frac{1,6}{0,32} = 5 \text{ рад/с}^2,$$
$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 = 5 \text{ рад/с}^2,$$

Передаточне відношення при передачі обертального руху в механічному пристрої від ведучого колеса 2 приводу до веденого колеса 3 визначається як:

$$i = \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{0,12}{0,24} = 0,5$$

Звідки можна знайти кутову швидкість і кутове прискорення вала приводу, на якому закріплено колесо 2:

$$\omega_{2np} = \omega_3 \cdot i = 2,5 \cdot 0,5 = 1,25 \text{ рад/с}$$
$$\varepsilon_{2np} = \varepsilon_3 \cdot i = 5 \cdot 0,5 = 2,5 \text{ рад/с}^2$$

В момент часу $t_1 = 0,5 \text{ с}$ визначимо колову швидкість точки M , яка знаходиться на ободі колеса 2:

$$V_{M1} = \omega_{2np} \cdot r_2 = 2,5 \cdot 0,24 = 0,6 \text{ м/с},$$

де $r_2 = 0,24 \text{ м}$ – радіус кола, по якому обертається точка M .

Вектор швидкості \vec{V}_{M1} спрямований по дотичній до колеса радіусом r_2 у бік його обертання.

Визначимо також для $t_1 = 0,5 \text{ с}$ прискорення точки M , знайшовши

його тангенціальну і нормальну складові.

Тангенціальна складова прискорення точки M буде дорівнювати:

$$a_{M1}^{\tau} = \varepsilon_{2np} \cdot r_2 = 2,5 \cdot 0,24 = 0,6 \text{ м/с}^2.$$

Вектор прискорення \bar{a}_{M1}^{τ} спрямований по дотичній до колеса радіусом r_2 у бік вектора швидкості \bar{V}_{M1} .

Нормальна складова прискорення точки M дорівнює:

$$a_{M1}^n = \omega_{2np}^2 \cdot r_2 = 1,25^2 \cdot 0,24 = 0,375 \text{ м/с}^2.$$

Вектор прискорення \bar{a}_{M1}^n спрямований по радіусу r_2 до центра колеса 2.

Повне прискорення точки M :

$$a_{M1} = \sqrt{(a_{M1}^{\tau})^2 + (a_{M1}^n)^2} = \sqrt{0,6^2 + 0,375^2} = 0,71 \text{ м/с}^2.$$

Напрямок вектора повного прискорення \bar{a}_{M1} визначається із геометричної суми його складових:

$$\bar{a}_{M1} = \bar{a}_{M1}^{\tau} + \bar{a}_{M1}^n.$$

7.6. Вектори кутової швидкості і кутового прискорення тіла при його обертанні

Кутову швидкість ω і кутове прискорення ε обертового тіла можна уявити як вектори.

Вектор кутової швидкості обертового тіла розташований на осі обертання і спрямований так, що, дивлячись з його кінця, можна бачити обертання тіла проти напрямку руху годинникової стрілки.

Це так зване "правило свердлика".

Вектор кутового прискорення обертового тіла розташований на осі обертання і спрямований у той же бік, що і вектор кутової швидкості якщо обертання прискорене, і в напрямку, яке протилежне напрямку вектора кутової швидкості, якщо обертання сповільнене.

Якщо розглядати різні випадки обертання твердого тіла навколо нерухомої осі та різне їх спрямування, то напрямки векторів $\bar{\omega}$ і $\bar{\varepsilon}$ будуть такими, як це показано на (рис. 2.12).

Як бачимо, можуть бути два варіанти, коли вектори кутової швидкості $\bar{\omega}$ і $\bar{\varepsilon}$ спрямовані у один бік (рис. 2.12, а), або спрямовані у різні боки (рис. 2.12, б).

Напрямки обертання тіла показані стрілками.

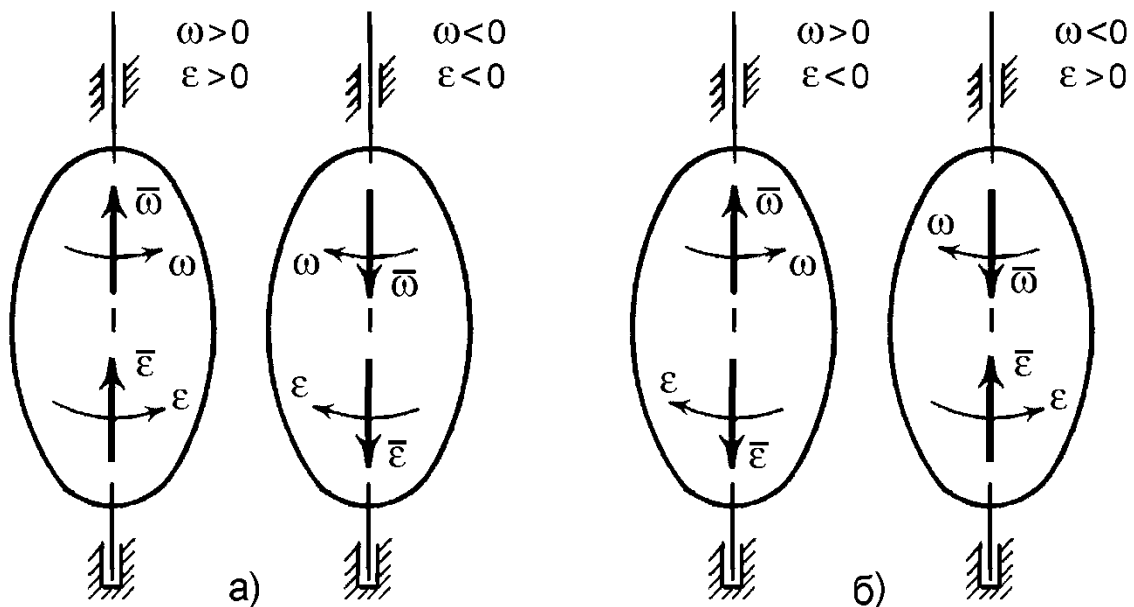


Рис. 2.12

Вектори кутової швидкості $\bar{\omega}$ і кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$ є векторами ковзними і за їх початок можна взяти будь-які точки тіла, на осі обертання.

Величини і напрямок векторів $\bar{\omega}$ і $\bar{\varepsilon}$ повністю характеризують і визначають обертальний рух тіла, напрям обертання, а також чисельні значення кутової швидкості і кутового прискорення.

7.7. Векторний вираз лінійної швидкості і прискорення точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі

Вектори лінійної швидкості і прискорення окремої точки обертового тіла можна представити у вигляді векторних добутків.

Розглянемо тіло, обертальний рух якого навколо нерухомої осі z заданий векторами кутової швидкості $\bar{\omega}$ і кутового прискорення $\bar{\varepsilon}$ (рис. 2.13). Для довільної точки M цього тіла, положення якої визначає радіус – вектор \bar{r} , проведений, з будь-якої точки O на осі обертання z тіла, будуть справедливі наступні ствердження.

Вектор лінійної швидкості будь-якої точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку двох векторів: кутової швидкості і радіус-вектора цієї точки відносно довільної точки осі обертання:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (2.50)$$

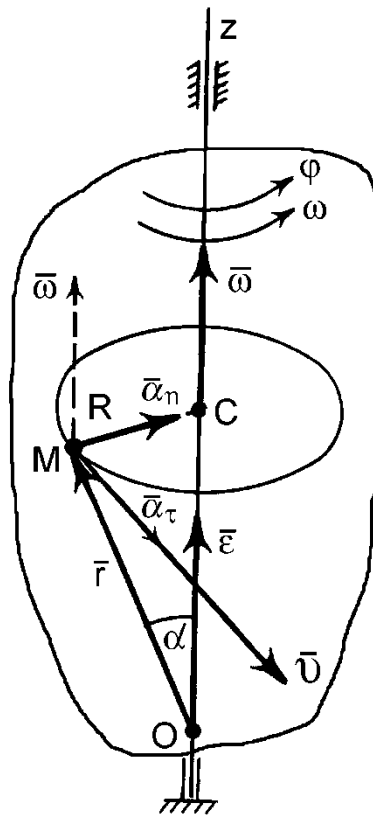


Рис. 2.13

Загально відомо, що векторним добутком двох векторів \vec{a} і \vec{b} , кут між якими складає α , є третій вектор \vec{c} ($\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$), модуль якого дорівнює:

$$c = a \cdot b \sin \alpha.$$

Спрямований цей вектор \vec{c} перпендикулярно до площини, в якій розташовані вектори \vec{a} і \vec{b} , у бік, звідки найкоротший поворот від вектора \vec{a} до вектора \vec{b} відбувається проти напрямку ходу годинникової стрілки.

Тоді модуль векторного добутку $\vec{\omega} \times \vec{r}$ буде дорівнювати:

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin \alpha. \quad (2.51)$$

Векторний добуток $\vec{\omega} \times \vec{r}$, як результуючий вектор, буде перпендикулярним площині $\triangle OMC$. Він виходить із точки O на осі z паралельно вектору \vec{v} лінійної швидкості точки M в тому самому напрямку.

Враховуючі те, що

$$v = \omega \cdot R = \omega \cdot r \sin \alpha, \quad (2.52)$$

можна зробити висновок: векторний добуток $\bar{\omega} \times \bar{r}$ і вектор \bar{v} лінійної швидкості точки обертового тіла збігаються за напрямком, паралельні і однакові за модулем.

Вектор повного лінійного прискорення точки M тіла, що обертається навколо нерухомої осі z визначається формулою Ривальса:

$$\bar{a} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \quad (2.53)$$

Перший векторний добуток виразу (2.53) $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}$, як результуючий вектор, буде перпендикулярним площині ΔOMC і спрямованим із точки O на осі z паралельно вектору \bar{a}_τ тангенціального прискорення точки M в тому ж напрямку.

Модуль першого векторного добутку дорівнює:

$$|\bar{\varepsilon} \times \bar{r}| = \varepsilon r \sin \alpha.$$

При цьому модуль тангенціального прискорення точки також буде дорівнювати:

$$a_\tau = \varepsilon R = \varepsilon r \sin \alpha.$$

Порівнявши останні вирази бачимо, що для векторів $\bar{\varepsilon} \times \bar{r}$ і \bar{a}_τ співпадають не тільки їх напрямки ($\perp \Delta OMC$), але і модулі, тому

$$\bar{a}_\tau = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}. \quad (2.54)$$

Тангенціальне прискорення точки твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку вектора кутового прискорення на радіус-вектор цієї точки відносно довільної точки осі обертання.

Другий векторний добуток виразу (2.53) $\bar{\omega} \times \bar{v}$, спрямований, як і вектор \bar{a}_n нормального прискорення точки M , - із точки M по радіусу до центра траєкторії руху цієї точки.

Модуль другого векторного добутку дорівнює:

$$|\bar{\omega} \times \bar{v}| = \omega v \cdot \sin(\widehat{\bar{\omega}, \bar{v}}) = \omega v,$$

оскільки $(\widehat{\bar{\omega}, \bar{v}}) = 90^\circ$ і $\bar{v} \perp \bar{\omega}$.

При цьому модуль нормального прискорення точки також буде дорівнювати:

$$a_n = \omega^2 R = \omega v.$$

Порівнявши напрямки векторів \bar{a}_n і $\bar{\omega} \times \bar{v}$ і їхні значення, можна зробити висновок, що

$$\bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \quad (2.55)$$

Нормальне прискорення точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, дорівнює векторному добутку вектора кутової швидкості на вектор лінійної швидкості цієї точки.

Запитання для самоконтролю

1. Надайте означення і приклади поступального руху тіла?
2. Чи дорівнюють величини швидкостей і прискорень точок тіла, яке рухається поступально?
3. Як визначити положення обертового тіла?
4. Означте кутові швидкості і прискорення обертового тіла, назвіть їхні одиниці виміру.
5. Назвіть формули рівнозмінного обертання тіла.
6. Як спрямовані вектори лінійних швидкостей та прискорень точок обертового тіла?
7. Напишіть формулу Ейлера для швидкості точки обертового тіла.
8. Яка залежність між кутовою швидкістю і частотою обертання?

РОЗДІЛ 8. ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

8.1. Поняття про плоскопаралельний рух

Плоскопаралельним або плоским називається такий рух твердого тіла, при якому всі точки тіла рухаються паралельно деякій заданій нерухомій площині, яка зветься напрямною.

Прикладом такого руху є кочення колеса по прямій ділянці шляху, рух шатуна кривошипно-шатунного механізму і т.п.

На рис. 2.14 показано тіло, яке рухається паралельно деякій нерухомій напрямній площині π .

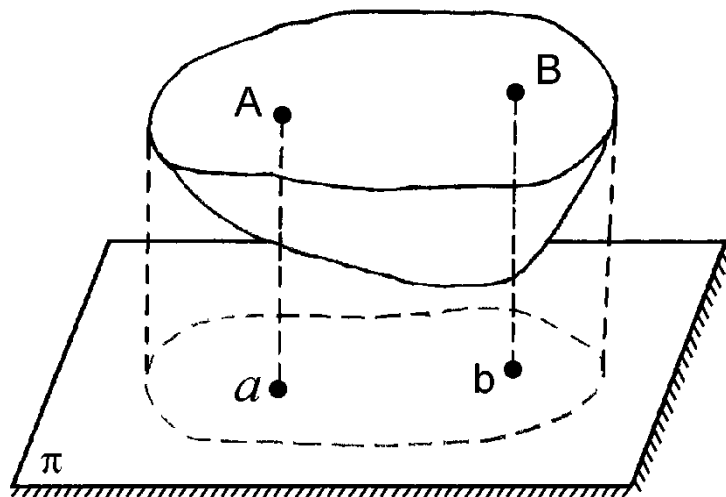


Рис. 2.14

Проекціями довільних точок тіла A і B на площину π будуть відповідно точки a і b .

Згідно визначення плоскопаралельного руху за весь час руху тіла відстані Aa і Bb завжди залишаються сталими.

Оскільки кожна точка відрізка Aa рухається однаково (так як точка a), то замість руху тіла можна розглядати рух його проекції S на площину π відносно цієї площини.

В свою чергу положення проекції тіла S в площині π визначається положенням відрізка ab .

Тоді розглядання плоского руху тіла зводиться до розглядання руху відрізка прямої ab плоскої фігури S в площині π (рис. 2.14).

8.2. Рівняння плоскопаралельного руху твердого тіла

Для визначення рівнянь плоскопаралельного руху твердого тіла спроектуємо це тіло на напрямну вертикальну площину π .

Розглянемо рух отриманої проекції тіла – плоскої фігури S по відношенню до системи координат Oxy , нерухомо пов'язаною з площиною π (рис. 2.15).

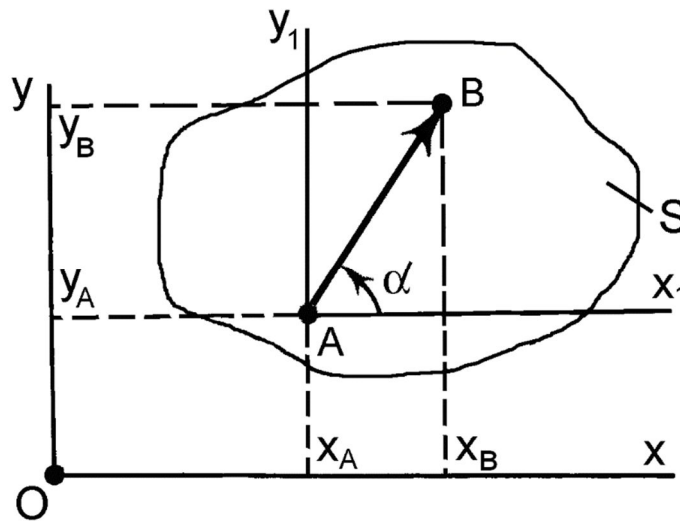


Рис. 2.15

При цьому в кожен момент часу положення фігури S буде визначатися положенням довільної прямої (наприклад прямої AB), проведеної в цій фігурі.

Але, в свою чергу, положення прямої AB в площині Oxy можна визначити, знаючи координати точки A прямої AB та величину кута φ , який утворює пряма AB з віссю Ox .

Точку A , жорстко зв'язану з фігурою S називають полюсом.

Якщо відомі у будь-який момент часу координати полюса A і кут повороту φ , то можна визначити положення плоскої фігури S , що рухається у площині π , а відповідно і положення твердого тіла.

Протягом часу координати полюса (точка A) і кут φ змінюються і, як однозначні функції часу, їх можна описати системою рівнянь:

$$\begin{aligned}x_A &= f_1(t), \\y_A &= f_2(t), \\ \varphi &= f_3(t).\end{aligned}\tag{2.56}$$

Ці рівняння, що визначають закон руху, є рівняннями руху плоскої фігури, або кінематичними рівняннями плоскопаралельного руху тіла.

8.3. Розкладання руху плоскої фігури на поступальний і обертальний

Розглянемо у площині Ox рух плоскої фігури S , положення якої визначено положенням її відрізка AB (рис. 2.16).

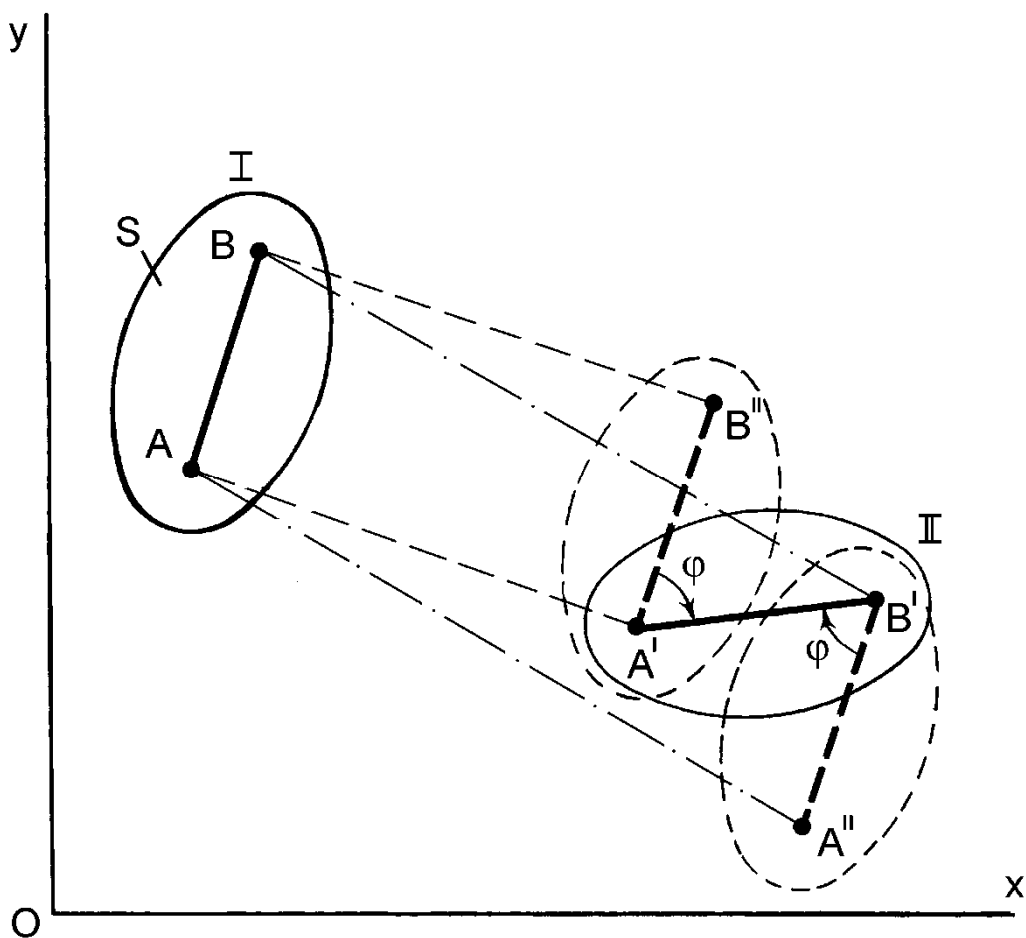


Рис. 2.16

Через певний проміжок часу фігура S із положення I (AB) переміститься в положення II ($A'B'$).

Вказане переміщення відрізка фігури із положення AB у положення $A'B'$ можна розглядати, як поступальне переміщення спочатку в положення $A'B''$ з наступним поворотом навколо точки A' (яку приймаємо

за полюс) на деякий кут φ . Або, як поступальне переміщення спочатку в положення $B'A''$ з наступним поворотом на той самий кут φ навколо точки B' (останню також в цьому разі приймаємо за полюс).

Неважко помітити, що кут φ повороту плоскої фігури S навколо полюса A' дорівнює куту повороту навколо полюса B' . Однаковий буде і напрямок обертання – за годинниковою стрілкою. Тобто, кут повороту φ і напрям обертання плоскої фігури S не залежать від вибору полюса.

Таким чином, будь – який рух плоскої фігури S у її площині можна розкласти на поступальний рух фігури разом з полюсом і обертальний рух фігури навколо цього полюса.

При цьому обертальний рух фігури не залежить від вибору полюса.

Слід зауважити, що такого ж самого кінцевого результату можна досягнути, якщо розглядати спочатку обертальний рух тіла, а потім поступальний.

8.4. Визначення швидкості точки плоскої фігури

Визначимо швидкість довільної точки плоскої фігури S , яка рухається плоскопаралельно. Для цього точку A довільної прямої AB фігури будемо вважати за полюс, що рухається із заданою швидкістю \bar{v}_A (рис. 2.17).

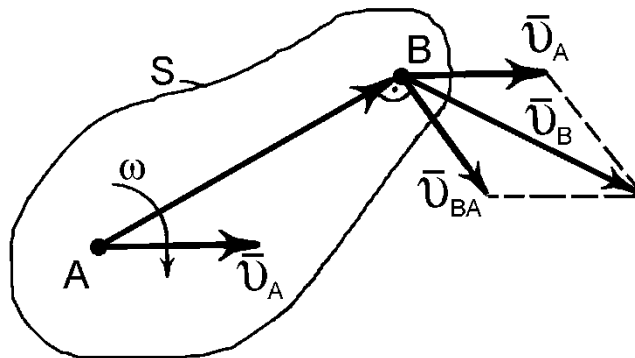


Рис. 2.17

Тоді рух точки B фігури можна розглядати таким, що одночасно складається із двох видів руху: поступального разом з полюсом A зі швидкістю \bar{v}_A та обертального навколо полюса A з якоюсь заданою кутовою швидкістю $\bar{\omega}$.

Відповідно до цього, векторне рівняння для визначення швидкості \bar{v}_B довільної точки B плоскої фігури буде мати вигляд:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}, \quad (2.57)$$

де \bar{v}_{BA} - відносна швидкість обертання точки B навколо полюса A .

Тобто, швидкість довільної точки B плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості полюса A і відносної швидкості точки B при обертанні фігури навколо полюса A .

Графічний розв'язок останнього векторного рівняння показаний на рис. 2.17. При цьому відносна швидкість \bar{v}_{BA} представлена вектором, перпендикулярним до прямої AB .

Модуль вектора \bar{v}_{BA} можна знайти за формулою:

$$v_{BA} = \omega \cdot AB,$$

де $\bar{\omega}$ - кутова швидкість обертання фігури, AB - відстань між точками.

Тоді переносимо вектор \bar{v}_A паралельно самому собі в точку B і знаходимо шукану швидкість \bar{v}_B , як діагональ паралелограма, побудованого векторами \bar{v}_A та \bar{v}_{BA} на його сторонах.

Векторне рівняння (2.57) широко застосовується при графічному способі визначення швидкостей точок плоских механізмів за допомогою побудови планів швидкостей, який ми розглянемо в розділі теорії механізмів і машин.

8.5. Теорема про проекції швидкостей двох точок плоскої фігури

Крім векторного рівняння (2.57) для визначення швидкості довільної точки плоскої фігури використовують теорему про проекції швидкостей двох точок цієї фігури на пряму, що їх з'єднує.

Розглянемо рух плоскої фігури, як і в попередньому випадку, з прямою AB і полюсом в точці A (рис. 2.18).

Спроектувавши векторне рівняння (2.57) на пряму, обумовлену відрізком AB , отримаємо:

$$np_{AB} \bar{v}_B = np_{AB} \bar{v}_A + np_{AB} \bar{v}_{BA}.$$

Але проекція $np_{AB} \bar{v}_{BA} = 0$, так як $\bar{v}_{BA} \perp AB$, тому

$$np_{AB} \bar{v}_B = np_{AB} \bar{v}_A.$$

Або з урахуванням того, що дані проекції визначаються з рис. 2.18, як

$$np_{AB} \bar{v}_B = |Bb| = v_B \cdot \cos \beta,$$

$$np_{AB} \bar{v}_A = |Aa| = v_A \cdot \cos \alpha,$$

остаточно маємо

$$v_B \cdot \cos \beta = v_A \cdot \cos \alpha .$$

Таким чином, проекції векторів швидкостей двох довільних точок плоскої фігури на пряму лінію, що з'єднує ці точки, дорівнюють одна одній.

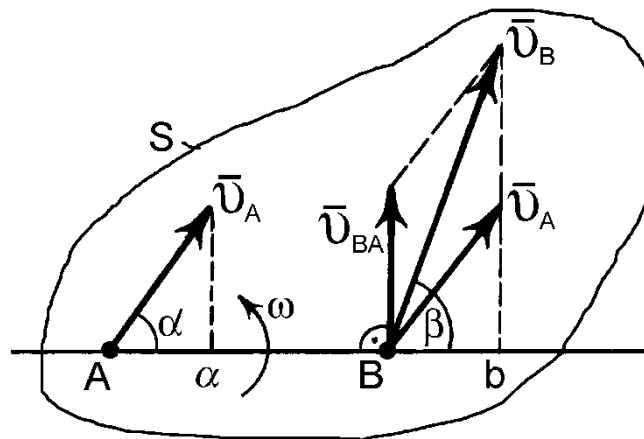


Рис. 2.18

Знаючи модуль v_A швидкості даної точки A і кут нахилу α вектора цієї швидкості, а також напрямок вектора шуканої швидкості будь-якої іншої точки B (кут β), можна визначити її модуль, тобто

$$v_B = \frac{v_A \cos \alpha}{\cos \beta} .$$

8.6. Визначення прискорення точки плоскої фігури

Прискорення довільної точки плоскої фігури S , що здійснює плоскопаралельний рух, як і у випадку з визначенням швидкості точки цієї фігури, може бути визначене за допомогою векторного рівняння.

При цьому прискорення точки B , яка знаходиться на довільній прямій AB плоскої фігури з вибраним полюсом в точці A (рис. 2.19), дорівнює геометричній сумі прискорення полюса A і прискорення точки B в її відносному обертальному русі навколо полюса A :

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA} . \quad (2.58)$$

В свою чергу вектор прискорення точки B в її відносному обертальному русі навколо полюса A також геометрично розкладаються

на дотичну і нормальну складові:

$$\bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^n.$$

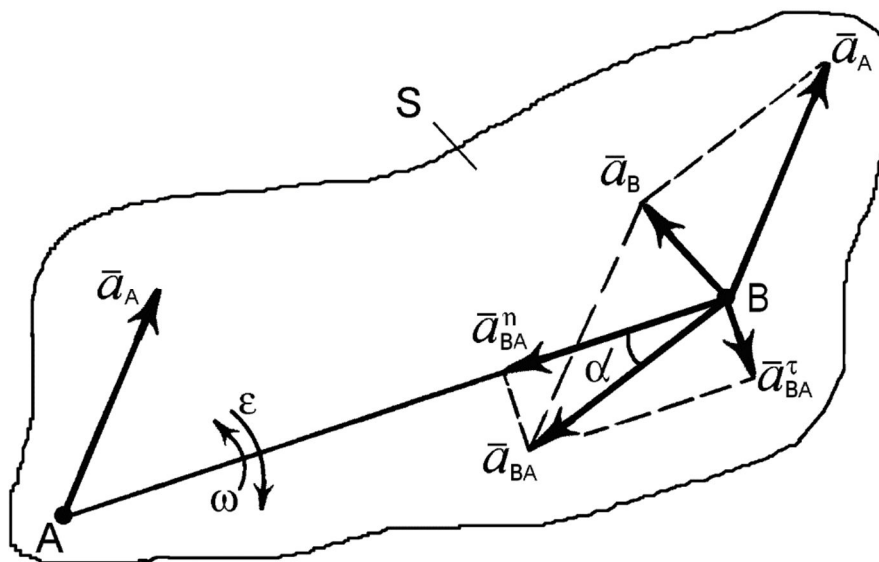


Рис. 2.19

За модулем складові останнього виразу дорівнюють:

$$a_{BA}^{\tau} = \epsilon \cdot AB,$$

$$a_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB,$$

де ω, ϵ - кутова швидкість і прискорення фігури відносно полюса A .
Модуль повного відносного прискорення точки B відносно полюса A :

$$a_{BA} = AB\sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}.$$

Остаточно векторне рівняння швидкості довільної точки B плоскої фігури буде мати вигляд:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\tau} + \bar{a}_{BA}^n. \quad (2.59)$$

Таким чином, прискорення будь-якої точки плоскої фігури дорівнює векторній сумі прискорення полюса і прискорення цієї точки у обертальному русі фігури навколо полюса.

Напрямки зазначених векторів прискорень будуть наступними:

– дотичне прискорення розташоване перпендикулярно прямій AB і спрямоване у бік кутового прискорення ϵ .

– нормальне прискорення розташоване на прямій AB і спрямоване у бік полюса A .

– вектор повного прискорення \bar{a}_{BA} складає з прямою AB кут α (рис. 2.19), тангенс якого визначається так:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_{BA}^{\tau}}{a_{BA}^n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Величини ω і ε відносяться до всієї фігури S , тому кут α для всіх точок фігури один і той же.

Відкладається α за напрямом ε .

8.7. Миттєвий центр швидкостей плоскої фігури

При визначенні швидкостей точок плоскої фігури також використовують поняття миттєвого центра швидкостей, в основу якого покладене ствердження, що плоскопаралельний рух можна розглядати, як послідовні миттєві безперервні пороти фігури навколо миттєвих центрів обертання.

Спочатку покажемо можливість здійснення кінцевого переміщення плоскої фігури шляхом її повороту відносно певним шляхом вибраної точки. Для цього розглянемо наступну теорему:

Довільне переміщення плоскої фігури в її площині із одного положення в інше можна здійснити шляхом одного повороту в цій площині навколо точки P , яка є центром кінцевого обертання.

Припустимо, що фігура, яка має відрізок AB , незмінно зв'язаний з нею, здійснює рух у площині рисунка і перейшла із першого положення в друге, а вказаний відрізок зайняв положення A_1B_1 (рис. 2.20).

З'єднаємо прямими лініями точки A і A_1 , а також B і B_1 .

Поділимо навпіл відрізки AA_1 і BB_1 , отримуючи точки C і C_1 , через які встановимо перпендикуляри до прямих AA_1 і BB_1 . Перпендикуляри перетинаються у точці P .

З'єднаємо з точкою P кінці відрізків AB і A_1B_1 і отримаємо на схемі два трикутника ABP і A_1B_1P .

Доведемо, що вказані трикутники дорівнюють.

Трикутники AA_1P та BB_1P рівнобедрені, оскільки для них відстані CP і CP_1 є одночасно і висотою, і медіаною.

Крім цього дані трикутники мають спільну вершину – точку P . Тому для рівнобедрених трикутників $AP = A_1P$, $BP = B_1P$.

Якщо врахувати, що $AB = A_1B_1$ (один і той же відрізок), то трикутник

ABP дорівнює трикутнику A_1B_1P і якщо повернути трикутник ABP на кут φ , то він співпаде з трикутником A_1B_1P .

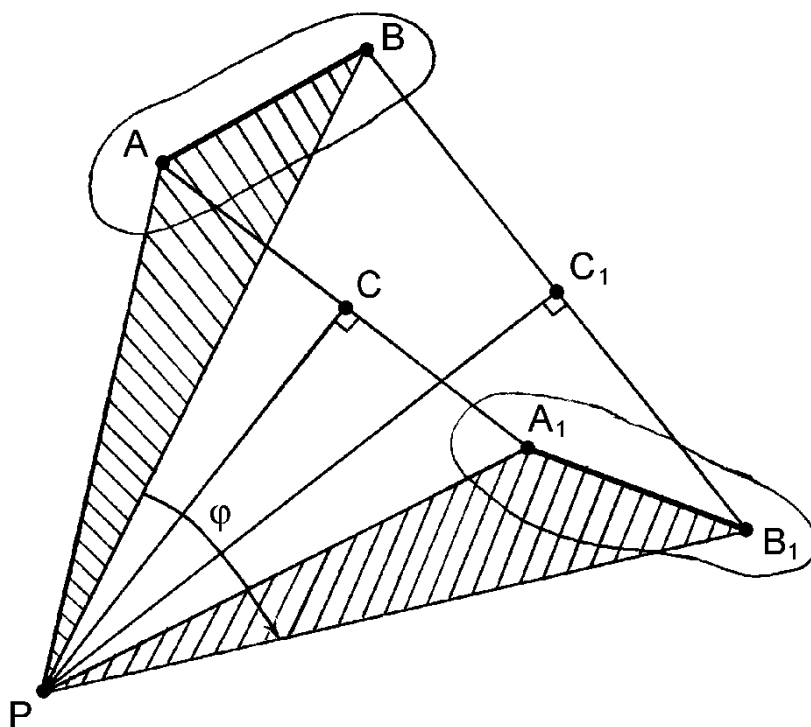


Рис. 2.20

Отже, доведено, що із одного положення в друге плоска фігура може бути переведена шляхом одного повороту на кут φ навколо точки P .

Наведений доказ буде справедливим і в тому випадку, коли переміщення плоскої фігури відбудеться за нескінченно малий проміжок часу.

Тобто, в кожному мить часу (при $\Delta t \rightarrow 0$) буде відбуватися обертання плоскої фігури навколо її миттєвого центру, який називають миттєвим центром швидкостей.

При переміщенні плоскої фігури положення її миттєвого центру швидкостей безперервно змінюється.

Кожному моменту часу (миті) відповідає своє положення миттєвого центру швидкостей; на це і вказує сама назва « миттєвий » центр швидкостей.

Розглядаючи в кожному мить складний плоскопаралельний рух як найпростіший – обертальний, є можливість застосувати для швидкостей точок плоскої фігури всі властивості їх обертального руху навколо миттєвого центра швидкостей.

Цілком зрозуміло, що лінійна швидкість точки, що є в даний момент миттєвим центром швидкостей, буде дорівнювати нулю, а всі інші точки фігури рухаються відносно неї обертально з векторами швидкостей, перпендикулярними до прямих, проведених із миттєвого центра швидкостей до відповідної точки.

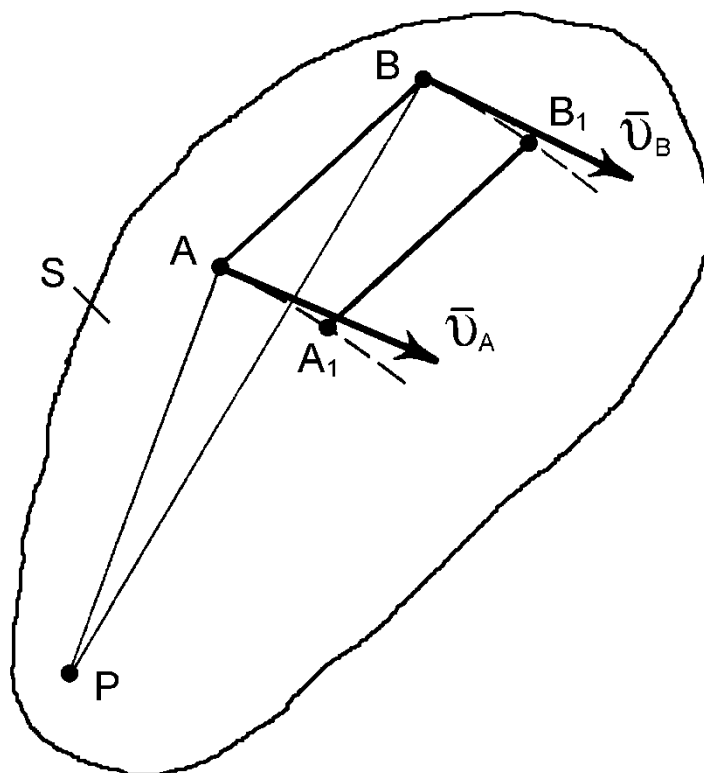


Рис. 2.21

Знайдемо миттєвий центр швидкостей для плоскої фігури при нескінченно малому повороті її прямої із положення AB в положення A_1B_1 (рис. 2.21). Траєкторії обертального руху точок A і B покажемо пунктирами.

Оскільки положення відрізка AB є нескінченно близьким до положення A_1B_1 , то хорди AA_1 і BB_1 прямують до дотичних, уздовж яких і розташовані вектори швидкості точок A і B цієї фігури, які відповідно дорівнюють \bar{v}_A і \bar{v}_B .

Встановлюючи перпендикуляри до векторів швидкостей \bar{v}_A і \bar{v}_B , отримаємо точку їх перетину P . Ця точка і буде миттєвим центром швидкостей.

Швидкість точки P при такому русі фігури дорівнює нулю і всі інші точки фігури в даний момент часу обертається навколо неї із кутовою швидкістю ω , яку можна знайти за відомою із обертального руху формулою:

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB},$$

де v_A, v_B - модулі швидкостей точок A і B плоскої фігури, PA, PB - відповідні відстані від миттєвого центру швидкостей P до точок A і B .

Таким чином, для плоскопаралельного руху плоскої фігури, який розглядається в кожен момент часу як миттєве обертання навколо миттєвого центру швидкостей, можна зробити наступні висновки:

1. Миттєвим центром швидкостей називається точка рухомої плоскої фігури, лінійна швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулю;

2. Миттєвий центр швидкостей знаходиться на перетині перпендикулярів, проведених із довільних точок плоскої фігури до напрямку їх лінійних швидкостей;

3. Лінійні швидкості довільних точок плоскої фігури дорівнюють добутку кутової швидкості на відповідні відстані від миттєвого центра швидкостей до цих точок:

$$\begin{aligned}v_A &= \omega \cdot AP, \\v_B &= \omega \cdot BP.\end{aligned}$$

8.8. Деякі випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей

Розглянемо декілька випадків визначення положення миттєвого центра швидкостей плоскої фігури (рис. 2.22):

1. Якщо відомі вектор швидкості \vec{v}_A будь-якої точки A фігури і кутова швидкість ω обертання фігури (рис. 2.22, а), то миттєвий центр швидкостей P лежить на перпендикулярі, опущеному із точки A до напрямку вектора її швидкості на відстані:

$$AP = \frac{v_A}{\omega},$$

причому так, щоб напрям обертання навколо миттєвого центра швидкостей і напрям швидкості точки збігались.

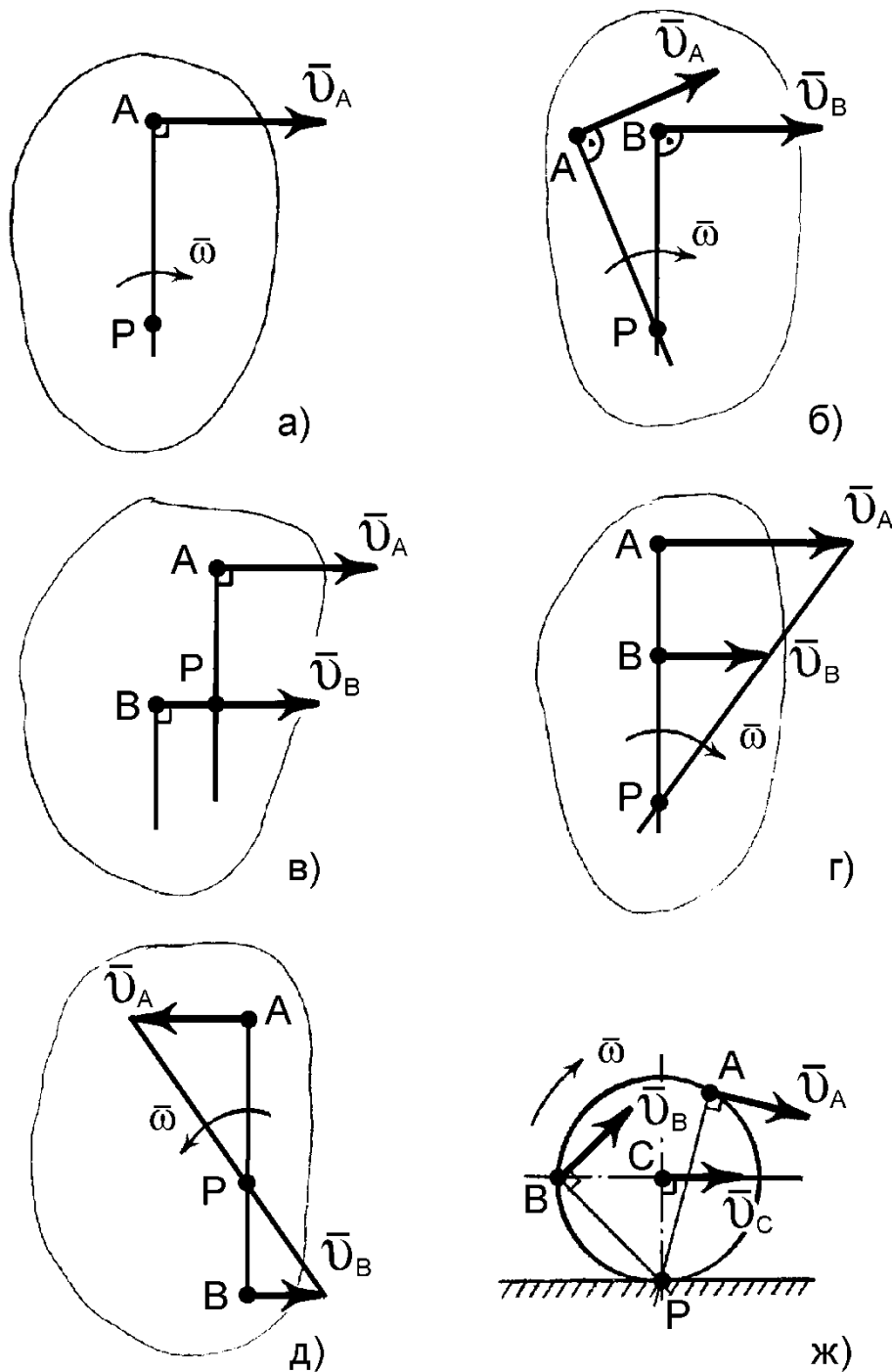


Рис. 2.22

2. Якщо відомі напрями векторів швидкостей будь – яких двох точок фігури (рис. 2.22, б), то миттєвий центр швидкостей знаходиться на перетині перпендикулярів, побудованих з цих точок до векторів їх швидкостей.

3. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури паралельні і спрямовані в один бік, а самі точки не лежать на одному перпендикулярі до напрямів їх швидкостей (рис. 2.22, *в*), то миттєвий центр швидкостей перебуває в нескінченності.

В цьому випадку швидкості усіх точок фігури такі ж самі, якби фігура мала миттєвий поступальний рух, тобто швидкості всіх її точок в даний момент однакові і кутова швидкість її дорівнює нулеві:

$$\omega = \frac{v_A}{\infty} = \frac{v_B}{\infty} = 0.$$

4. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури паралельні, спрямовані в один бік і лежать на одному перпендикулярі, а їх модулі не однакові (рис. 2.22, *з*), то миттєвий центр швидкостей знаходиться у точці перетину прямої, що з'єднує кінці цих векторів швидкостей із вказаним вище перпендикуляром.

Тоді, як бачимо з (рис. 2.22, *з*), матимемо співвідношення:

$$\frac{AP}{BP} = \frac{v_A}{v_B}.$$

5. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури паралельні, спрямовані у різні боки (рис. 2.22, *д*) і лежать на одному перпендикулярі (модулі швидкостей можуть бути однакові, або різні), то миттєвий центр швидкостей також знаходиться у точці перетину прямої, що з'єднує кінці цих векторів з вказаним вище перпендикуляром.

В даному випадку співвідношення між швидкостями точок фігури і відстанями до миттєвого центру швидкостей, яке визначено у попередньому випадку, зберігається.

6. При коченні фігури (наприклад, колеса) без ковзання по деякій нерухомій кривій миттєвим центром швидкостей буде точка дотику фігури з цією нерухомою кривою (рис. 2.22, *ж*), а рух всіх інших точок буде обертальним навколо точки P .

При цьому $\vec{v}_A \perp PA$; $\vec{v}_B \perp PB$; $\vec{v}_C \perp PC$, кутова швидкість фігури в кожний даний момент часу дорівнює відношенню модуля швидкості будь-якої точки фігури до відстані від цієї точки до миттєвого центру швидкостей:

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_C}{CP} = \frac{v_C}{R}.$$

8.9. Миттєвий центр прискорень

Крім миттєвого центра швидкостей в кожний момент часу плоскопаралельного руху фігури в її площині існує також миттєвий центр прискорень Q .

Миттєвим центром прискорень називається точка плоскої фігури, прискорення якої у даний момент часу дорівнює нулю, називається

Слід відразу зауважити, що положення миттєвого центра прискорень Q і миттєвого центра швидкостей P у даний момент часу не співпадають.

Знайдемо положення миттєвого центра прискорень (точку Q), якщо відомі прискорення \bar{a}_A точки A , кутова швидкість ω і кутове прискорення ε фігури (рис. 2.23).

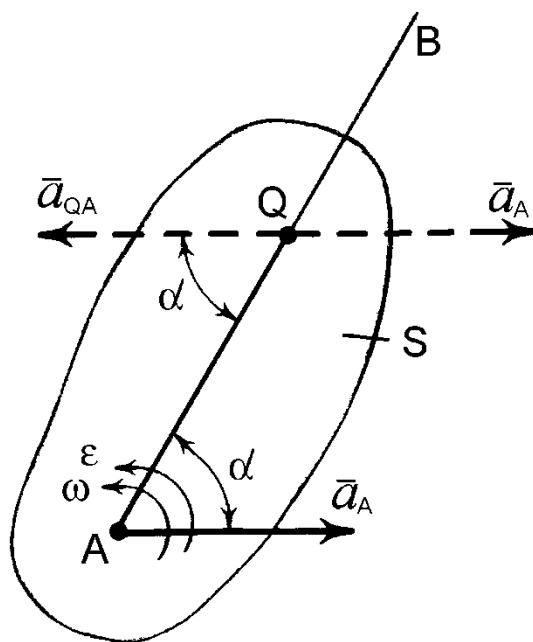


Рис. 2.23

Приймемо точку A за полюс і використаємо вирази, що визначають прискорення точки Q плоскої фігури в її відносному обертальному русі навколо полюса A .

Тоді миттєвий центр прискорень (точка Q) буде лежати на прямій AB , яка проведена під кутом α від точки A до вектора \bar{a}_{QA} .

Тангенс цього кута α дорівнює:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}.$$

При цьому пряма AB повинна бути відхилена від напрямку вектора \bar{a}_A завжди у бік напрямку кутового прискорення ε (тобто у бік обертання тіла в разі, коли обертання є прискореним, або у бік, протилежний напрямку обертання, якщо цей рух є уповільненим).

На рис. 2.23 вибраний випадок прискореного обертання тіла навколо точки A .

На проведеній прямій AB необхідно відкласти відрізок AQ , величина якого дорівнює:

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Отже, на рис. 2.23 отримаємо, миттєвий центр прискорень Q .

Якщо точку Q вибрати за полюс, то оскільки $\bar{a}_Q = 0$, прискорення будь-якої іншої точки M тіла буде дорівнювати:

$$\begin{aligned}\bar{a}_M &= \bar{a}_Q + \bar{a}_{MQ} = \bar{a}_{MQ}, \\ a_M &= QM \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.\end{aligned}$$

Таким чином, прискорення будь-якої точки тіла дорівнює її прискоренню у обертальному русі навколо миттєвого центра прискорень.

З наведених останніх виразів зрозуміло, що:

$$\frac{a_M}{QM} = \frac{a_A}{QA} = \frac{a_C}{QC} = \dots$$

Запитання для самоконтролю

1. Визначте плоскопаралельний рух тіла, наведіть приклади з техніки.
2. На які два прості рухи розкладається плоскопаралельний рух?
3. Чи залежить обертальна частина плоскопаралельного руху від вибору полюса?
4. Які кінематичні рівняння плоскопаралельного руху тіла знаєте?
5. Як визначити швидкості і прискорення точок тіла, яке рухається плоскопаралельно?
6. Чому дорівнюють проекції швидкостей двох точок плоскої фігури на лінію, що їх з'єднує?
7. Що таке миттєвий центр швидкостей? Доведіть його існування.
8. Які способи для визначення положення миттєвого центру швидкостей знаєте?
9. Як визначити швидкість точки тіла за допомогою миттєвого центру швидкостей?
10. Що таке миттєвий центр прискорень? Доведіть його існування.
11. Сформулюйте теорему про кінцевий поворот плоскої фігури.

РОЗДІЛ 9. СКЛАДНИЙ РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

9.1. Поняття про абсолютний, відносний і переносний рух

В деяких випадках визначення кінематичних характеристик матеріальної точки доцільно одночасно розглядати її рух по відношенню до двох систем відліку, одна з яких умовно рахується нерухомою, а друга здійснює заданий рух відносно першої. В такому випадку йдеться про складний рух матеріальної точки.

Рух точки відносно нерухомої системи відліку називається *абсолютним*.

Рух точки по відношенню до рухомої системи відліку називається *відносним*.

Рух точки разом з рухомою системою відліку відносно нерухомої називається *переносним*.

Фактично переносний рух – це рух самої рухомої системи, в якій знаходиться точка, відносно нерухомої.

Таким чином, абсолютний рух матеріальної точки буде складним, оскільки він складається із відносного руху точки в рухомій системі координат і переносного руху точки разом з рухомою системою координат відносно нерухомої.

Отже складний рух точки – це такий, при якому точка приймає участь одночасно у відносному і переносному рухах.

Прикладом складного руху є рух людини, як матеріальної точки, по кораблю, який рухається відносно берега.

При цьому рух людини відносно берега буде абсолютним, рух людини по кораблю – відносним, рух корабля разом з людиною відносно берега – переносним.

Швидкості та прискорення абсолютного руху точки позначаються відповідно \bar{v} , \bar{a} , відносного руху – \bar{v}_r , \bar{a}_r (від *relative* – відносний), переносного руху – \bar{v}_e , \bar{a}_e (від *exporter* – захопити).

9.2. Визначення абсолютної швидкості та прискорення у складному русі матеріальної точки

Вектор абсолютної швидкості матеріальної точки у складному її русі визначається за теоремою про додавання швидкостей.

Наведемо дану теорему (без доведення):

Абсолютна швидкість матеріальної точки у складному її русі дорівнює геометричній сумі її переносної і відносної швидкостей:

$$\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r. \quad (2.60)$$

Вираз (2.60) називають паралелограмом швидкостей.

Коли кут $(\bar{v}_e, \bar{v}_r) = 90^\circ$, то модуль абсолютної швидкості дорівнює:

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2}.$$

У загальному випадку, якщо $(\bar{v}_e, \bar{v}_r) \neq 90^\circ$, то модуль абсолютної швидкості v руху матеріальної точки визначається за теоремою косинусів:

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2 + v_e \cdot v_r \cdot \cos(\bar{v}_e, \bar{v}_r)}. \quad (2.61)$$

Вектор абсолютного прискорення матеріальної точки при складному її русі визначається за теоремою Коріоліса. Приведемо цю теорему (без доведення):

Абсолютне прискорення матеріальної точки при довільному переносному русі дорівнює геометричній сумі трьох прискорень: переносного, відносного і додаткового прискорення, яке називається поворотним прискоренням або прискоренням Коріоліса.

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k. \quad (2.62)$$

9.3. Модуль, напрямок і фізичні причини виникнення прискорення Коріоліса

Розглянемо докладно останню складову рівняння (2.62) – прискорення Коріоліса і його властивості.

Прискорення Коріоліса дорівнює подвійному векторному добутку векторів переносної кутової швидкості і відносної швидкості точки.

$$\bar{a}_k = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r).$$

При цьому за модулем цей векторний добуток дорівнює:

$$a_k = 2\omega_e \cdot v_r \cdot \sin(\bar{\omega}_e, \bar{v}_r). \quad (2.63)$$

З виразу (2.63) видно, що модуль прискорення Коріоліса дорівнює нулю ($a_k = 0$) в наступних випадках:

1. $\omega_e = 0$ – переносний рух не є обертальним, тому прискорення Коріоліса називають також *поворотним* прискоренням;
2. $v_r = 0$ – рух точки в даний момент часу не є складним;

3. $(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 0^\circ$, або $(\vec{\omega}_e, \vec{v}_r) = 180^\circ$ – вектори переносної кутової швидкості і відносної швидкості паралельні.

Модуль прискорення Кориоліса буде максимальним, якщо кут між векторами $\vec{\omega}_e$ і \vec{v}_r складає 90° або 270° , в цьому випадку:

$$a_k = 2\omega_e \cdot v_r.$$

Напрямок прискорення Кориоліса знаходять двома методами: за векторним добутком двох векторів і фізичним – способом Жуковського.

За першим методом розглянемо тіло S , що обертається навколо осі z проти напрямку хода годинникової стрілки. Це є тіло переносу і вектор $\vec{\omega}_e$ спрямований вгору вздовж осі z (рис. 2.24).

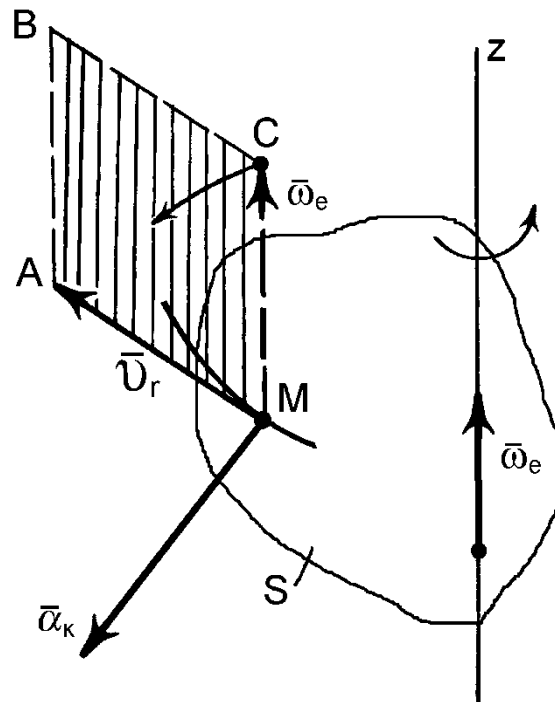


Рис. 2.24

Незалежно по тілу S за своєю траєкторією рухається точка M зі швидкістю \vec{v}_r (вектор \overline{AM}).

Перенесемо умовно вектор $\vec{\omega}_e$ у точку M .

Вектор прискорення Кориоліса \vec{a}_k , як підсумковий вектор векторного добутку, буде перпендикулярним площині, яку утворюють ці вектори (паралелограм $MABC$).

Визначимо, чи спрямований цей вектор до нас, чи від нас. У даному випадку (рис. 2.24) вектор \bar{a}_k спрямований до нас, тому що найкоротший перехід від вектора $\bar{\omega}_e$ до вектора \bar{v}_r відбувається проти напрямку хода годинникової стрілки.

Таким чином, вектор прискорення Коріоліса перпендикулярний площині, яку утворюють вектори переносної кутової швидкості і відносної швидкості, і спрямований у той бік, звідки бачимо, що найкоротший перехід від вектора кутової швидкості до вектора відносної швидкості відбувається проти ходу годинникової стрілки.

За методом Жуковського вектор відносної швидкості \bar{v}_r необхідно спроекувати на площину π , яка перпендикулярна осі переносного обертання ($\pi \perp \bar{\omega}_e$), а потім повернути проекцію \bar{v}'_r у площині π на кут 90° у напрямку переносного обертання (рис. 2.25).

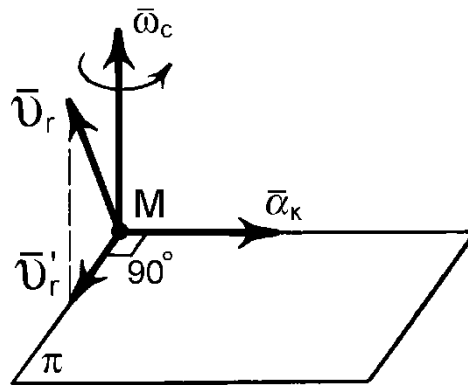


Рис. 2.25

Неважно зрозуміти, що у плоских механізмах, які є об'єктом вивчення теорії механізмів і машин, вектор \bar{v}_r завжди буде розташований у площині руху механізму.

Тому для визначення напрямку прискорення Коріоліса досить повернути вектор \bar{v}_r на 90° у напрямку переносного повороту ω_e .

Існують дві фізичні причини виникнення прискорення Коріоліса:

- зміна напрямку вектора відносної швидкості матеріальної точки внаслідок переносного обертання;
- зміна модуля і напрямку вектора переносної швидкості точки внаслідок її відносного руху (так як відстань $OM < OM_1$).

Так, розглянемо розташовану у площині рисунка пластину, яка рівномірно обертається у цій площі навколо вертикальної осі із кутовою швидкістю $\bar{\omega}_e$ (напрямок обертання показаний стрілкою).

По пластині уздовж її радіуса прямолінійно рухається матеріальна точка M із сталою відносною швидкістю \bar{v}_r (рис. 2.26).

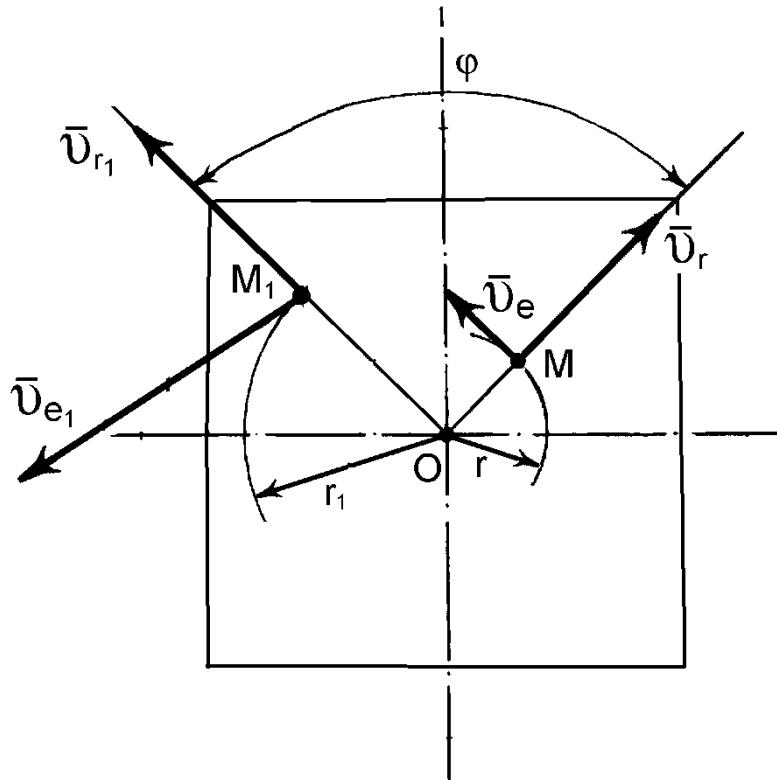


Рис. 2.26

За деякий час пластина повернеться на кут φ і точка M опиниться у положенні M_1 на більшій відстані від осі обертання O . В результаті вектор \bar{v}_r повернеться на кут φ , а вектор переносної швидкості \bar{v}_e також повернеться і збільшиться за модулем.

Отже, прискорення Коріоліса характеризує новий кінематичний ефект, який виникає внаслідок взаємодії, взаємовпливу векторів відносної і переносної швидкостей при обертальному переносному русі.

Вплив прискорення Коріоліса спостерігається у природі і техніці.

Так, за рахунок сил інерції мас води, які формуються цим прискоренням, розмивається один берег річок, які течуть вздовж меридіана. Тому у північній півкулі завжди круті праві береги, в у південній – навпаки, ліві.

Прискорення Коріоліса виникає також у кулісних механізмах. Відносно куліси рухається кулісний камінь, а переносним рухом є поворот куліси відносно нерухомого центра.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке складний рух точки? Яка основна задача цього руху?
2. З яких складових складається абсолютний рух точки?
3. Як визначається швидкість точки в абсолютному русі?
4. З яких складових утворюється абсолютне прискорення точки?
5. Визначте модуль прискорення Коріоліса. Коли модуль дорівнює нулю?
6. Як спрямувати вектор прискорення Коріоліса?
7. Назвіть фізичні причини виникнення прискорення Коріоліса?
8. Як визначити напрямок прискорення Коріоліса методом Жуковського?
9. Як проявляється дія прискорення Коріоліса в природі?

ЧАСТИНА ІІІ. ДИНАМІКА

РОЗДІЛ 10. ОСНОВИ ДИНАМІКИ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

10.1. Вступ до динаміки

Динаміка – це розділ теоретичної механіки, в якому вивчають закони руху матеріальних об'єктів під дією сил, які до них прикладені.

Під матеріальними об'єктами тут розуміють матеріальну точку, системи матеріальних точок і матеріальні тверді тіла певної маси, а якщо йдеться про матеріальні тіла – і певної геометричної форми.

Рух тіл з чисто геометричної точки зору розглядався в кінематиці. В динаміці, на відміну від кінематики, при вивченні руху тіл враховують як діючі сили, так і інертність самих матеріальних тіл.

Поняття про силу як величину, що характеризує міру механічної взаємодії матеріальних тіл, було введено в статиці. Але при цьому, по сутності, сили розглядались сталими величинами. Між тим на тіло в процесі його руху крім постійних сил можуть діяти сили, що змінюють свою величину та напрямок в залежності від часу, положення тіла і його швидкості. Особливість впливу цих сил на закони руху тіл можливо врахувати в динаміці.

До поняття інертності тіла можна підійти, зрівнюючи наслідки дії однієї і тієї ж сили на рух різних матеріальних тіл.

Інертність – це властивість матеріальних тіл скоріше або повільніше змінювати швидкість свого руху під дією однакових сил або систем сил.

Кількісною мірою інертності тіла є фізична величина – маса тіла (одночасно маса є мірою гравітаційних властивостей тіла за законом всесвітнього тяжіння). В класичній механіці маса розглядається величиною скалярною, додатною і постійною для кожного даного тіла.

В загальному випадку рух тіла залежить не тільки від його сумарної маси і прикладених сил. Характер руху може також залежати від форми тіла, точніше від взаємного розташування утворюючих його матеріальних точок (тобто від розподілу мас).

Перш ніж вивчати такі тіла і характер врахування їх форми, в динаміці розглядають більш простий матеріальний об'єкт – матеріальну точку як окреме тіло або як його окрему складову. Тому традиційно динаміка поділяється на динаміку матеріальної точки, динаміку твердого тіла і динаміку матеріальної системи.

Матеріальна точка – тобто тіло, розмірами якого у даній задачі

можна знехтувати, є найпростішим рухомим об'єктом механіки.

Рух матеріальної точки, як і інших матеріальних об'єктів, в класичній механіці розглядається відносно інерціальної системи відліку – такої системи відліку, в якій ізольована матеріальна точка може безмежно довго перебувати у стані спокою чи рівномірного прямолінійного руху.

Якщо матеріальна точка рухається під впливом тільки активних сил, то таку матеріальну точку називають вільною.

Слід нагадати, що матеріальні умови, які накладають обмеження на положення та рух невільної матеріальної точки, називають в'язями, а сили, з якими в'язі діють на цю точку, називають реакціями в'язей.

У динаміці розглядають дві основні задачі.

Перша або пряма задача полягає у тому, щоб за заданими силами і законом руху матеріального об'єкта визначити діючу на нього силу.

Друга або обернена задача динаміки полягає у тому, щоб за заданими силами, прикладеними до матеріального об'єкта, і початковими умовами визначити закон його обумовленого руху.

Найпростіше ці задачі розв'язати для матеріальної точки.

10.2. Закони динаміки (Закони Галілея-Ньютона)

В основу динаміки покладені закони, які для матеріальної точки були сформульовані І. Ньютоном в 1687 р. і є об'єктивними законами природи, встановленими на основі багатьох дослідів і спостережень.

Перший закон (закон інерції).

Ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху доти, поки прикладені сили не примусять її змінити цей стан.

Рівномірний і прямолінійний рух ще називають рухом за інерцією. Матеріальна точка не може сама змінювати свій стан руху чи спокою, а ця зміна з'являється лише в результаті впливу на неї інших тіл. Тобто, рух матеріальної точки змінюється тільки в результаті її взаємодії з іншими тілами. Якщо рух відхиляється від рівномірного – виникає прискорення по відношенню до інерціальної системи відліку.

Відмінність від нуля абсолютного прискорення матеріальної точки свідчить про вплив на неї інших тіл з певною інтенсивністю і спрямованістю, що характеризується в класичній механіці поняттям сили.

Другий закон (основний закон динаміки матеріальної точки).

Прискорення матеріальної точки пропорційно прикладеній до неї силі і спрямоване вздовж вектора сили.

Якщо силу або рівнодійну декількох сил, прикладених до точки, позначити через \vec{F} , прискорення – через \vec{a} , масу матеріальної точки –

через m і вважати її згідно уявлень класичної механіки сталою, то закон матиме вираз:

$$m\bar{a} = \bar{F}, \quad (3.1)$$

де сила може бути рівнодійною n сил: $\bar{F} = \sum_{K=1}^n \bar{F}_K$.

Співвідношення (3.1), яке встановлює зв'язок між силою, масою та прискоренням, є найважливіше у класичній механіці і називається *основним рівнянням динаміки*.

Таким чином, сила – це є та дія на матеріальну точку з боку будь-яких інших тіл, яка надає цій точці певне прискорення.

За сучасними уявленнями в основі механічних взаємодій знаходяться гравітаційні і електромагнітні сили – сили тяжіння, сили пружності, сили тертя, сили опору середовища і т. п. При цьому сила може бути, як сталою величиною і напрямком, так і змінною, яка, взагалі, є функцією часу, переміщення (координат) і швидкості

$$\bar{F} = \bar{F}(t, \bar{r}, \bar{v}).$$

Сили можуть залежати від окремих кінематичних параметрів. Наприклад, сила гравітаційної взаємодії на підставі закону всесвітнього тяжіння визначається

$$\bar{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \bar{r},$$

де m_1 і m_2 - маси тіл; γ - гравітаційна стала, $\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$ - відносна відстань (\bar{r}_1 і \bar{r}_2 - радіус-вектори мас в інерціальній системі відліку).

При описанні руху тіла в середовищі (повітря, рідина) сила опору, як встановлено експериментально, є функцією від швидкості

$$\bar{F}_{on} = -\alpha \bar{v},$$

де α – коефіцієнт в'язкого тертя, який залежить від форми тіла і властивостей середовища.

Коли швидкість збільшується, то сила опору стає пропорційною квадрату швидкості.

Маса матеріальної точки в основному рівнянні динаміки є мірою її інертних і гравітаційних властивостей.

Тому маса може бути визначена методами, які відображають вище вказані властивості.

Перший метод пов'язаний з гравітаційними властивостями матерії. Експериментально встановлено, що відношення ваги тіла до прискорення вільного падіння в пустоті у всіх точках земної кулі є сталою величиною:

$$m_{\Gamma} = \frac{G}{g}, \quad (3.2)$$

де G – вага тіла, g – прискорення вільного падіння у вакуумі.

Із формули (3.2) випливає, що маси тіл і їх вага пропорційні. Тому можна одну з мас взяти за еталон одиниці маси і визначати інші маси зважуванням.

Другий спосіб, динамічний, пов'язаний з інертними властивостями тіл.

Якщо одна і та ж сила діє на тіла з різною вагою, то вона викликає різні прискорення.

Тоді із виразу (3.1) маємо:

$$m_1 \cdot \bar{a}_1 = m_2 \cdot \bar{a}_2,$$

звідки $m_1 = m_2 \frac{a_2}{a_1}$. Якщо вибрати одну з мас за еталон, можна визначити

другу масу, яку називають інертною.

Дослідами І. Ньютона і Б. Бесселя встановлюється тотожність гравітаційної і інертної маси з точністю до 10^{-10} значень.

В другій половині XIX сторіччя з'являється **нове формулювання другого закону Ньютона:**

Перша похідна за часом від вектора кількості руху матеріальної точки дорівнює за величиною і напрямком вектору прикладеної до точки сили.

$$\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F}, \quad (3.3)$$

де $m\bar{v}$ – кількість руху матеріальної точки, як добуток маси на вектор швидкості.

Слід відмітити, що з другого закону можна одержати перший закон динаміки (закон інерції), якщо покласти $\bar{F} = 0$ і $m = const$.

Тоді $\bar{v} = const$ або $\bar{a} = 0$ тобто, швидкість точки зберігається за весь час її руху сталою величиною без прискорення.

Третій закон (закон дії та протидії).

Кожній дії одного тіла завжди відповідає рівна їй за модулем і протилежна за напрямком протидія другого тіла. Коротко – дія дорівнює протидії.

Це є закон, який встановлює парність усіх сил природи. Якщо, наприклад, тіло, яке лежить на столі, тисне на нього вниз з силою власної ваги, то стіл тисне з такою ж силою на тіло, яка напрямлена вгору.

Четвертий закон (закон незалежності дії сил).

Прискорення, яке отримує матеріальна точка від дії системи сил, дорівнює геометричній сумі прискорень, які б отримувала точка від дії кожної сили окремо.

Закони Ньютона є лише першим наближенням до дійсності, оскільки вважають властивості матеріальних об'єктів незалежними від властивостей простору і часу.

Не зважаючи на це, при швидкостях, відносно малих від швидкості світла, для Земних умов, ці закони добре узгоджуються з реальними механічними процесами, що зустрічаються на практиці.

10.3. Системи одиниць вимірювання фізичних величин.

Для вимірювання всіх механічних величин достатньо вибрати три основні одиниці вимірювання. Дві з них – це одиниці довжини і часу, які вже зустрічались в кінематиці.

В якості третьої одиниці може бути вибрана одиниця вимірювання маси або сили.

Так як довільними обидві ці одиниці при наявності рівняння (3.1) бути не можуть, то звідси витікає можливість вибору в механіці двох принципово різних систем одиниць.

Міжнародна система одиниць (СІ)

Основні одиниці цієї системи:

1. Довжина – метр [м].
2. Час – секунда [с].
3. Маса – кілограм маси [кг].

У системі СІ основною одиницею прийнята маса, а сила вимірюється похідною одиницею.

Розмірність сили у міжнародній системі СІ буде

$$|\bar{F}| = m \left[\frac{\text{кг}}{\text{с}^2} \right] \cdot a \left[\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \right] = \left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \right].$$

Сила, яка надає тілу з масою 1 [кг], прискорення 1 [м/с²], дорівнює 1 [Н], а сила 1 [кГ] надає тілу з масою 1 [кг], прискорення 9,8 [м/с²], звідки

$$1 \text{ [кГ]} = 9,8 \text{ [Н]},$$

$$1 \text{ [Н]} = 0,102 \text{ [кГ]}.$$

10.4. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

З розділу "Кінематика" відомо три способи завдання руху матеріальної точки – векторний, координатний та натуральний.

Відповідно до цього мають місце і форми складання диференціальних рівнянь руху матеріальної точки.

Проте в основу цих рівнянь покладено основний закон динаміки (3.1): $m\bar{a} = \bar{F}$.

1. Диференціальне рівняння у векторній формі

Розглянемо рух матеріальної точки M маси m під дією системи сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$, положення якої визначає радіус – вектор \bar{r} (рис. 3.1) із законом зміни $\bar{r} = \bar{r}(t)$.

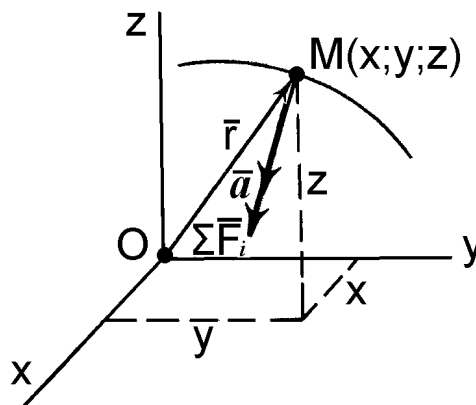


Рис. 3.1

Оскільки в цьому разі прискорення матеріальної точки дорівнює $\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$, то диференціальне рівняння руху буде мати такий вигляд

$$m \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i. \quad (3.4)$$

2. Диференціальні рівняння у координатній формі

Прискорення матеріальної точки в цьому разі визначається у його проєкціях на три відповідні осі декартової системи координат, тобто

$$\begin{aligned}
 a_x &= \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}; \\
 a_y &= \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}; \\
 a_z &= \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2},
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

а тому диференціальні рівняння руху матеріальної точки теж визначають у проекціях на ці ж осі і відповідно з основним законом динаміки (3.1) вони мають такий вигляд

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= \sum_{i=1}^n F_{ix}; \\
 m\ddot{y} &= \sum_{i=1}^n F_{iy}; \\
 m\ddot{z} &= \sum_{i=1}^n F_{iz},
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

де $\sum_{i=1}^n F_{ix}$, $\sum_{i=1}^n F_{iy}$, $\sum_{i=1}^n F_{iz}$ – алгебраїчні суми проекцій всіх сил на осі x , y , z .

3. Диференціальні рівняння у натуральній формі

Прискорення матеріальної точки в цьому разі визначаються у проекціях на дотичну $\bar{\tau}$ та нормаль \bar{n} і дорівнюють

$$\begin{aligned}
 a^\tau &= \frac{dv}{dt}, \\
 a^n &= \frac{v^2}{\rho},
 \end{aligned}$$

де v – швидкість матеріальної точки; ρ – радіус кривизни траєкторії руху.

Проекція прискорення точки на бінормаль відсутня $a^b = 0$.

Тоді диференціальні рівняння руху матеріальної точки мають вигляд

$$\begin{aligned}
 m \frac{dv}{dt} &= \sum_{i=1}^n F_i^\tau, \\
 m \frac{v^2}{\rho} &= \sum_{i=1}^n F_i^n, \\
 0 &= \sum_{i=1}^n F_i^b,
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

де останнє рівняння, в проекції на бінормаль, є, фактично, рівнянням статички.

10.5. Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки

При вивченні невільної точки, що обмежена в русі іншими умовами або тілами – в'язями, то використовують принцип звільнення від в'язей. Він дозволяє вважати точку вільною, якщо прикласти до неї реакції в'язей.

Тому диференціальне рівняння в векторній формі має вигляд:

$$m\bar{a} = \bar{F} + \bar{R},$$

де \bar{F} – рівнодійна активних сил, \bar{R} – рівнодійна реакцій в'язей.

В проекціях на декартові і натуральні осі відповідно маємо

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= F_x + R_x, \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= F_y + R_y, \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= F_z + R_z, \end{aligned} \tag{3.8}$$

або

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F_\tau + R_\tau, \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F_n + R_n, \\ 0 &= F_b + R_b \end{aligned} \tag{3.9}$$

10.6. Дві основні задачі динаміки матеріальної точки

Оскільки основний закон динаміки матеріальної точки (3.1) та складені за його допомогою диференціальні рівняння руху мають у лівій частині прискорення, тобто кінематичну характеристику руху, а у правій частині – геометричну суму сил, які діють на точку, тобто силові характеристики руху, то у залежності від того, яка характеристика руху потребує визначення, формулюються дві основні задачі динаміки матеріальної точки.

1. Перша задача динаміки

Перша задача динаміки формулюється таким чином: за заданій масі матеріальної точки і закону її руху визначити силу, яка діє на матеріальну точку або рівнодійну силу.

В цьому випадку розв'язок задачі зводиться до диференціювання рівнянь руху матеріальної точки.

Розглянемо приклад розв'язування першої задачі динаміки матеріальної точки.

Приклад

Умова: матеріальна точка рухається згідно таких рівнянь

$$\begin{cases} x = at, \\ y = bt - ct^2, \end{cases}$$

де $a, b, c - \text{const}$.

Треба визначити рівнодійну силу, яка діє на цю матеріальну точку.

Розв'язання

Знайдемо проекції швидкості на координатні осі x та y

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = a;$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = b - 2ct.$$

Знайдемо проекції прискорення матеріальної точки на ці осі координат

$$a_x = \ddot{x} = \frac{dv_x}{dt} = 0;$$

$$a_y = \ddot{y} = \frac{dv_y}{dt} = -2c.$$

Тоді проекції рівнодійної сили на координатні осі дорівнюють

$$F_x = ma_x = 0,$$

$$F_y = ma_y = -2mc.$$

Рівнодійна сила, яка діє на матеріальну точку, дорівнює

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 2mc.$$

Ця сила діє паралельно осі Oy і спрямована у бік, протилежний від напрямку даної осі.

2. Друга задача динаміки

Сформулюємо другу задачу динаміки: *згідно заданим силам, які діють на матеріальну точку, визначити закон її руху.*

Таким чином, друга задача динаміки матеріальної точки зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху. При цьому повинні бути заданими початкові умови руху матеріальної точки: положення і швидкості точки у початковий момент часу.

Якщо розглядається рух вільної матеріальної точки, то існує така послідовність розв'язку основної задачі динаміки матеріальної точки:

- зображують точку у довільному положенні її руху та показують усі сили, які діють на точку;
- вибирають систему координат;
- записують початкові умови руху матеріальної точки;
- складають диференціальні рівняння руху точки;
- методом інтегрування диференціальних рівнянь руху знаходять рівняння її руху і, виходячи з початкових умов, визначають сталі інтегрування;
- аналізують отриманий розв'язок та визначають невідомі величини.

При розв'язанні другої задачі відомими є сили, які діють на точку певної маси, координати і швидкість в початковий момент часу. Необхідно знайти кінематичні рівняння руху точки (закон руху). Розв'язання цієї задачі зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки (3.6) або (3.7).

Визначивши проекції сил на осі координат F_x, F_y, F_z і підставивши їх в праву частину рівнянь, інтегруємо систему.

Розв'язком цієї системи рівнянь буде функція часу і шість сталих інтегрування C_1, C_2, \dots, C_6 :

$$\begin{aligned}x &= x(t, C_1, C_2, \dots, C_6) , \\y &= y(t, C_1, C_2, \dots, C_6) , \\z &= z(t, C_1, C_2, \dots, C_6) .\end{aligned}\tag{3.10}$$

Для визначення сталих інтегрування необхідні початкові умови – координати і швидкості в початковий момент:

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0; & y(t_0) &= y_0; & z(t_0) &= z_0; \\ \dot{x}(t_0) &= \dot{x}_0; & \dot{y}(t_0) &= \dot{y}_0; & \dot{z}(t_0) &= \dot{z}_0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Тоді, остаточно, розв'язок має вираз

$$\begin{aligned} x &= x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ y &= y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ z &= z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Вирази (3.12) називають загальним розв'язком диференціальних рівнянь руху точки.

Розглядаючи рух в натуральній формі, для розв'язання основної задачі застосовують диференціальні рівняння (3.7).

Початковими умовами руху є значення дугової координати при $t = 0$: $s(t_0)$ і початкова швидкість $v(t_0) = \dot{s}_0$.

10.7. Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки у простих випадках

Інтегрування диференціальних рівнянь в значній мірі залежить від виду функції сили, яку підставляють в праву частину рівняння. У загальному визначенні сила є функцією одночасно трьох кінематичних параметрів: часу, переміщення і швидкості $\bar{F} = \bar{F}(t, s, v)$.

Інтегрування в цьому випадку є складною задачею.

Проте, у техніці і природі часто зустрічаються сили, які залежать від одного кінематичного параметра.

Так, сили, що мають місце при дослідженні роботи різного роду механізмів і машин, явно залежать від часу.

До позиційних сил, що залежать від положення точки (переміщення), належать сили пружності, які виникають у пружних тілах при їх деформації, а також сили тяжіння або відштовхування, що виникають при взаємодії тіл, які мають електромагнітні заряди.

Сили, що залежать від швидкості, зустрічаються при дослідженні руху тіл у в'язкому середовищі (рідкому, газоподібному).

Надамо методику і приклади розв'язування другої задачі динаміки у випадках, якщо сили є сталими за величиною і напрямом і коли змінюються в залежності від часу, переміщення і швидкості.

Прямолінійний рух точки

Матеріальна точка рухається прямолінійно, вісь x - направимо в сторону руху точки.

Тоді

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow F_y = 0; \quad F_z = 0.$$

Рушійна сила спрямована вздовж осі: $F_x = F$.

Проте, ця умова необхідна, але недостатня.

Потрібно також, щоб і початкова швидкість була спрямована вздовж осі $v_0 = v_{0x}$.

а) Рух точки під дією сили, яка є сталою величиною

Приклад

Матеріальна точка масою m рухається вздовж осі x під дією сили $Q = \text{const}$. Визначити закон руху точки, якщо в початковий момент її координата була $x = x_0$, а початкова швидкість $v(t_0) = v_0$.

Розрахункова схема представлена на рис. 3.2.

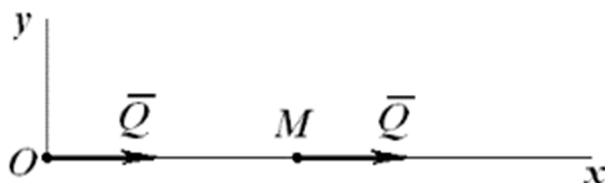


Рис. 3.2

Розв'язання

Запишемо диференціальне рівняння в проекції на вісь x (3.6):

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}. \quad (\text{a})$$

Підставимо в праву частину (а) проекції сили (рис. 3.2)

$$m\ddot{x} = Q_x = Q; \quad \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}; \quad m \frac{dv_x}{dt} = Q;$$

розділимо змінні:

$$dv_x = \frac{Q}{m} dt.$$

Інтегруємо ліву і праву частини

$$\int dv_x = \frac{Q}{m} \int dt + C_1 \Rightarrow v_x = \frac{Q}{m} t + C_1; \quad (б)$$

підставимо $v_x = \frac{dx}{dt}$; $\frac{dx}{dt} = \frac{Q}{m} t + C_1$; розділимо змінні і інтегруємо ще один раз:

$$\int dx = \frac{Q}{m} \int t dt + C_1 \int dt; \quad x = \frac{Q t^2}{m 2} + C_1 t + C_2. \quad (в)$$

Для визначення сталих інтегрування C_1 і C_2 підставимо в рівняння (б) і (в) початкові умови при $t = t_0 = 0$:

$$x = x_0; \quad v(t_0) = v_0;$$

$$v_0 = \frac{Q}{m} t \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = v_0;$$

$$x_0 = \frac{Q}{m} \frac{0}{2} + v_0 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = x_0.$$

Остаточно закон руху точки

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{Q t^2}{m 2}. \quad (г)$$

Аналіз виразу (г) показує, що матеріальна точка під дією сталої сили рухається рівнозмінно з прискоренням, яке дорівнює $a_\tau = \frac{Q}{m}$.

б) Рух точки під дією сили, яка залежить від часу

Приклад

Трактор вагою P рухається по прямій лінії і під час розгону його сила тяги збільшується по закону $F = kt$, де t – час у секундах, k - сталий коефіцієнт. Визначити закон руху трактора під час розгону.

Розв'язання

Маса трактора рухається поступально, тому його можна вважати точкою. Направимо вісь x в напрямку руху, а початок відліку помістимо в нерухомій точці, де трактор був при $t_0 = 0$, тоді $x = x_0 = 0$.

Диференціальне рівняння:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}; \quad m \frac{dv_x}{dt} = F_x = kt; \quad m = \frac{P}{g}. \quad (а)$$

Розділимо змінні в (а), помножуючи на dt ліву і праву частини:

$$\int dv_x = \frac{k}{m} \int t dt + C_1.$$

Інтегруємо:

$$v_x = \frac{k}{m} \frac{t^2}{2} + C_1. \quad (б)$$

Підставимо в (б) $v_x = \frac{dx}{dt}$ і розділяємо змінні:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{m} \frac{t^2}{2} + C_1; \quad \int dx = \frac{k}{m} \int \frac{t^2}{2} dt + C_1 \int dt + C_2.$$

Інтегруємо:

$$x = \frac{k}{m} \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2. \quad (в)$$

Для визначення сталих інтегрування в рівняннях (б) і (в) підставимо початкові умови при $t = t_0 = 0$:

$$x = x_0 = 0; \quad v_x = v_{0x} = 0;$$

$$0 = \frac{k}{m} \frac{0}{2} + C_1 \Rightarrow C_1 = 0;$$

$$0 = \frac{k}{m} \frac{0}{2} + 0 \cdot C_1 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Остаточо закон руху має вигляд

$$x = \frac{kg}{P} \frac{t^3}{6} \text{ (м)}.$$

в) Рух точки під дією сили, яка залежить від швидкості

Приклад

Тіло M вагою \bar{G} падає донизу без початкової швидкості із точки O , яка прийнята за початок координат (рис. 3.3). Опір повітря пропорційний швидкості $\bar{R} = \alpha \bar{v}$, де α - коефіцієнт пропорційності. Визначити закон руху тіла:

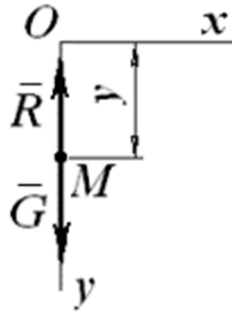


Рис. 3.3

Розв'язання

Складемо диференціальне рівняння руху тіла під дією сили тяжіння \bar{G} і сили опору повітря \bar{R} в проекції на вісь y :

$$m\ddot{y} = \sum F_{ky};$$

$$m\ddot{y} = G_y - R_y = mg - \alpha \cdot v. \quad (\text{а})$$

Знизимо порядок рівняння (а), переходячи $\ddot{y} = \frac{dv}{dt}$, і поділимо рівняння на масу m , позначаючи $\frac{\alpha}{m} = k$:

$$\frac{dv}{dt} = g - kv, \text{ або } dv = (g - kv)dt.$$

Розділимо змінні: $\frac{dv}{g - kv} = dt.$

Введемо нову змінну $u = g - kv$, тоді $du = -kdv$ і $dv = -\frac{du}{k}$, отримаємо рівняння $\frac{du}{u} = -kdt.$

Після інтегрування маємо:

$$\ln u = -kt + C_1, \text{ або } \ln(g - kv) = -kt + C_1 \quad (\text{б})$$

Із рівняння (б) визначимо значення C_1 , підставивши початкові умови при $t = t_0 = 0$; $v = v_0 = 0$:

$$\ln(g - k \cdot 0) = -k \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = \ln g.$$

Підставимо значення C_1 в рівняння і визначимо швидкість v :

$$\ln(g - kv) = -kt + \ln g; \quad \ln\left(\frac{g - kv}{g}\right) = -kt. \quad (\text{в})$$

Потенціюємо вираз (в)

$$\frac{g - kv}{g} = e^{-kt}; \quad v = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}). \quad (\text{г})$$

Аналіз виразу (г) показує, що при $t \rightarrow \infty$ маємо $e^{-kt} \rightarrow 0$, $v \rightarrow \frac{g}{k}$,

тобто максимальна швидкість буде $v_{\max} = \frac{g}{k}$, а рух стає рівномірним.

Представимо рівняння (г) у вигляді

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}),$$

або

$$dy = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt})dt. \quad (\text{д})$$

Інтегруємо рівняння(д):

$$y = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}e^{-kt} + C_2. \quad (\text{е})$$

Для визначення C_2 підставимо в (е) початкові умови $t = t_0 = 0$, $y = y_0 = 0$:

$$0 = \frac{g}{k} + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{g}{k}.$$

Підставимо значення C_2 в (е), отримаємо рівняння руху тіла, що падає, долаючи опір повітря:

$$y = \frac{g}{k}t - \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt}).$$

г) Рух точки під дією сили, яка залежить від переміщення

Приклад

Матеріальна точка M масою m рухається вздовж осі x під дією сили, яка пропорційна відстані $F = kmx$, де $k = 4$. На початку руху при $t = t_0 = 0$: $x_0 = 5$ м; $v_0 = 2$ м/с. Визначити закон руху точки (рис 3.4).

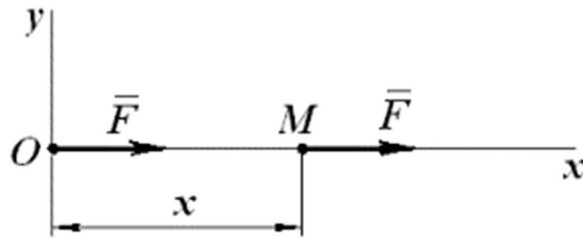


Рис. 3.4

Розв'язання

Складаємо диференціальне рівняння руху в проекції на вісь x :

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}; \quad m\ddot{x} = F_x = kmx; \\ \ddot{x} - 4x = 0. \quad (\text{а})$$

Рівняння (а) є однорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталим коефіцієнтом.

Розв'язок його шукаємо в формі

$$x = Ae^{ut} \quad (\text{б})$$

Взявши першу \dot{x} та другу \ddot{x} похідні за часом від виразу (б), підставимо в (а) і після скорочень отримаємо характеристичне рівняння

$$u^2 - 4 = 0,$$

корні якого дорівнюють: $u_1 = 2; u_2 = -2$.

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння буде:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}. \quad (\text{г})$$

Для визначення двох сталих інтегрування C_1 і C_2 необхідне друге рівняння, яке отримаємо, взявши похідну за часом від (г):

$$v = \frac{dx}{dt} = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t}. \quad (\text{д})$$

Підставимо в (г) і (д) початкові умови, отримаємо алгебраїчні рівняння, з яких і визначимо сталі інтегрування:

$$\begin{cases} 5 = C_1 + C_2; \\ 2 = 2C_1 - 2C_2. \end{cases}$$

Звідки $C_1 = 3; C_2 = 2$.

Остаточно матимемо закон руху точки, підставивши в (г) $C_1 = 3$;
 $C_2 = 2$:

$$x = 3e^{2t} + 2e^{-2t} \text{ (м)}.$$

Запитання для самоконтролю

10. Що вивчає динаміка? Її основні задачі.
11. Сформулюйте основні закони динаміки.
12. Напишіть диференціальні рівняння руху точки в координатній і натуральній формах.
13. Напишіть диференціальні рівняння руху невільної точки.
14. Як формулюється і розв'язується перша задача динаміки?
15. Як формулюється і розв'язується друга задача динаміки?
16. Що таке початкові умови руху точки?
17. Як визначаються сталі інтегрування диференціальних рівнянь?

РОЗДІЛ 11. ДИНАМІКА СИСТЕМИ МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК. ГЕОМЕТРІЯ МАС. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РУХУ

11.1. Механічна система матеріальних точок. Сили зовнішні та внутрішні

В попередніх випадках розглядався рух окремих матеріальних точок. Але в задачах механіки досить часто необхідно розглядати не окрему матеріальну точку, а її систему.

Слід нагадати, що *механічна система матеріальних точок* (далі – *механічна система*) – це така сукупність точок, положення і рух яких є взаємопов'язаними.

Класичним прикладом механічної системи є сонячна система, в якій всі тіла, що розглядаються як матеріальні точки, взаємопов'язані силами взаємного тяжіння.

Всяке тверде матеріальне тіло, що складається з окремих його точок, взаємопов'язаних внутрішніми міжмолекулярними силами взаємодії, може також розглядатись як механічна система.

Іншим прикладом механічної системи може бути люба машина або механізм, в яких робочі органи зв'язані шарнірами, стержнями, тросами і т. ін. (тобто різними геометричними в'язями). В цьому випадку на тіла системи діють сили взаємного тиску або натягу, що передаються через в'язі.

Сукупність тіл, між якими немає ніяких сил взаємодії (наприклад, група літаків, що рухаються в небі), систему не створюють.

Внаслідок цього, сили, що діють на точки або тіла системи, можуть поділяються на *зовнішні і внутрішні*.

– *внутрішні сили* – це сили взаємодії між точками самої механічної системи;

– *зовнішні сили* – це сили, які діють на точки системи з боку точок, які не належать даній механічній системі.

Внутрішні сили позначаються \bar{F}_k^{in} , зовнішні – \bar{F}_k^e .

Внутрішні сили мають такі властивості:

– внутрішні сили діють на механічну систему попарно, як дія і протидія ($\bar{F}_1^{in} = -\bar{F}_2^{in}$);

– геометрична сума внутрішніх сил або головний вектор внутрішніх сил дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{in} = 0; \quad (3.13)$$

– геометрична сума моментів усіх внутрішніх сил відносно будь-якого центра або головний момент внутрішніх сил і алгебраїчна сума сил відносно осі дорівнюють нулю

$$\sum_{k=1}^n \bar{m}_o(\bar{F}_k^{in}) = 0; \quad \sum_{k=1}^n \bar{m}_z(\bar{F}_k^{in}) = 0. \quad (3.14)$$

Як внутрішні, так зовнішні сили можуть бути в свою чергу або активними, або реакціями в'язей.

Розподіл сил на зовнішні і внутрішні сили є умовним і залежить від того, рух якої системи тіл розглядають.

Так, наприклад, тиск пару на поршень парової машини є зовнішньою силою по відношенню до поршня і внутрішньою силою по відношенню до всієї машини.

11.2. Маса і центр мас механічної системи

На рух системи, крім діючих сил, впливає також її сумарна маса і розподіл мас.

Нехай механічна система складається із n матеріальних точок, з масами $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, положення кожної з яких відносно фіксованої у просторі точки, визначається її радіус – вектором $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \dots, \bar{r}_n$.

Маса такої системи дорівнює арифметичній сумі мас кожної її точки:

$$M = \sum_{k=1}^n m_k. \quad (3.15)$$

Центр мас системи визначається відповідно до положення центра ваги тіла і буде геометричною точкою, радіус-вектор якої визначається виразом:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k}{M}, \quad (3.16)$$

де M – маса механічної системи; \bar{r}_k – радіус-вектор k -ї точки системи.

Тоді положення центра мас механічної системи в системі координатних осей x, y, z можна визначити за наступними виразами:

$$\begin{aligned}
 x_c &= \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{M}, \\
 y_c &= \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{M}, \\
 z_c &= \frac{\sum_{k=1}^n m_k z_k}{M},
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

де x_k, y_k, z_k – координати окремих матеріальних точок механічної системи.

У однорідному силовому полі Землі центр мас механічної системи співпадає з його центром ваги.

11.3. Диференціальні рівняння руху механічної системи

Розглянемо деяку механічну систему, яка складається з n матеріальних точок, маси яких

$$m_1, m_2, m_3, \dots, m_n;$$

положення кожної точки відносно будь – якого центра визначається її радіус-вектором

$$\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \dots, \bar{r}_n;$$

до кожної точки системи прикладена рівнодійна внутрішніх сил

$$\bar{F}_1^{in}, \bar{F}_2^{in}, \bar{F}_3^{in}, \dots, \bar{F}_n^{in};$$

а також і зовнішніх сил

$$\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \bar{F}_3^e, \dots, \bar{F}_n^e.$$

Для кожної точки даної механічної системи у векторній формі можна скласти такі рівняння руху

$$m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \bar{F}_k^{in} + \bar{F}_k^e, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{3.18}$$

Система отриманих рівнянь і є системою диференціальних рівнянь руху механічної системи у векторній формі.

В проєкціях на координатні осі рівняння (3.18) матимуть вигляд

$$\begin{aligned}
m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} &= \bar{F}_{kx}^{in} + \bar{F}_{kx}^e; \\
m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} &= \bar{F}_{ky}^{in} + \bar{F}_{ky}^e; \\
m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} &= \bar{F}_{kz}^{in} + \bar{F}_{kz}^e.
\end{aligned}
\tag{3.19}$$

Таким чином, якщо система складається із n матеріальних точок, то необхідно скласти $3n$ диференціальних рівнянь другого порядку (3.19).

11.4. Рух центра мас механічної системи

Характер руху механічної системи іноді можна визначити по закону руху центра мас механічної системи.

Для механічної системи, яка складається з n матеріальних точок, запишемо диференціальні рівняння у формі (3.18) і просумуємо почленно по всіх точках:

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{in} + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e.
\tag{3.20}$$

Згідно наведених вище властивостей внутрішніх сил $\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^{in} = 0$, отже другий доданок у рівнянні (3.20) зникає і воно матиме наступний вигляд

$$\sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e.
\tag{3.21}$$

Із виразу (3.16) можна записати:

$$M \bar{r}_c = \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k.
\tag{3.21}$$

Візьмемо другу похідну за часом від лівої та правої частин виразу (3.21):

$$M \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2}.
\tag{3.22}$$

З отриманого виразу (3.22) випливає, що його права частина співпадає з лівою частиною виразу (3.21), тому, остаточно, можна записати:

$$M \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e,$$

або

$$M \frac{d\bar{v}_c}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e,$$

$$M \bar{a}_c = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e. \quad (3.23)$$

Таким чином, добуток маси механічної системи на прискорення її центра мас дорівнює геометричній сумі усіх зовнішніх сил, які діють на дану механічну систему.

Останнє рівняння виражає теорему про рух центра мас механічної системи:

Центр мас механічної системи рухається, як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі усієї системи і на яку діють усі зовнішні сили системи.

Рівнянню (3.23) відповідає три рівняння в проекціях:

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 x_c}{dt^2} &= \sum F_{kx}^e; \\ M \frac{d^2 y_c}{dt^2} &= \sum F_{ky}^e; \\ M \frac{d^2 z_c}{dt^2} &= \sum F_{kz}^e. \end{aligned} \quad (3.24)$$

З цієї теореми можна зробити висновок, що рух центра мас системи залежить тільки від зовнішніх сил, які діють на механічну систему, внутрішні сили не змінюють положення центра мас.

Проте, внутрішні сили можуть здійснювати не прямий вплив на рух центра мас, а лише через зовнішні сили.

Наприклад, в автомобілі внутрішні сили, що розвиває двигун, впливають на рух його центра мас лише через сили тертя коліс з дорогою.

Пара сил, яка прикладена до тіла, не може змінити характер руху його центра мас, бо головний вектор пари сил дорівнює нулю. Пара сил може спричинити лише обертання тіла навколо центра мас.

11.5. Геометрія мас. Моменти інерції маси тіла

Положення центра мас тіла недостатньо повно характеризує розподіл мас по об'єму.

Якщо маси усіх точок змістити на однакову відстань від центра мас, то положення центра мас не зміниться, але на рух тіла, особливо обертальний, це вплине суттєво.

Тому у механіці введена ще одна характеристика розподілу мас по об'єму – момент інерції маси тіла.

Розрізняють моменти інерції осьові, полярні, відцентрові.

Осьовий момент інерції маси тіла (системи матеріальних точок) відносно осі "z" – це скалярна величина, яка дорівнює сумі добутків мас окремих точок на квадрати їх відстаней до осі z.

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k r_{kz}^2, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.25)$$

Осьовий момент інерції маси тіла є завжди додатною величиною і характеризує міру інертності тіла при обертальному русі.

Одиниця виміру осьового моменту інерції маси тіла:

Система *СИ*: $1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Якщо тіло суцільне або має неперервний розподіл маси, то його момент інерції визначається інтегралом, поширеним на всю масу:

$$I_z = \int_{(M)} r^2 dm. \quad (3.26)$$

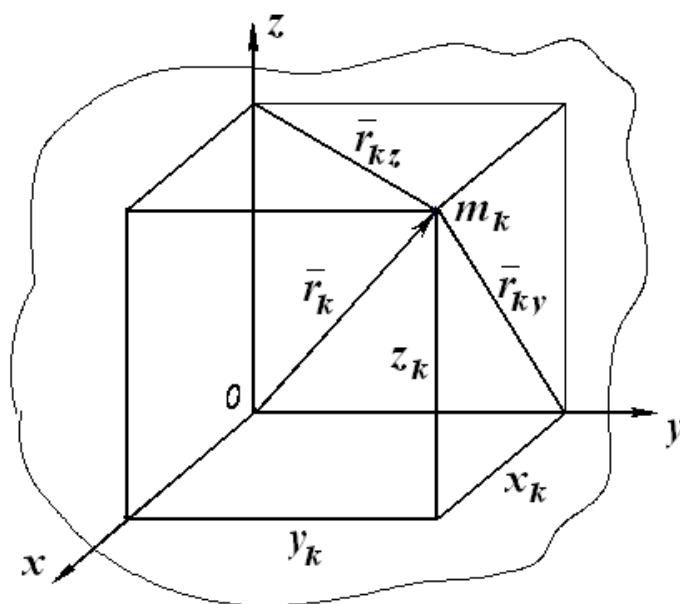


Рис. 3.5

Визначимо осьові і полярні моменти інерції тіла (рис. 3.5).

Якщо відомі координати окремих точок тіла, то осьові моменти інерції маси тіла можна обчислювати за формулами:

$$\begin{aligned}I_z &= \sum m_k r_{kz}^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2), \\I_y &= \sum m_k r_{ky}^2 = \sum m_k (x_k^2 + z_k^2), \\I_x &= \sum m_k r_{kx}^2 = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2).\end{aligned}\tag{3.27}$$

Якщо додати три осьових моменти інерції, то отримуємо:

$$I_x + I_y + I_z = 2\sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) = 2\sum m_k r_k^2 = 2I_0,$$

де r_k – діагональ показаного на схемі паралелепіпеда, радіус-вектор k -тої точки; I_0 – полярний момент інерції відносно точки O .

Полярний момент інерції тіла відносно довільної точки O можна знайти як суму добутків мас точок тіла на квадрати їх відстаней до цієї точки O :

$$I_0 = \sum m_k r_k^2,\tag{3.28}$$

де $r_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2$.

11.6. Радіус інерції тіла

Радіус інерції ρ маси тіла – це відстань, на квадрат якої потрібно помножити масу тіла, щоб отримати осьовий момент інерції маси тіла.

$$I_z = M \cdot \rho^2,\tag{3.29}$$

де M – маса тіла.

Із виразу (3.29) можна знайти співвідношення для визначення радіуса інерції

$$\rho = \sqrt{\frac{I_z}{M}}.$$

Геометрично радіус інерції тіла можна уявити як радіус умовного нескінченно тонкого колового циліндра, маса і момент інерції якого дорівнюють масі і моменту інерції тіла.

11.7. Моменти інерції маси тіла відносно паралельних осей

Припустимо, що маємо тіло, центр мас якого відомий і через нього проведена система центральних осей координат.

Тоді момент інерції маси тіла відносно осі, яка паралельна даній центральній осі і розміщена на відстані a від неї, визначається наступним чином:

Момент інерції маси тіла відносно будь-якої осі z дорівнює моменту інерції маси тіла відносно паралельної осі, яка проходить через центр мас, доданим до добутку маси тіла на квадрат відстані між осями (рис.3.6).

$$I_z = I_{z_c} + M \cdot a^2. \quad (3.30)$$

де M – маса тіла; C – центр мас; z_c – вісь, яка проходить через центр мас; z – вісь, яка паралельна осі z_c ; a – відстань між осями.

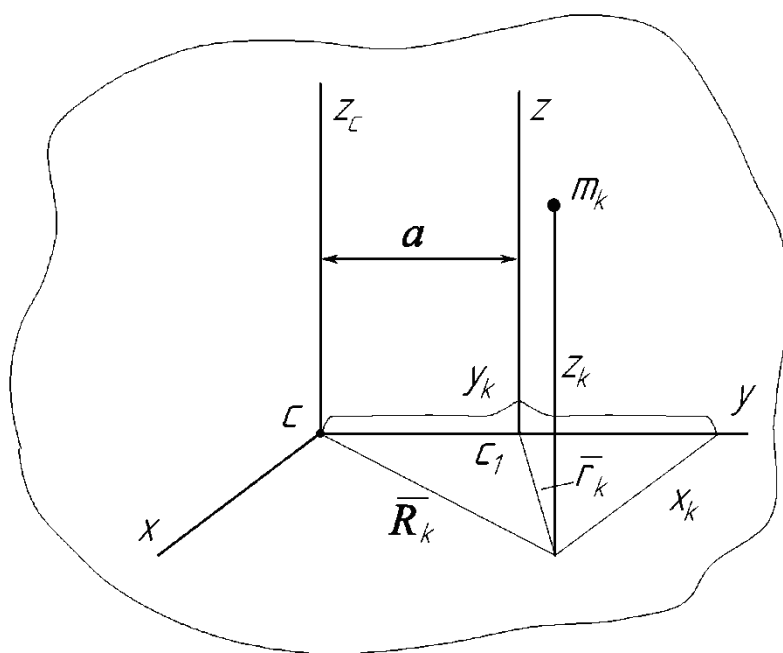


Рис. 3.6

Розглянемо довільну точку m_k з координатами x_k, y_k, z_k відносно центральної осі. Відстані її до осей z_c і z дорівнюють відповідно R_k і r_k . Визначимо момент інерції маси тіла відносно осі, як суму добутків мас на квадрати їх відстаней до осі z :

$$I_z = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2 = \sum m_k [(y_k - a)^2 + x_k^2] = \sum m_k (y_k^2 + x_k^2) + a^2 \sum m_k - 2a \sum m_k y_k.$$

Проаналізуємо три доданки:

$\sum m_k (y_k^2 + x_k^2) = \sum m_k R_k^2 = I_{z_c}$ – момент інерції тіла відносно центральної осі z_c ;

$\sum m_k = M$ – маса тіла;

$\sum m_k y_k = M \cdot y_c = 0$ доданок, який дорівнює нулю, оскільки координата центра мас $y_c = 0$ відносно центральної осі.

В результаті отримаємо вираз (3.30).

11.8. Приклади визначення моментів інерції тіл простої форми

1) Однорідний тонкий стержень масою M обертається навколо осі z , яка проходить через кінець стержня (рис. 3.7).

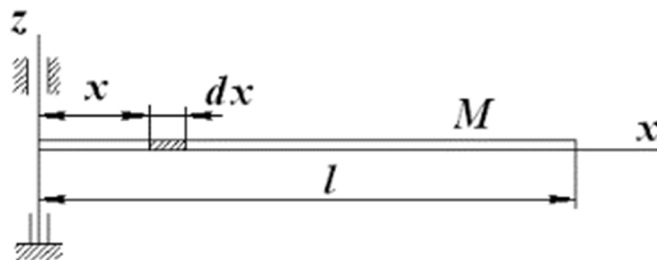


Рис. 3.7

$I_z = \int dm \cdot r^2$, як для суцільного тіла; $r = x$; елементарна маса для тонкого стержня (лінії) дорівнюватиме

$$dm = \mu \cdot dx,$$

де $\mu = \frac{M}{l}$ – маса одиниці довжини стержня.

Тоді осьовий момент інерції буде дорівнювати:

$$I_z = \int_0^l dm \cdot x^2 = \int_0^l \mu dx \cdot x^2 = \mu \int_0^l x^2 dx = \frac{\mu x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{\mu l^3}{3} = \frac{M \cdot l^3}{l \cdot 3} = \frac{M \cdot l^2}{3}, \quad (3.31)$$

$$I_z = \frac{Ml^2}{3}.$$

2) Однорідний стержень масою M і довжиною l обертається навколо осі, яка проходить через його середину (рис. 3.8).

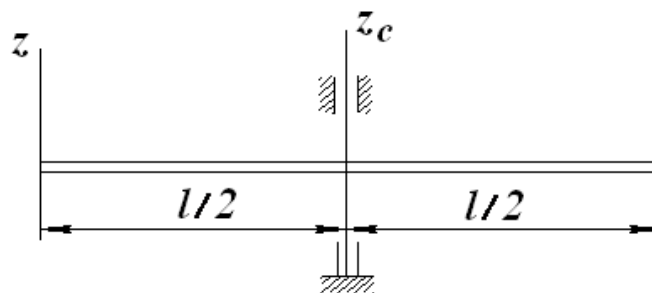


Рис. 3.8

Момент інерції відносно паралельної осі $I_z = I_{z_c} + M \left(\frac{l}{2} \right)^2$, звідкіля

$$I_{z_c} = I_z - \frac{Ml^2}{4} = \frac{Ml^2}{3} - \frac{Ml^2}{4} = \frac{Ml^2}{12};$$

$$I_z = \frac{Ml^2}{12}. \quad (3.32)$$

3) Однорідне тонке кільце радіуса R . Вісь z перпендикулярна площині кільця.

Усі точки кільця розташовані на однаковій відстані R від осі z , тому момент інерції маси кільця дорівнює $I_z = MR^2$.

Для двох інших взаємоперпендикулярних осей момент інерції буде вдвічі менше.

4) Кругла однорідна пластина або однорідний циліндр радіуса R (рис.3.9).

Враховуючи, що $\mu = \frac{M}{\pi R^2}$ – маса, яка припадає на одиницю площі

круга, то елементарна маса буде дорівнювати:

$$dm = \mu \cdot ds = \mu \cdot 2\pi r \cdot dr,$$

тоді

$$I_z = \int_0^R dm \cdot r^2 = \int_0^R \mu \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot r^2 = 2\pi\mu \int_0^R r^3 dr = \frac{\mu\pi R^4}{2} = \frac{M\pi R^4}{2\pi R^2} = \frac{MR^2}{2},$$

або

$$I_z = \frac{MR^2}{2}, \quad (3.33)$$

Відносно інших осей

$$I_x = I_y = \frac{MR^2}{4}.$$

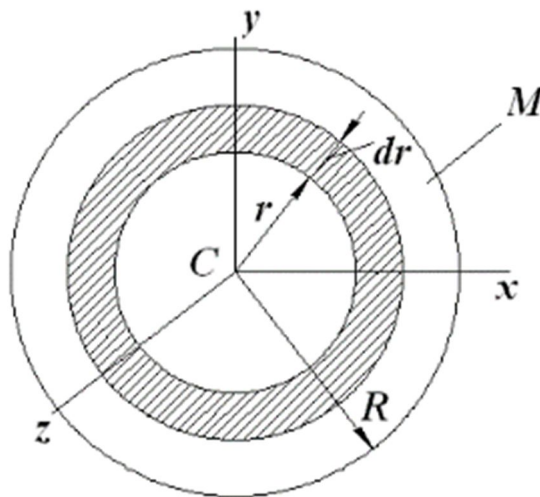


Рис. 3.9

5) Прямий коловий однорідний конус масою M і радіусом основи R

$$I_z = 0.3MR^2,$$

де z – вісь, яка проходить крізь вершину і центр кола основи.

6) Однорідна куля радіуса R

$$I_z = I_x = I_y = 0.4MR^2.$$

11.9. Відцентрові моменти інерції маси тіла

Осьові моменти інерції маси тіла не повністю характеризують розподіл маси по об'єму тіла.

Для характеристики асиметричного розподілу мас в механіці введені, так звані, відцентрові моменти інерції.

$$I_{xy} = \sum m_k x_k y_k ; I_{xz} = \sum m_k y_k z_k ; I_{yz} = \sum m_k x_k z_k \quad (3.34)$$

Для суцільного тіла знак суми замінюється інтегралом

$$I_{xy} = \int_M dm \cdot x \cdot y.$$

Таким чином, відцентровий момент інерції дорівнює сумі добутків мас точок на їх відстані до двох координатних осей.

Величини відцентрових моментів інерції залежать від напрямку координатних осей і вибору початку координат.

Тому, говорячи про відцентровий момент у даній точці, розуміють, що початок координат збігається з цією точкою.

Відцентрові моменти інерції можуть дорівнювати нулю і мати додатний або від'ємний знак.

11.10. Головні осі та головні моменти інерції тіла

Нехай вісь Oz – вісь симетрії тіла.

Тоді в тілі завжди знайдуться точки з симетричними координатами по одну і другу сторону від осі:

$$\begin{cases} x_k ; y_k ; z_k ; \\ -x_k ; -y_k ; z_k . \end{cases}$$

Асиметрія в цьому випадку відсутня і моменти інерції тіла, що характеризують асиметрію – відцентрові моменти інерції – повинні дорівнювати нулю:

$$\begin{cases} \sum m_k x_k z_k = 0 \\ \sum m_k y_k z_k = 0 \end{cases}'$$

тобто

$$\begin{cases} I_{xz} = 0 \\ I_{yz} = 0. \end{cases}$$

Вісь Oz , для якої відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, $I_{xz} = 0$, $I_{yz} = 0$, є головною віссю інерції тіла.

Таким чином, якщо тіло має вісь симетрії, то вона є головною віссю інерції.

Якщо усі відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, тобто

$$I_{xy} = 0; I_{xz} = 0; I_{yz} = 0,$$

то кожна з координатних осей є головною віссю інерції даного тіла для точки O початку координат.

Моменти інерції тіла відносно головних осей інерції є головними моментами інерції.

Через довільну точку будь-якого тіла завжди можна провести хоч би одну систему трьох взаємно перпендикулярних осей, для котрих відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, тоді кожна з цих осей буде головною віссю інерції тіла.

Довільна вісь, яка проходить через центр мас тіла, називається центральною.

Головна вісь інерції, яка проходить через центр мас, є головною центральною віссю інерції.

Моменти інерції маси тіла відносно цих осей – головні центральні моменти інерції тіла.

10.11. Диференціальні рівняння руху твердого тіла

Визначимо диференціальні рівняння руху твердого тіла як системи матеріальних точок, що його утворюють.

При цьому послідовно розглянемо поступальний, обертальний і плоскопаралельний рух тіла.

1. Диференціальні рівняння поступального руху твердого тіла

При поступальному русі твердого тіла усі його точки рухаються однаково, як і його центр мас.

Тому диференціальні рівняння руху центра мас тіла і є диференціальними рівняннями поступального руху твердого тіла.

$$\begin{cases} M\ddot{x}_c = \sum F_{kx}^e, \\ M\ddot{y}_c = \sum F_{ky}^e, \\ M\ddot{z}_c = \sum F_{kz}^e, \end{cases} \quad (3.35)$$

де m – маса тіла, x_c, y_c, z_c – координати центра мас, $F_{kx}^e, F_{ky}^e, F_{kz}^e$ – проекції зовнішньої k -ї сили на осі координат.

Таким чином, вивчення поступального руху твердого тіла зводиться до вивчення руху його окремої точки – центра ваги або центра мас.

2. Диференціальні рівняння обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі

Якщо тверде тіло (рис. 3.10) обертається навколо нерухомої осі z із кутовою швидкістю ω під дією прикладених до нього сил $\bar{P}_1^e, \bar{P}_2^e, \dots, \bar{P}_n^e$, то диференціальне рівняння його обертального руху може бути записане у трьох варіантах:

$$\begin{aligned} I_z \cdot \varepsilon &= \sum m_z (\bar{P}_k^e), \\ I_z \cdot \frac{d\omega}{dt} &= \sum m_z (\bar{P}_k^e), \\ I_z \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= \sum m_z (\bar{P}_k^e), \end{aligned} \quad (3.36)$$

де $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ – кутове прискорення обертання тіла, $I_z = const$ – осьовий момент інерції маси тіла, ω – кутова швидкість, φ – кут повороту тіла, $\sum m_z (\bar{P}_k^e)$ – сума моментів усіх зовнішніх рушійних сил, що діють на тіло при його обертанні відносно осі z .

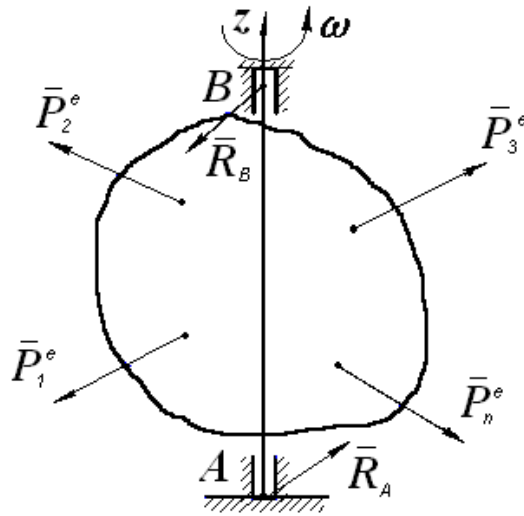


Рис. 3.10

Тобто, добуток осьового моменту інерції маси тіла відносно осі обертання на кутове прискорення дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх зовнішніх сил відносно цієї ж осі.

При вивченні обертального руху тіла за додатний приймають напрям обертання.

Тоді моменти рушійних сил, які рухають і спрямовані в напрямку обертання, мають завжди додатні значення, а моменти сил опору, які спрямовані протилежно напрямку обертання – від’ємні.

Якщо $\sum m_z(\bar{P}_k^e) > 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} > 0$ – обертальний рух прискорений.

Якщо $\sum m_z(\bar{P}_k^e) < 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} < 0$ – обертальний рух сповільнений.

Якщо $\sum m_z(\bar{P}_k^e) = 0$, то $\varepsilon = \ddot{\varphi} = 0$ – обертання рівномірне ($\omega = const$).

Приклад

Колесо масою M і радіусом R обертається навколо осі Oz з кутовою швидкістю ω_0 . Визначити час гальмування t_1 і кут повороту φ_1 до зупинки, якщо сила тиску, яка прикладена до колодки, дорівнює T , а коефіцієнт тертя ковзання дорівнює f (рис. 3.11).

M – маса колеса (розподілена по ободу);

ω_0 – початкова кутова швидкість;

T – сила, яка притискує гальмівну колодку до колеса;

f – коефіцієнт тертя ковзання;

R – радіус колеса;

$\omega_1 = 0$ – кінцева кутова швидкість.

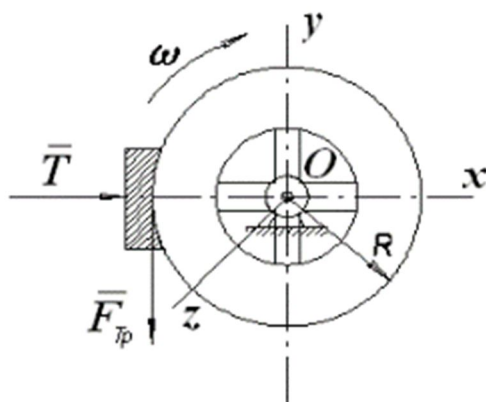


Рис. 3.11

Розв'язання

Диференціальне рівняння обертального руху колеса:

$$I_{oz} \frac{d\omega}{dt} = -F_{\delta\delta} \cdot R = -f \cdot T \cdot R; \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{fTR}{I_{oz}}.$$

Після розділення змінних і інтегрування маємо:

$$\omega = -\frac{fTR}{I_{oz}} \cdot t + c_1; \quad \text{при } t = 0: \omega = \omega_0 \Rightarrow c_1 = \omega_0; \quad \omega = \omega_0 - \frac{fTR}{I_{oz}} \cdot t \quad (\text{a})$$

При зупинці колеса $\omega = 0$ і із виразу (a) маємо:

$$\omega_0 = \frac{fTR}{I_{oz}} \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_0 I_{oz}}{fTR}. \quad (\text{б})$$

Визначимо кут повороту колеса:

$$\varphi = \int \omega \cdot dt = \int \left(\omega_0 - \frac{fTR}{I_{oz}} \cdot t \right) \cdot dt = \omega_0 t - \frac{fTR}{2I_{oz}} t^2 + c_2.$$

При $t = 0$: $\varphi = 0$, тоді $c_2 = 0$ і остаточно:

$$\varphi_1 = \omega_0 t_1 - \frac{fTR t_1^2}{2I_{oz}} = \frac{fTR t_1^2}{2I_{oz}}. \quad (\text{в})$$

Обчислимо за умовою момент інерції колеса I_{oz} :

$$I_{oz} = MR^2.$$

Підставимо його значення в рівняння (б) і (в) і отримаємо відповідь:

$$t_1 = \frac{M\omega_0 R}{fT}, \quad \varphi_1 = \frac{fTt_1^2}{2MR}.$$

3. Диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла

Відомо, що плоский або плоскопаралельний рух твердого тіла можна уявити, як суму двох найпростіших рухів: поступального разом з полюсом і обертального відносно полюса.

Якщо обрати за полюс центр мас тіла - точку C , то поступальна частина руху буде визначатись рівнянням:

$$m\bar{a}_c = \sum \bar{P}_k^e. \quad (3.37)$$

Обертальний рух відносно полюса визначається рівнянням:

$$I_{zc} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum m_z (\bar{P}_k^e). \quad (3.38)$$

У координатній формі диференціальні рівняння плоского руху тіла набувають вигляду:

$$\begin{cases} M \cdot \ddot{x}_c = \sum P_{kx}, \\ M \cdot \ddot{y}_c = \sum P_{ky}, \\ I_{zc} \cdot \ddot{\varphi} = \sum m_z (\bar{P}_k^e) \end{cases} \quad (3.39)$$

Приклад

Суцільний однорідний круглий циліндр радіуса R скочується з похилої площини без ковзання. Визначити величину прискорення центра циліндра \bar{a}_c і силу \bar{F} , яка утримує циліндр від ковзання (рис. 3.12).

M – маса циліндра,

$G = m \cdot g$ – вага циліндра,

R – радіус циліндра,

ε – кутове прискорення циліндра.

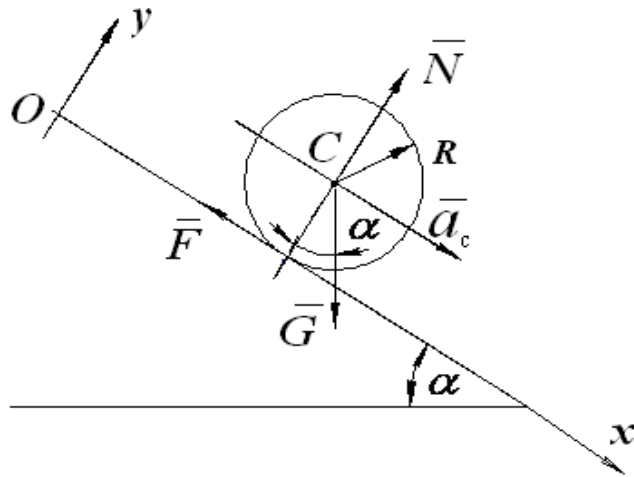


Рис. 3.12

Розв'язання

Диференціальні рівняння плоского руху:

$$\begin{cases} M \cdot a_c = G \sin \alpha - F, & (a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{zc} \cdot \varepsilon = F \cdot R, & (б) \end{cases}$$

$\varepsilon = \frac{a_c}{R}$ – підставимо в рівняння (б):

$$I_{zc} \cdot \frac{a_c}{R} = F \cdot R,$$

звідки $F = \frac{I_{zc} \cdot a_c}{R^2}$.

Тоді рівняння (а) буде мати вигляд:

$$M \cdot a_c = Mg \sin \alpha - \frac{I_{zc} \cdot a_c}{R^2};$$

$$I_{zc} = \frac{MR^2}{2}; \quad Ma_c = Mg \sin \alpha - \frac{Ma_c}{2}.$$

Після скорочення на M маємо:

$$\frac{3}{2} a_c = g \sin \alpha; \quad a_c = \frac{2}{3} g \sin \alpha;$$

$$F = \frac{I_{zc} \cdot a_c}{R^2} = \frac{MR^2 \cdot a_c}{2R^2} = \frac{1}{3} Mg \sin \alpha = \frac{1}{3} G \sin \alpha.$$

Отже

$$a_c = \frac{2}{3} g \sin \alpha ; F = \frac{1}{3} G \sin \alpha .$$

Запитання для самоконтролю

1. Чому динаміка поступального руху тіла може бути зведена до динаміки точки?
2. Напишіть формулу і сформулюйте словами вираз диференціального рівняння обертального руху тіла відносно осі.
3. В яких випадках дії сил обертальний рух тіла буде рівномірним, прискореним чи сповільненим?
4. Скільки диференціальних рівнянь визначають динаміку плоского руху твердого тіла і який вигляд вони мають?
5. Що таке центр мас і як визначаються його координати?
6. Які властивості внутрішніх сил ви знаєте?
7. Запишіть диференціальне рівняння руху механічної системи в векторній і координатній формах.
8. Напишіть алгебраїчний вираз і сформулюйте теорему про рух центра мас механічної системи.
9. Чи можуть внутрішні сили змінити положення центра мас?
10. Які моменти інерції маси тіла Вам відомі?
11. В яких одиницях вимірюється момент інерції тіла і що він характеризує?
12. Що таке радіус інерції тіла?
13. Як визначити момент інерції тіла відносно паралельних осей?
14. Як обчислити моменти інерції стержня, суцільного і трубчастого циліндра, кулі, конуса?
15. Що таке відцентрові моменти інерції тіла і як вони характеризують розподіл маси тіла?
16. Як визначити момент інерції тіла відносно довільної осі?
17. Які осі в тілі є головними, центральними осями?

РОЗДІЛ 12. РОБОТА І ПОТУЖНІСТЬ СИЛИ

12.1. Елементарна робота сили

Для характеристики дії сили на матеріальну точку або тіло при деякому його переміщенні, застосовується поняття роботи сили. При цьому робота характеризує ту дію сили, якою визначається зміна модуля швидкості руху точки.

Робота сили на нескінченно малому переміщенні її точки прикладення називається елементарною роботою сили

$$dA = \bar{P} \cdot d\bar{r}, \quad (3.40)$$

$$dA = \bar{P} \cdot |d\bar{r}| \cos(\widehat{\bar{P}, d\bar{r}}),$$

де $|d\bar{r}| = ds$ – елементарне переміщення точки M вздовж траєкторії, τ – дотична до траєкторії руху точки M (рис. 3.13).

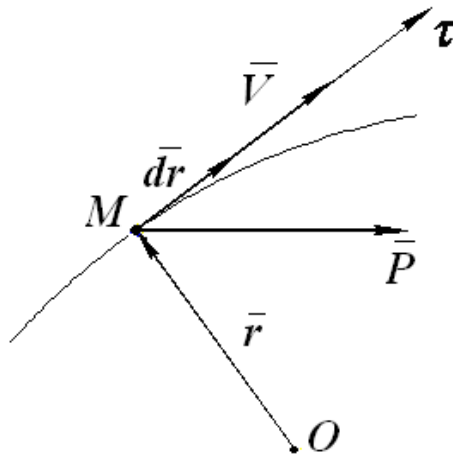


Рис. 3.13

Отже елементарна робота сили

$$dA = P \cdot ds \cdot \cos(\widehat{\bar{P}, \bar{v}}), \quad (3.41)$$

$$P \cos(\widehat{\bar{P}, \bar{v}}) = P_\tau,$$

$$dA = P_\tau \cdot ds. \quad (3.42)$$

Згідно (3.41) елементарна робота сили дорівнює добутку сили на елементарне переміщення точки прикладення сили вздовж траєкторії і на косинус кута між силою і напрямком руху (напрямком швидкості).

Якщо $(\vec{P}, \vec{v}) < 90^\circ$; – робота додатна,

Якщо $(\vec{P}, \vec{v}) = 0^\circ$; $dA = P \cdot ds$ – робота має максимум,

Якщо $(\vec{P}, \vec{v}) > 90^\circ$; – робота від’ємна,

Якщо $(\vec{P}, \vec{v}) = 90^\circ$; $dA = 0$ – робота дорівнює нулю.

Елементарна робота сили на переміщенні, яке перпендикулярне до напрямку руху точки, дорівнює нулю.

Елементарну роботу сили $dA = \vec{P} \cdot d\vec{r}$ можна виразити в аналітичній формі.

Для цього уявимо силу \vec{P} і переміщення $d\vec{r}$ через їх проекції на осі координат.

$$\vec{P} = \bar{i}P_x + \bar{j}P_y + \bar{k}P_z, \quad \vec{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z, \quad d\vec{r} = \bar{i}dx + \bar{j}dy + \bar{k}dz,$$

і підставимо у вираз роботи (3.40):

$$dA = (\bar{i}P_x + \bar{j}P_y + \bar{k}P_z) \cdot (\bar{i}dx + \bar{j}dy + \bar{k}dz),$$

звідки остаточно маємо:

$$dA = P_x dx + P_y dy + P_z dz. \quad (3.43)$$

Таким чином, елементарна робота сили дорівнює сумі добутків проекцій сили на варіації відповідних координат точки прикладення сили.

12.2. Робота сили на кінцевому переміщенні

Припустимо, що точка M перемістилась із положення M_1 до положення M_2 (рис. 3.14).

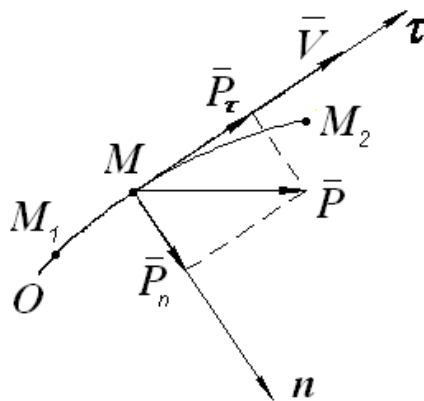


Рис. 3.14

Тоді робота сили \vec{P} на цьому переміщенні дорівнює інтегралу від елементарної роботи, взятому вздовж цього переміщення

$$A = \int_{M_1}^{M_2} dA. \quad (3.44)$$

В залежності від того, в якій формі записана елементарна робота, маємо різні формули роботи сили на кінцевому переміщенні.

$$A = \int_{M_1}^{M_2} P \cdot \cos(\widehat{\vec{P}, \vec{v}}) \cdot ds, \quad (3.45)$$

$$A = \int_{M_1}^{M_2} P_\tau \cdot ds, \quad (3.46)$$

$$A = \int_{M_1}^{M_2} (P_x \cdot dx + P_y \cdot dy + P_z \cdot dz). \quad (3.47)$$

Якщо вектор сили є сталою величиною $\vec{P} = const$ (рис. 3.15), то $P_\tau = P \cdot \cos(\widehat{\vec{P}, \vec{v}}) = const$ і тоді

$$A = P_\tau \cdot S = P \cdot S \cdot \cos(\widehat{\vec{P}, \vec{v}}).$$

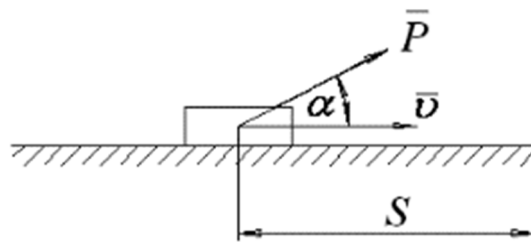


Рис. 3.15

Робота сталої сили на прямолінійному переміщенні її точки прикладення дорівнює добутку модуля сили на величину переміщення і на косинус кута між вектором сили і напрямком руху (швидкістю).

Розмірність роботи в системі СІ: $A = 1Н \cdot 1м = 1Дж$,

12.3. Графічний спосіб обчислення роботи

Робота сили може бути обчислена аналітично за допомогою формули (3.47) або графічно на підставі формули (3.46).

Для графічного обчислення роботи використовують графік зміни сили в функції переміщення, наприклад, $P_\tau = f(S)$ (рис. 3.16).

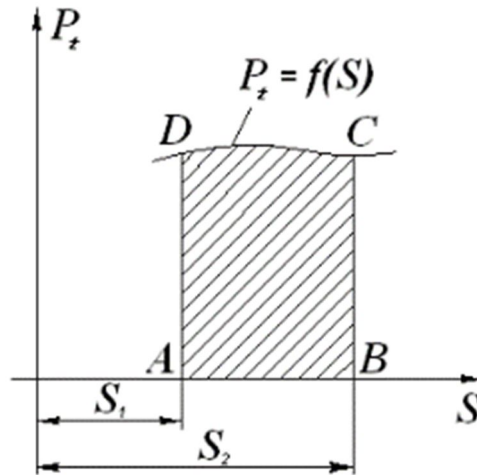


Рис. 3.16

Вздовж осі абсцис цього графіка відкладають у деякому масштабі значення дугової координати S , а вздовж осі ординат відповідні значення проекції сили на дотичну P_τ : $P_\tau = f(S)$; $dA = P_\tau \cdot dS'$,

$$A = \int_A^B P_\tau \cdot dS = \text{пл } ABCD \cdot \mu_P \cdot \mu_S, \quad (3.48)$$

де μ_P , μ_S – масштабні коефіцієнти сили і переміщення.

Отже, робота сили на переміщенні її точки прикладення обчислюється площею фігури, обмеженою віссю абсцис, кривою $P_\tau = f(S)$ і двома ординатами, які відповідають початковому і кінцевому положенню рухомої точки.

12.4. Робота рівнодійної сили

Робота рівнодійної сили на деякому шляху дорівнює алгебраїчній сумі робіт складових сил на тому ж шляху.

Проекція рівнодійної сили \bar{R} на вісь τ дорівнює алгебраїчній сумі проекцій всіх сил на вісь τ (рис. 3.17):

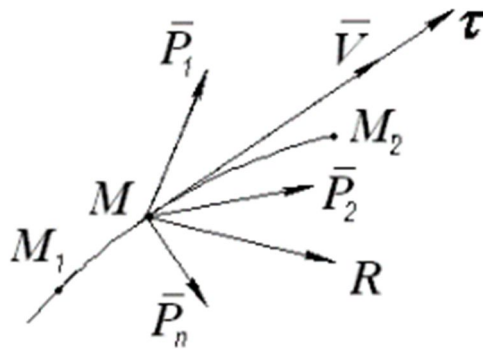


Рис. 3.17

$$\bar{R} \cdot \cos(\hat{\bar{R}, \bar{v}}) = \bar{P}_1 \cdot \cos(\hat{\bar{P}_1, \bar{v}}) + \bar{P}_2 \cdot \cos(\hat{\bar{P}_2, \bar{v}}) + \dots + \bar{P}_n \cdot \cos(\hat{\bar{P}_n, \bar{v}}) \quad (3.49)$$

Помножимо почленно рівняння (3.49) на dS і, інтегруючи від точки M_1 до точки M_2 , одержимо:

$$\int_{M_1}^{M_2} R \cos(\hat{\bar{R}, \bar{v}}) \cdot ds = \int_{M_1}^{M_2} P_1 \cos(\hat{\bar{P}_1, \bar{v}}) ds + \quad (3.50)$$

$$+ \int_{M_1}^{M_2} P_2 \cos(\hat{\bar{P}_2, \bar{v}}) ds + \dots + \int_{M_1}^{M_2} P_n \cos(\hat{\bar{P}_n, \bar{v}}) ds ,$$

$$A_R = A_1 + A_2 + \dots + A_n . \quad (3.51)$$

12.5. Потужність сили

Потужність сили – це величина, яка характеризує змінення роботи сили за одиницю часу.

$$N = \frac{dA}{dt}; \quad dA = \bar{P} \cdot d\bar{r} ,$$

$$N = \frac{\bar{P} \cdot d\bar{r}}{dt} = \bar{P} \cdot \bar{v} = P \cdot v \cdot \cos(\hat{\bar{P}, \bar{v}}) . \quad (3.52)$$

Якщо $dA = P_\tau \cdot ds'$, то

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{P_\tau ds}{dt} = P_\tau \cdot v .$$

Потужність сили в даний момент часу дорівнює добутку тангенціальної складової сили на швидкість точки прикладення сили.

$$\text{При } (\vec{P}, \vec{v}) = 0: \quad N = P \cdot v.$$

Розмірність потужності:

$$\text{система СИ:} \quad N = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ с}} = 1 \text{ Вт}, \quad 1 \text{ кВт} = 1000 \text{ Вт}.$$

12.6. Робота сили тяжіння

Нехай матеріальна точка M рухається з положення $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в положення $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Величина сили тяжіння точки дорівнює,

$$G = mg, \quad (3.53)$$

де m – маса точки; g – прискорення вільного падіння.

Обчислимо роботу сили \vec{G} на переміщенні точки M_1M_2 , величина якого мала порівняно з радіусом Землі.

Оберемо систему координат так, щоб вісь z була паралельна вертикалі (рис. 3.18).

Тоді проекції сили \vec{G} на координатній осі дорівнюють:

$$\begin{cases} G_x = 0, \\ G_y = 0, \\ G_z = -mg. \end{cases} \quad (3.54)$$

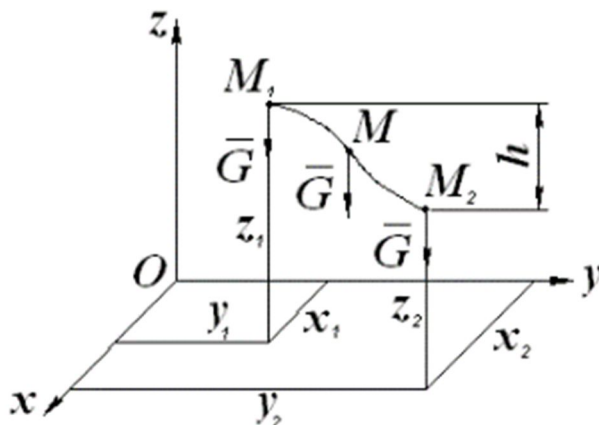


Рис. 3.18

Використовуємо аналітичний вираз елементарної роботи (3.43):

$$dA = G_x dx + G_y dy + G_z dz = -mgdz. \quad (3.55)$$

Тоді робота сили \vec{G} на переміщенні точки із положення M_1 в положення M_2 буде:

$$\begin{aligned} A &= \int_{M_2}^{M_1} dA = \int_{z_1}^{z_2} -mgdz = -mg \int_{z_1}^{z_2} dz = -mgz \Big|_{z_1}^{z_2} = \\ &= -mg(z_2 - z_1) = mg(z_1 - z_2) = mgh, \end{aligned} \quad (3.56)$$

де $h = z_1 - z_2$ - величина вертикального переміщення точки M .

Якщо $z_1 > z_2$, тобто точка M_1 розташована вище за точку M_2 , робота сили тяжіння додатна.

Якщо $z_1 < z_2$, тобто точка M_1 розташована нижче точки M_2 , робота сили тяжіння від'ємна.

Таким чином робота сили тяжіння дорівнює:

$$A = \pm mgh, \quad (3.57)$$

де знак плюс відповідає переміщенню точки до низу, а знак мінус – переміщенню точки вгору.

Тобто, *робота сили тяжіння дорівнює взятому з відповідним знаком добутку сили тяжіння на вертикальне переміщення точки її прикладення.*

Робота сили тяжіння не залежить від виду траєкторії, по якій рухається точка, а залежить тільки від відстані по вертикалі між положеннями точки, від рівня над поверхнею Землі. Робота сили тяжіння тіла на замкнутому переміщенні його центра ваги дорівнює нулю.

12.7. Робота сили пружності

Основною характеристикою пружного елемента є коефіцієнт жорсткості c . Коефіцієнт жорсткості – це відношення сили, яка діє на пружний елемент, до величини деформації пружного елемента (рис. 7.7):

$$c = \frac{F_1}{\Delta l} \left[\frac{H}{m} \right], \quad (3.58)$$

звідки

$$F_1 = c \cdot \Delta l. \quad (3.59)$$

Якщо сила \bar{F}_1 розтягнула пружину на відстань Δl і точка B перейшла в положення B_1 , то на кінець пружини буде діяти в протилежний бік сила пружності: $|F_{np}| = c \cdot \Delta l$.

Оберемо напрямок вісі x вздовж пружини (рис. 3.19), а початок координат - в положенні недеформованої пружини, довжина якої l_0 , тоді:

$$F_{np} = -cx, \quad (3.60)$$

де x – деформація пружного елемента.

Знак мінус показує, що сила спрямована у бік, що є протилежним переміщенню точки B .

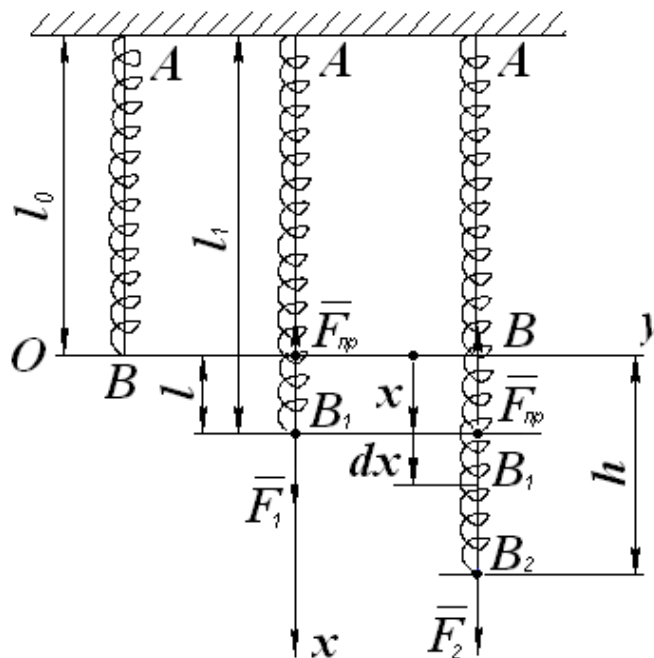


Рис. 3.19

Елементарна робота сили пружності дорівнює:

$$dA = -F_{np} dx = -cxdx. \quad (3.61)$$

При переміщенні точки прикладення сили з положення B у положення B_2 , тобто на величину h , сила пружності виконує роботу:

$$A = \int_B^{B_2} dA = \int_0^h -F_{np} dx = -c \int_0^h x \cdot dx = -\frac{cx^2}{2} \Big|_0^h = -\frac{ch^2}{2}. \quad (3.62)$$

Робота сили пружності, коли вона підкоряється закону $F_{пр} = cx$, дорівнює половині добутку коефіцієнта пружності на квадрат переміщення її точки прикладення, яке відраховується від положення недеформованого стану.

Робота сили пружності від'ємна тому, що вектор сили пружності завжди спрямований протилежно переміщенню її точки прикладення.

12.8. Робота і потужність сили, яка прикладена до тіла, що обертається навколо осі

Нехай до твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі z , в точці M на відстані r від осі прикладена довільно розміщена у просторі сила \vec{P} (рис. 3.20).

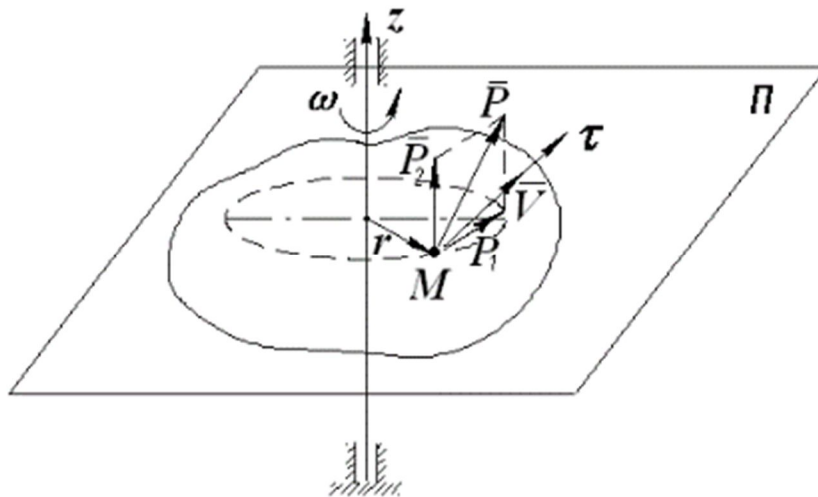


Рис. 3.20

Визначимо роботу цієї сили.

Для цього проведемо через точку M перпендикулярно до осі площину Π .

Розкладемо вектор сили \vec{P} на вертикальну складову \vec{P}_2 , яка паралельна осі z , і складову \vec{P}_1 , яка розташована у площині Π .

Тоді складова \vec{P}_2 роботу не виконує, оскільки її напрямок перпендикулярний вектору швидкості \vec{v} і згідно з формулою (3.41) її робота дорівнює нулю.

Отже елементарна робота сили \vec{P} буде дорівнювати:

$$dA = P_1 \cdot ds \cdot \cos\left(\overline{P_1}, \hat{\overline{v}}\right), \quad ds = r \cdot d\varphi,$$

де $d\varphi$ – елементарний кут повороту тіла.

$$dA = P_1 r \cdot \cos\left(\overline{P_1}, \hat{\overline{v}}\right) \cdot d\varphi,$$

але $P_1 r \cdot \cos\left(\overline{P_1}, \hat{\overline{v}}\right) = M_{i\dot{a}}$ – обертальний момент сили \overline{P} відносно осі z .

Тоді:

$$dA = m_z(\overline{P}) \cdot d\varphi = M_{o\dot{b}} \cdot d\varphi,$$

$$A = \int_0^\varphi M_{o\dot{b}} \cdot d\varphi. \quad (3.63)$$

Елементарна робота сили, яка прикладена до тіла, що обертається відносно осі z , дорівнює добутку моменту цієї сили відносно осі z на елементарний кут повороту тіла.

Якщо обертальний момент є сталою величиною $M_{o\dot{b}} = const$, то

$$A = M_{o\dot{b}} \cdot \varphi. \quad (3.64)$$

Потужність сили, що прикладена до обертового тіла:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{M_{o\dot{b}} d\varphi}{dt} = M_{o\dot{b}} \cdot \omega. \quad (3.65)$$

Потужність сили, яка прикладена до тіла, що обертається відносно нерухомої осі, дорівнює добутку моменту цієї сили відносно осі на кутову швидкість тіла.

12.9. Коефіцієнт корисної дії

Властивість тіла при переході з одного стану в інший здійснювати роботу характеризується його енергією.

Енергія є загальна міра різних форм руху матерії.

При передачі або перетворенні енергії, а також при здійсненні роботи мають місце втрати енергії.

Сили, що прикладені до тіл механічної системи, можна поділити на рушійні, робота яких є додатною, і сили опору, робота яких від'ємна.

У свою чергу, сили опору складаються із сил корисного опору, для подолання яких призначений механізм або машина, і сил шкідливого

опору.

До сил шкідливого опору можна віднести сили тертя у шарнірах, сили гідравлічних і повітряних опорів тощо.

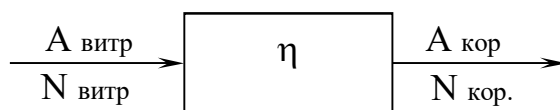
В процесі передачі руху або виконанні роботи рушійні сили механізмів і машин долають сили корисного опору і сили шкідливого опору.

Коефіцієнтом корисної дії є відношення роботи сил корисного технологічного опору $A_{кор}$ до повної витраченої роботи рушійних сил $A_{випр}$.

$$\eta = \frac{A_{кор}}{A_{випр}} = \frac{N_{кор}}{N_{випр}}.$$

Якщо коефіцієнт корисної дії враховує тільки механічні втрати, то він зветься *механічним ККД*.

Оскільки сили шкідливого опору займають значне місце в повній роботі, то, безумовно, механічний ККД завжди суттєво менший від одиниці.



$$\eta = \frac{A_{кор}}{A_{випр}} = \frac{N_{кор}}{N_{випр}} < 1.$$

Запитання для самоконтролю

18. Що таке елементарна робота сили?
19. Як впливає кут між векторами сили і швидкості на величину і знак елементарної роботи?
20. Як визначити роботу сили на кінцевому переміщенні?
21. Напишіть формулу роботи сталої сили.
22. Як визначити роботу рівнодійної сили?
23. Визначте роботу сили тяжіння, сили пружності.
24. Як визначається робота і потужність сили, що прикладена до обертового тіла?
25. Що таке коефіцієнт корисної дії і як він визначається?
26. Як визначається потужність сили, що прикладена до тіла, яке рухається поступально?
27. Визначити ККД окремих механізмів, які з'єднані послідовно.

РОЗДІЛ 13. ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ

13.1. Кількість руху матеріальної точки і механічної системи

Існує багато задач динаміки, розв'язання яких не потребує повної інформації про всі властивості досліджуваного руху системи, що містяться у диференціальних рівняннях.

Ці задачі пов'язані із визначенням зовнішніх сил, діючих на матеріальні точки системи, або з визначенням руху центра мас і мір механічного руху системи.

До ефективних методів розв'язування таких задач належать використання загальних теорем динаміки, які встановлюють співвідношення між мірами механічного руху системи матеріальних точок або однієї точки і діючими на них силами.

Загальні теореми динаміки характеризують окремі властивості механічного руху і надають часткову інформацію про цей рух. Тому їх застосування дозволяють уникнути в задачах складних операцій інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки і механічної системи, що значно спрощує процес розв'язання.

Для задач динаміки матеріальної точки та динаміки механічної системи розглянемо наступні загальні теореми динаміки: теорему про зміну кількості руху і теорему про зміну кінетичної енергії, які впливають із основного закону динаміки матеріальної точки.

Однією з динамічних характеристик руху матеріальної точки і механічної системи є кількість руху.

Кількість руху матеріальної точки є векторною величиною, яка є добутком маси точки на вектор її швидкості

$$\bar{q} = m \cdot \bar{v}. \quad (3.66)$$

Напрямок вектора кількості руху \bar{q} співпадає з напрямком вектора швидкості \bar{v} . За одиницю вимірювання кількості руху приймається 1 [$\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}$].

Кількість руху механічної системи є також векторною величиною, яка є геометричною сумою векторів кількостей руху окремих точок системи:

$$\bar{Q} = \sum_{k=1}^n \bar{q}_k = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \bar{v}_k, \quad (3.67)$$

З іншого боку є можливість визначити вектор кількості руху через швидкість центра мас.

Згадаємо, як був визначений радіус-вектор центра мас механічної

системи:

$$\bar{r}_c = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k}{M}, \quad (3.68)$$

де $M = \sum_{k=1}^n m_k$ – маса механічної системи.

Зведемо вираз (3.68) до спільного знаменника

$$M \cdot \bar{r}_c = \sum_{k=1}^n m_k \bar{r}_k, \quad (3.69)$$

і візьмемо похідну за часом:

$$M \frac{d\bar{r}_c}{dt} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt}. \quad (3.70)$$

Оскільки

$$\frac{d\bar{r}_c}{dt} = \bar{v}_c, \quad \text{а} \quad \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \bar{v}_k,$$

то остаточно маємо:

$$M \bar{v}_c = \sum_{k=1}^n m_k \bar{v}_k = \bar{Q}. \quad (3.71)$$

Таким чином, вектор кількості руху механічної системи або головний вектор системи дорівнює добутку маси усієї системи на вектор швидкості її центра мас.

Проекції кількості руху механічної системи на осі прямокутної системи координат запишуться так:

$$\begin{aligned} Q_x &= \sum_{k=1}^n m_k v_{kx} = M v_{cx}, \\ Q_y &= \sum_{k=1}^n m_k v_{ky} = M v_{cy}, \\ Q_z &= \sum_{k=1}^n m_k v_{kz} = M v_{cz}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Звідки головний вектор механічної системи дорівнює:
за модулем

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2};$$

за напрямком

$$\cos\left(\widehat{\overline{Q},x}\right)=\frac{Q_x}{Q}; \cos\left(\widehat{\overline{Q},y}\right)=\frac{Q_y}{Q}; \cos\left(\widehat{\overline{Q},z}\right)=\frac{Q_z}{Q}.$$

13.2. Імпульс сили

Ефект дії сили на матеріальну точку або механічну систему залежить не тільки від модуля сили і маси точки або системи, а і від тривалості дії сили.

Для характеристики дії сили на тіло за певний проміжок часу вводиться поняття елементарного імпульсу сили та імпульсу сили за кінцевий проміжок часу.

Визначимо ці поняття.

Елементарний імпульс $d\overline{S}$ сили \overline{F} – це векторна величина, яка дорівнює добутку вектора сили на елементарний проміжок часу її дії

$$d\overline{S}=\overline{F} \cdot dt. \quad (3.73)$$

Напрямок елементарного імпульсу сили співпадає з напрямком вектора сили.

За одиницю вимірювання імпульсу сили приймається 1 $[H \cdot c] = 1 \left[\frac{кг \cdot м}{с^2} \cdot c \right] = 1 [кг \cdot м / с]$.

Імпульс сили за кінцевий проміжок часу дорівнює інтегралу від елементарного імпульсу сили за проміжок часу від 0 до t_1

$$\overline{S}=\int_0^{t_1} d\overline{S}=\int_0^{t_1} \overline{F} dt. \quad (3.74)$$

Для обчислення імпульсу сили використовують його проекції на відповідні осі координат

$$\begin{aligned} S_x &= \int_0^{t_1} dS_x = \int_0^{t_1} F_x dt, \\ S_y &= \int_0^{t_1} dS_y = \int_0^{t_1} F_y dt, \\ S_z &= \int_0^{t_1} dS_z = \int_0^{t_1} F_z dt. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Повний імпульс дорівнюватиме:

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$$

Якщо сила є сталою величиною, то імпульс сили дорівнює:

$$\bar{S} = \bar{F} \cdot t. \quad (3.76)$$

13.3. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки

Запишемо основний закон динаміки матеріальної точки в формі, коли маса m вважається сталою:

$$m\bar{a} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k, \quad (3.77)$$

Але більш загальний вираз закону може бути записаний так:

$$\frac{d}{dt}(m \cdot \bar{v}) = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (3.78)$$

У лівій частині в дужках є кількість руху матеріальної точки, яка визначалась виразом: $\bar{q} = m\bar{v}$.

Перепишемо (3.78) так:

$$\frac{d}{dt}(\bar{q}) = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (3.79)$$

Помноживши ліву і праву частини (3.78) на dt , маємо:

$$d(m\bar{v}) = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot dt. \quad (3.80)$$

Вираз (3.80) і є теоремою про зміну кількості руху матеріальної точки у диференціальній формі: *диференціал від кількості руху матеріальної точки дорівнює геометричній сумі імпульсів всіх сил, які діють на точку.*

Проінтегруємо почленно ліву та праву частини виразу (3.80). Використаємо означені інтеграли, які беремо в границях, що відповідають швидкостям від v_0 до v_1 і моментам часу від 0 до t_1 .

Матимемо

$$\int_{v_0}^{v_1} d(m\bar{v}) = \int_0^{t_1} \sum_{k=1}^n \bar{F}_k dt = \sum_{k=1}^n \int_0^{t_1} \bar{F}_k dt. \quad (3.81)$$

Права частина виразу (3.81) є сумою імпульсів сил за кінцевий

проміжок часу.

Після інтегрування одержимо:

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k. \quad (3.82)$$

Таким чином, теорему про зміну кількості руху матеріальної точки можна сформулювати так: *зміна кількості руху матеріальної точки за певний проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів сил, які діють на точку, за цей час.*

Вираз (3.82) у проєкціях на осі координат x , y , та z буде мати такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned} m v_{1x} - m v_{0x} &= \sum_{k=1}^n S_{kx}, \\ m v_{1y} - m v_{0y} &= \sum_{k=1}^n S_{ky}, \\ m v_{1z} - m v_{0z} &= \sum_{k=1}^n S_{kz}. \end{aligned} \right\} \quad (3.83)$$

Приклад

Автомобіль масою $m = 1000$ кг рухається по горизонтальній дорозі зі швидкістю $v_0 = 5$ м/с. Далі протягом 10 с сила тяги автомобіля збільшується на 150 Н за кожну секунду. Визначити швидкість автомобіля v_1 після десятої секунди розгону.

Розв'язання

Вважаємо рух автомобіля поступальним, тоді приймаємо його за матеріальну точку. На підставі (3.83) запишемо вираз теореми про зміну кількості руху матеріальної точки:

$$m v_{1x} - m v_{0x} = \sum S_{kx}. \quad (a)$$

Оскільки рух по прямій, то можна записати

$$v_{1x} = v_1; \quad v_{0x} = v_0; \quad S_x = S.$$

Визначимо імпульс сили тяги, враховуючи умову і вираз (3.75):

$$F = 150t; \quad S = \int_0^{t_1} F dt;$$

$$S = \int_0^{t_1} 150t dt = 150 \int_0^{10} t dt = 150 \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^{10} = \frac{150 \cdot 10^2}{2} = 7500 \text{ (Hc)}.$$

Підставимо імпульс $S = 7500 \text{ (Hc)}$ в праву частину (а):

$$m(v_1 - v_0) = 7500.$$

Звідки

$$v_1 = \frac{S + mv_0}{m} = \frac{7500 + 1000 \cdot 5}{1000} = 12,5 \text{ м/с}.$$

Отже: $v_1 = 12,5 \text{ м/с}$.

13.4. Теорема про зміну кількості руху та закон збереження кількості руху механічної системи.

Для механічної системи, що складається із n матеріальних точок, на підставі теореми про рух її центра мас можна записати

$$M \frac{d\bar{v}_c}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e,$$

Якщо далі внести M – масу механічної системи, яка вважається сталою величиною, під знак похідної, то матимемо

$$\frac{d(M\bar{v}_c)}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e. \quad (3.84)$$

Як бачимо, що у лівій частині у дужках згідно виразу $M\bar{v}_c = \bar{Q}$ – кількість руху механічної системи.

Тоді перепишемо вираз (3.84) наступним чином:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e. \quad (3.85)$$

Формула (3.85) і є теоремою про зміну кількості руху механічної системи у диференціальній формі: *похідна за часом від вектора кількості руху механічної системи дорівнює геометричній сумі усіх зовнішніх сил, які діють на механічну систему.*

Помножимо ліву і праву частину (3.85) на dt , поділивши змінні,

$$d\bar{Q} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \cdot dt. \quad (3.86)$$

Інтегруємо ліву та праву частини (3.86).

Для цього використаємо означені інтеграли, які беремо в границях, що відповідають кількості руху від Q_0 до Q_1 і моментам часу від 0 до t_1 :

$$\int_{Q_0}^{Q_1} d\bar{Q} = \int_0^{t_1} \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^e \cdot dt = \sum_{k=1}^n \int_0^{t_1} \bar{F}_k^e dt. \quad (3.87)$$

Після інтегрування, якщо врахувати те, що у правій частині отриманого виразу є сума імпульсів зовнішніх сил, які діють на механічну систему, матимемо:

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum_{k=1}^n \bar{S}_k^e. \quad (3.88)$$

Отже, зміна вектора кількості руху механічної системи за певний проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів усіх зовнішніх сил, які діють на дану систему.

Вираз (3.88) у проекціях на осі координат x, y , та z має вигляд:

$$\begin{aligned} Q_{1x} - Q_{0x} &= \sum_{k=1}^n S_{kx}^e, \\ Q_{1y} - Q_{0y} &= \sum_{k=1}^n S_{ky}^e, \\ Q_{1z} - Q_{0z} &= \sum_{k=1}^n S_{kz}^e. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Визначимо закон збереження кількості руху механічної системи.

Якщо геометрична сума усіх зовнішніх сил, які діють на механічну систему, буде дорівнювати нулю, то у виразі (3.84) $\frac{d\bar{Q}}{dt} = 0$, тому

$$\bar{Q} = const, \quad (3.90)$$

тобто, якщо геометрична сума усіх зовнішніх сил, які діють на механічну систему, дорівнює нулю, то кількість руху системи залишається незмінною.

Якщо сума проекцій імпульсів зовнішніх сил на будь-яку вісь дорівнює нулю, наприклад $\sum_{k=1}^n S_{kx}^e = 0$, то з рівняння (3.89) випливає, що $Q_{1x} = Q_{0x}$, тобто проекція кількості руху на вісь Ox залишається незмінною.

13.5. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Кінетична енергія характеризує здатність механічного руху перетворюватись в еквівалентну кількість іншої форми руху (потенціальна енергія, теплота тощо).

Нехай матеріальна точка масою m переміщується вздовж криволінійної траєкторії із положення M_1 в положення M_2 під дією рівнодійної сили \vec{P} (рис. 3.21).

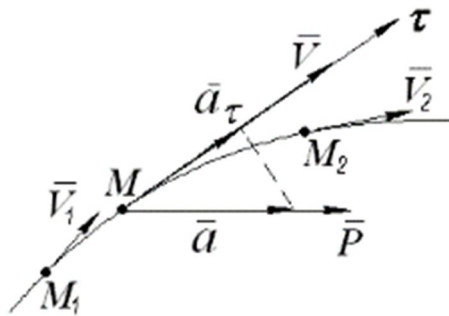


Рис. 3.21

Згідно з основним законом динаміки Ньютона запишемо:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{P}, \quad (3.91)$$

де m – маса точки, \vec{a} – вектор прискорення точки, \vec{P} – рівнодійна усіх сил, що діють на точку

Спроектуємо рівняння (3.91) на дотичну:

$$m \cdot a_\tau = P \cdot \cos(\widehat{\vec{P}, \vec{v}}), \quad (3.92)$$

де $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ – тангенціальне прискорення.

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = P \cdot \cos(\widehat{\vec{P}, \vec{v}}). \quad (3.93)$$

Рівняння (8.3) помножимо на елементарне переміщення точки ds :

$$m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot ds = P \cdot ds \cdot \cos(\widehat{\vec{P}, \vec{v}}), \quad (3.94)$$

але $P \cdot ds \cdot \cos(\widehat{\vec{P}, \vec{v}})$ – елементарна робота сили P ,

$$\frac{ds}{dt} = v.$$

Тоді

$$mv \cdot dv = dA \Rightarrow d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA \quad (3.95)$$

– математичний вираз теореми в диференціальній формі.

Припустимо, що в момент t_1 швидкість точки дорівнювала v_1 , а в момент t_2 – v_2 :

$$\int_{v_1}^{v_2} mv \cdot dv = \int_{M_1}^{M_2} dA. \quad (3.96)$$

Після інтегрування отримаємо:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A \quad (3.97)$$

– вираз теореми в кінцевій формі.

Скалярна величина $\frac{mv^2}{2}$, котра дорівнює половині добутку маси точки на квадрат швидкості, називається кінетичною енергією точки. Кінетична енергія точки є величиною додатною.

Отже, зміна кінетичної енергії точки на деякому її переміщенні дорівнює роботі рівнодійної сили на цьому переміщенні.

Розмірність кінетичної енергії

В системі одиниць СІ:

$$\left[\frac{mv^2}{2}\right] = 1_{\text{кг}} \cdot 1 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = 1\text{Н} \cdot \text{м} = 1\text{Дж}.$$

13.6. Кінетична енергія механічної системи

Кінетична енергія механічної системи – це скалярна величина, котра дорівнює арифметичній сумі кінетичних енергій окремих точок, що складають систему:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}. \quad (3.98)$$

Для механічної системи, яка складається з декількох тіл, кінетична енергія дорівнює сумі кінетичних енергій окремих тіл:

$$T = \sum T_k. \quad (3.99)$$

Кінетична енергія системи не залежить від напрямку руху окремих її частин.

На зміну кінетичної енергії механічної системи впливають як зовнішні, так і внутрішні сили.

Кінетична енергія твердого тіла як системи матеріальних точок – це одна із мір механічного руху, яка обумовлена рухом цього тіла.

Визначимо кінетичну енергію для різних випадків руху твердого тіла.

а) Тіло рухається поступально

Нехай тіло масою M рухається поступально зі швидкістю v .

Це тіло можна розглядати, як систему матеріальних точок, сума мас яких дорівнює масі тіла M :

$$M = \sum m_k. \quad (3.100)$$

При поступальному русі швидкості усіх точок однакові і дорівнюють v . Тоді його кінетична енергія дорівнює:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k v^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_k = \frac{Mv^2}{2}. \quad (3.101)$$

Кінетична енергія тіла, яке рухається поступально, дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат швидкості довільної точки або центра мас.

б) Тіло обертається відносно нерухомої осі

Нехай швидкість кожної точки тіла

$$v_k = \omega \cdot r_k,$$

де r_k – відстань точки від осі обертання.

Тоді кінетична енергія тіла дорівнює:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k \omega^2 r_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k r_k^2 = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2}.$$

Остаточно маємо

$$T = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2}, \quad (3.102)$$

де $I_z = \sum m_k r_k^2$ – осьовий момент інерції маси тіла, міра інертності тіла при обертальному русі.

Кінетична енергія тіла, яке обертається навколо нерухомої осі з кутовою швидкістю ω , дорівнює половині добутку моменту інерції маси тіла відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості.

в) Тіло рухається плоскопаралельно

Плоскопаралельний рух тіла можна вважати у даний момент часу, як обертальний рух навколо миттєвого центра швидкостей P (рис. 3.22).

C – центр мас тіла;

v_c – швидкість центра мас тіла;

I_{zc} – осьовий момент інерції маси тіла відносно осі z , яка проходить через центр мас C перпендикулярно до площини руху;

I_{zp} – осьовий момент інерції маси тіла відносно осі z , яка проходить через точку P .

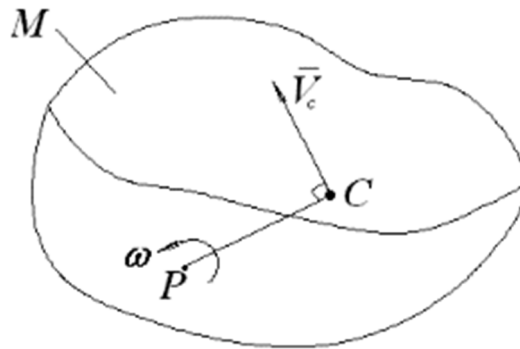


Рис. 3.22

Тоді $v_c = \omega \cdot PC$ і кінетична енергія дорівнює:

$$T = \frac{I_{zc} \cdot \omega^2}{2} = \frac{(I_{zc} + M \cdot (PC)^2) \cdot \omega^2}{2} = \frac{I_{zc} \omega^2}{2} + \frac{M v_c^2}{2};$$

або

$$T = \frac{M v_c^2}{2} + \frac{I_{zc} \omega^2}{2}. \quad (3.103)$$

Кінетична енергія тіла, яке рухається плоскопаралельно, дорівнює сумі енергій поступального руху зі швидкістю центра мас і обертального руху навколо центра мас.

13.7. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи

Припустимо, що матеріальна система складається з n матеріальних точок:

m_1, m_2, \dots, m_n – маси матеріальних точок;

$v_{10}, v_{20}, \dots, v_{n0}$ – початкові швидкості кожної точки;

v_1, v_2, \dots, v_n – кінцеві швидкості кожної точки;

$\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \dots, \bar{F}_n^e$ – рівнодійні зовнішніх сил, що діють на кожну точку;

$\bar{F}_1^{in}, \bar{F}_2^{in}, \dots, \bar{F}_n^{in}$ – рівнодійні внутрішніх сил, як сили взаємодії між точками.

Для кожної точки системи можна записати теорему про зміну кінетичної енергії:

$$\frac{m_k v_k^2}{2} - \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = A_k^e + A_k^{in}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.104)$$

де A_k^e – робота рівнодійної зовнішніх сил, які діють на k -ту точку;

A_k^{in} – робота рівнодійної внутрішніх сил, які діють на k -ту точку.

Просумуємо рівняння (3.104) по всіх точках системи:

$$\sum \frac{m_k v_k^2}{2} - \sum \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = \sum A_k^e + \sum A_k^{in}. \quad (3.105)$$

Запишемо (3.105) більш компактно, позначивши:

$\sum \frac{m_k v_k^2}{2} = T$ – кінцева кінетична енергія механічної системи;

$\sum \frac{m_k v_{k0}^2}{2} = T_0$ – початкова кінетична енергія механічної системи;

$\sum A_k^e$ – сума робіт зовнішніх сил, що діють на систему;

$\sum A_k^{in}$ – сума робіт внутрішніх сил, які діють на систему.

Остаточно вираз теореми має вигляд:

$$T - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^{in}. \quad (3.106)$$

Зміна кінетичної енергії механічної системи на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт на цьому переміщенні зовнішніх і внутрішніх сил.

Для незмінних механічних систем (деформації яких можна не враховувати) сума робіт внутрішніх сил дорівнює нулю:

$$\sum A_k^{in} = 0.$$

Тоді вираз (3.106) спрощується:

$$T - T_0 = \sum A_k^e. \quad (3.107)$$

Приклад

На рис. 3.23 зображений підйомний механізм лебідки. Вантаж A вагою \bar{P}_1 підіймається на тросі, який перекинутий через блок C і намотується на барабан B радіусом r_2 та вагою \bar{P}_2 . До барабана прикладений обертальний момент, який з моменту включення лебідки пропорційний квадрату кута повороту барабана: $M_{об} = k\varphi^2$, де k - постійний коефіцієнт. Визначити швидкість вантажу A в момент його підйому на висоту h_1 . Масу барабана B прийняти рівномірно розподіленою по його ободу. Блок C - суцільний диск вагою \bar{P}_3 . Масою троса - знехтувати. Вважати, що в початковий момент часу система знаходилась у стані спокою.

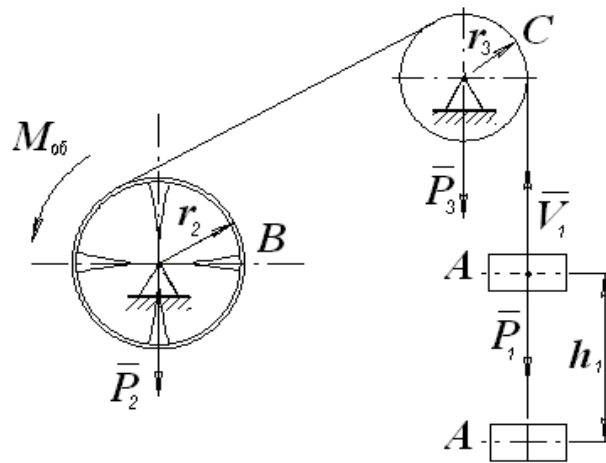


Рис. 3.23

Розв'язання

Дана задача розв'язується за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної системи:

$$T - T_0 = \sum A_k^e.$$

Але на початку система перебувала у стані спокою, тому $T_0 = 0$ і рівняння буде мати вигляд:

$$T = \sum A_k^e, \quad (\text{a})$$

де P_1 – вага вантажу; P_2 – вага барабана; r_2 – радіус барабана; P_3 – вага блока (суцільний диск); r_3 – радіус блока; $M_{o\bar{o}} = k\varphi^2$ – обертальний момент на барабані; h_1 – висота підйому вантажу; $v_0 = 0$ – стан спокою.

Кінетична енергія матеріальної системи дорівнює сумі енергій тіл, що складають систему:

$$T = T_A + T_B + T_C. \quad (\text{б})$$

Визначимо кінетичну енергію кожного тіла, виразимо її через задані параметри і шукану швидкість.

$$T_A = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{P_1 v_1^2}{2g} \text{ – тіло рухається поступально;}$$

$$T_B = \frac{I_2 \omega_2^2}{2} \text{ – тіло обертається навколо нерухомої осі;}$$

$$I_2 = m_2 r_2^2 = \frac{P_2 r_2^2}{g} \text{ – осьовий момент інерції тіла;}$$

$$\omega_2 = \frac{v_1}{r_2} \text{ – кутова швидкість, виражена через шукану швидкість } v_1.$$

Отже

$$T_B = \frac{P_2 r_2^2 v_1^2}{2g \cdot r_2^2} = \frac{P_2 v_1^2}{2g}.$$

Аналогічно і для обертового тіла С:

$$T_C = \frac{I_3 \omega_3^2}{2}; \quad I_3 = \frac{m_3 r_3^2}{2} = \frac{P_3 r_3^2}{2g}; \quad \omega_3 = \frac{v_1}{r_3}; \quad T_C = \frac{P_3 r_3^2 \cdot v_1^2}{2 \cdot 2g \cdot r_3^2} = \frac{P_3 \cdot v_1^2}{4g}.$$

Підставимо значення кінетичної енергії в вираз (б):

$$T = T_A + T_B + T_C = \frac{P_1 v_1^2}{2g} + \frac{P_2 v_1^2}{2g} + \frac{P_3 v_1^2}{4g} = \frac{v_1^2}{4g} (2P_1 + 2P_2 + P_3).$$

Визначимо праву частину виразу (а) – роботу діючих сил і моментів:

$$\sum A_k^e = A(P_1) + A(M_{o\bar{o}}), \quad (\text{c})$$

де $A(P_1) = -P_1 h_1$ – (знак мінус показує, що це робота сили опору, коли напрям сили і швидкості протилежні).

$$A(M_{o\bar{o}}) = \int_0^{\varphi} M_{o\bar{o}} \cdot d\varphi = \int_0^{\varphi} k\varphi^2 \cdot d\varphi = \frac{k\varphi^3}{3}; \quad \varphi = \frac{h_1}{r_2}.$$

Підставимо роботу у вираз (с):

$$\sum A_k^e = \frac{k\varphi^3}{3} - P_1 h_1 = \frac{kh_1^3}{3r_2^3} - P_1 h_1 = \frac{h_1(kh_1^2 - 3P_1 r_2^3)}{3r_2^3}.$$

Підставимо сумарну кінетичну енергію і сумарну роботу у вираз (а):

$$\frac{v_1^2}{4g} (2P_1 + 2P_2 + P_3) = \frac{h_1(kh_1^2 - 3P_1 r_2^3)}{3r_2^3}.$$

Звідки шукана швидкість дорівнює:

$$v_1 = \frac{2}{r_2} \sqrt{\frac{gh_1(kh_1^2 - 3P_1 r_2^3)}{3r_2(2P_1 + 2P_2 + P_3)}}.$$

Запитання для самоконтролю

28. Що таке кількість руху матеріальної точки і системи, яка її розмірність?
29. Які міри руху існують в тілі, що рухається?
30. Як визначити імпульс змінної і сталої сили?
31. Сформулюйте теорему про зміну кількості руху матеріальної точки і системи.
32. Напишіть теорему про зміну кількості руху точки в диференціальній формі.
33. Сформулюйте закон збереження кількості руху матеріальної системи.
34. Запишіть вираз кінетичної енергії точки і системи.
35. Як визначається кінетична енергія тіл, що рухаються поступально, плоскопаралельно і обертаються?
36. Сформулюйте теорему про зміну кінетичної енергії точки і напишіть її вираз у диференціальній і кінцевій формах.
37. Яка розмірність кінетичної енергії?
38. Як формулюється теорема про зміну кінетичної енергії системи?
39. Запишіть теорему про зміну кінетичної енергії для деформованої механічної системи.
40. Запишіть теорему про зміну кінетичної енергії для незмінної механічної системи.

РОЗДІЛ 14. МЕТОД КІНЕТОСТАТИКИ

14.1. Поняття про метод кінетостатики і силу інерції матеріальної точки

Закони Ньютона стосуються руху тільки вільної матеріальної точки. На невідільну точку накладені обмеження у вигляді умов в'язі, які реалізуються за допомогою сил реакцій в'язей.

Аксіома про звільненість від в'язей дає можливість звести будь-яку невідільну точку до вільної, якщо включити до числа активних сил реакції відповідних в'язей.

Тому метод кінетостатики (або принцип Д'Аламбера) еквівалентний основному закону динаміки і аксіомі про звільненість від в'язей.

Цей метод ефективно використовується для розв'язування першої задачі динаміки невідільної матеріальної точки, коли заданий закон її руху, а треба визначити шукану силу або реакцію в'язі, що обмежує рух точки в певному напрямі.

Даний метод дозволяє для рухомих матеріальних об'єктів формально застосовувати рівняння рівноваги.

Припустимо, що людина штовхає возик масою m з силою \vec{F} в напрямку руху (рис. 3.24) і возик одержує прискорення \vec{a} . Тоді, згідно третього закону механіки про дію і протидію, возик діє на руку людини з силою $\vec{\Phi}$, яка дорівнює \vec{F} , але протилежна за напрямом прискоренню возика \vec{a} .

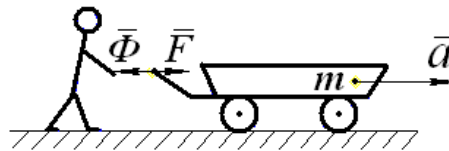


Рис. 3.24

Тобто сила інерції возика, що прикладена до рук людини, дорівнює

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}, \quad (3.108)$$

де m – маса возика; \vec{a} – прискорення возика; $m \cdot \vec{a} = \vec{F}$ – рівнодійна усіх сил, що діють на возик;

Таким чином, силою інерції матеріальної точки називають вектор $\vec{\Phi}$, який дорівнює за модулем добутку маси точки на її прискорення і спрямований протилежно вектору прискорення “ \vec{a} ”.

Сила інерції матеріальної точки до самої точки не прикладена, а

прикладена до тих тіл, які надають точці прискорення.

Якщо рух точки заданий координатним способом, то сила інерції дорівнює:

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a} = -(m\ddot{x} \cdot \bar{i} + m\ddot{y} \cdot \bar{j} + m\ddot{z} \cdot \bar{k}), \quad (3.109)$$

де \ddot{x} , \ddot{y} , \ddot{z} – проекції прискорення точки на відповідні осі координат.

Якщо рух точки заданий натуральним способом, то сила інерції має вираз:

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a} = -\left(m \frac{dv}{dt} \bar{\tau} + m \frac{v^2}{\rho} \cdot \bar{n} \right), \quad (3.110)$$

де $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ – дотична складова прискорення; $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ – нормальна складова прискорення; ρ – радіус кривизни траєкторії точки.

Отже

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_\tau + \bar{\Phi}_n; \quad \bar{\Phi}_\tau = -m\bar{a}_\tau; \quad \bar{\Phi}_n = -m\bar{a}_n.$$

де $\bar{\Phi}_\tau$ – тангенціальна складова сили інерції точки; $\bar{\Phi}_n$ – нормальна складова сили інерції точки або відцентрова сила.

Припустимо, що точка M з масою m розміщена на обертовому тілі і обертається разом з тілом (рис. 3.25) на відстані r від осі O .

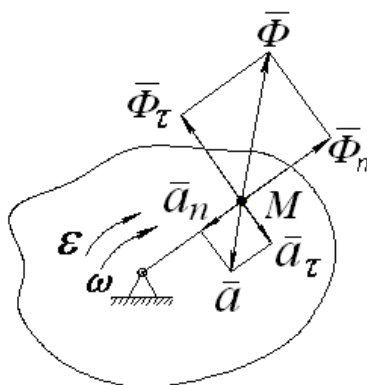


Рис. 3.25

Тоді сила інерції точки визначається як

$$|\bar{\Phi}_\tau| = ma_\tau = mr\varepsilon \text{ – тангенціальна складова сили інерції;}$$

$|\bar{\Phi}_n| = ma_n = m\omega^2 r$ – нормальна складова сили інерції точки або відцентрова сила інерції точки M .

Модуль повної сили інерції матеріальної точки дорівнює:

$$|\bar{\Phi}| = \sqrt{|\bar{\Phi}_\tau|^2 + |\bar{\Phi}_n|^2} = mr\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

14.2. Принцип Д'Аламбера для матеріальної точки

Нехай на матеріальну точку діє активна сила \bar{P} і реакція в'язі \bar{R} .

Запишемо в векторній формі диференціальне рівняння руху невідільної матеріальної точки:

$$m \cdot \bar{a} = \bar{P} + \bar{R},$$

де \bar{P} – рівнодійна активних сил, які не залежать від в'язей; \bar{R} – рівнодійна реакцій в'язей.

$$\begin{aligned}\bar{P} + \bar{R} + (-m \cdot \bar{a}) &= 0, \\ \bar{P} + \bar{R} + \bar{\Phi} &= 0,\end{aligned}\tag{3.111}$$

де $\bar{\Phi} = -m\bar{a}$.

У будь якій момент руху матеріальної точки активні сили і реакції в'язей зрівноважуються силою інерції, яка умовно прикладається до даної точки.

В цьому полягає ідея метода кінетостатики.

Задача динаміки зводиться по формі до задачі статички, тобто до розгляду рівноваги точки. Але в дійсності в задачах динаміки ніякої рівноваги не існує і сила інерції врівноважує систему фіктивно.

Необхідно зауважити, що і поняття “сила інерції” є фіктивним і не пов'язане з реальними силами природи, які характеризують кількісну міру взаємодії між тілами.

Сил інерції в природі не існує, а існує лише прояв інертності маси тіла.

Рівність (3.111) не є умовою рівноваги, оскільки сили системи прикладені до різних тіл: активна сила і реакція в'язі прикладена до матеріальної точки або тіла, а сила інерції – до тіл, що зумовлюють прискорення точки відносно абсолютної системи координат.

Метод кінетостатики – це не закон, а формально-математичний спосіб зведення рівнянь динаміки до рівнянь статички, але він дає математично точні і прості співвідношення для розв'язання задач динаміки.

Векторному рівнянню (3.111) відповідає три аналітичних рівняння в проєкціях на координатні осі:

$$\begin{aligned}
 P_x + R_x + \Phi_x &= 0, \\
 P_y + R_y + \Phi_y &= 0, \\
 P_z + R_z + \Phi_z &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.112}$$

Розглянемо практичне застосування принципу Д'Аламбера на наступному прикладі.

Приклад

Платформа з вантажем опускається до низу з прискоренням \bar{a} , m – маса вантажу (рис.3.26).

Визначити реакцію платформи або точки вантажу на платформу \bar{N} .

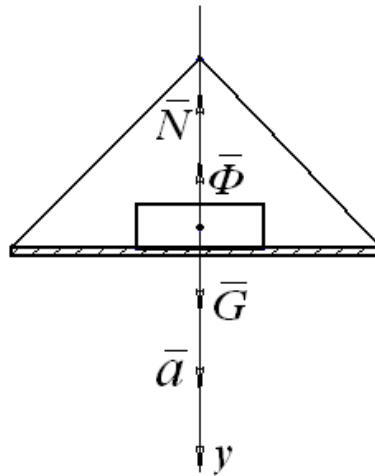


Рис. 3.26

Розв'язання

$|\bar{\Phi}| = ma$ – сила інерції вантажу,

$G = mg$ – вага вантажу.

Умовно до вантажу прикладаємо його силу інерції і записуємо рівняння рівноваги, як суму проекцій сил на вісь y :

$$\sum P_{ky} = 0; \quad G - \Phi - N = 0,$$

$$N = G - \Phi = mg - ma = m(g - a) = G(1 - a/g).$$

У випадку, якщо прискорення $a = g$, то $N = 0$ і отримуємо умову стану невагомості.

14.3. Принцип Д'Аламбера для механічної системи

Припустимо, що механічна система складається з n матеріальних точок:

m_1, m_2, \dots, m_n – маси точок; $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$ – радіус-вектори точок;

$\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ – рівнодійні активних сил, прикладених до кожної точки,

$\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_n$ – рівнодійні реакцій в'язей,

$\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ – прискорення кожної точки,

$\bar{\Phi}_1 = -m_1\bar{a}_1, \bar{\Phi}_2 = -m_2\bar{a}_2, \dots, \bar{\Phi}_n = -m_n\bar{a}_n$ – сили інерції кожної точки.

Для k -тої точки застосовуємо принцип Д'Аламбера (3.112):

$$\bar{P}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k = 0. \quad (3.113)$$

Додавши почленно рівняння (3.113) по всіх точках, отримаємо:

$$\sum \bar{P}_k + \sum \bar{R}_k + \sum \bar{\Phi}_k = 0, \quad (3.114)$$

де $\sum \bar{P}_k = \bar{P}$ – головний вектор активних сил механічної системи,

$\sum \bar{R}_k = \bar{R}$ – головний вектор реакцій в'язей механічної системи,

$\sum \bar{\Phi}_k = \bar{\Phi}$ – головний вектор сил інерції механічної системи.

Тоді

$$\bar{P}_{\text{гол}} + \bar{R}_{\text{гол}} + \bar{\Phi}_{\text{гол}} = 0. \quad (3.115)$$

В будь який момент часу головний вектор активних сил, головний вектор реакцій в'язей і головний вектор сил інерції складають зрівноважену систему сил.

Або: активні сили і реакції в'язей механічної системи зрівноважуються силами інерції, умовно прикладеними до точок системи.

Обираємо довільно полюс O за центр зведення сил, які діють на механічну систему. Кожна точка системи відносно полюса O буде мати свій радіус-вектор: $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots, \bar{r}_n$.

Рівняння (3.114) помножимо векторно на \bar{r}_k , а потім просумуємо по всіх точках системи:

$$\begin{aligned} \bar{r}_k \times \bar{P}_k + \bar{r}_k \times \bar{R}_k + \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k &= 0, \\ \sum \bar{r}_k \times \bar{P}_k + \sum \bar{r}_k \times \bar{R}_k + \sum \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k &= 0, \end{aligned}$$

де $\sum \bar{r}_k \times \bar{P}_k = \bar{M}_0^P$ - головний момент активних сил механічної системи;
 $\sum \bar{r}_k \times \bar{R}_k = \bar{M}_0^R$ - головний момент реакцій в'язей механічної системи;
 $\sum \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = \bar{M}_0^\phi$ - головний момент сил інерції механічної системи.

В результаті отримаємо:

$$\bar{M}_0^P + \bar{M}_0^R + \bar{M}_0^\phi = 0 \quad (3.116)$$

В будь який момент часу сума головного моменту активних сил, головного моменту реакцій в'язей і головного моменту сил інерції для механічної системи дорівнює нулю.

Рівнянням (3.115) і (3.116) відповідають рівняння в проекціях на декартові осі координат:

$$\begin{aligned} P_x + R_x + \Phi_x &= 0, \\ P_y + R_y + \Phi_y &= 0, \\ P_z + R_z + \Phi_z &= 0, \\ M_x^P + M_x^R + M_x^\phi &= 0, \\ M_y^P + M_y^R + M_y^\phi &= 0, \\ M_z^P + M_z^R + M_z^\phi &= 0. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Слід відмітити, що всі без виключення задачі динаміки можна розв'язувати без застосування метода кінетостатики, не користуючись навіть поняттям “сила інерції”.

Проте, метод кінетостатики внаслідок своєї простоти і наочності широко застосовується в інженерній практиці для розв'язування задач динаміки.

Особливо цей метод зручний при визначенні реакцій в'язей механічної системи.

Цей метод, звичайно, можна використовувати також для визначення прискорень тіл механічної системи.

14.4. Зведення сил інерції точок тіла, що обертається відносно нерухомої осі

Розглянемо тіло, що обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε (рис. 3.27).

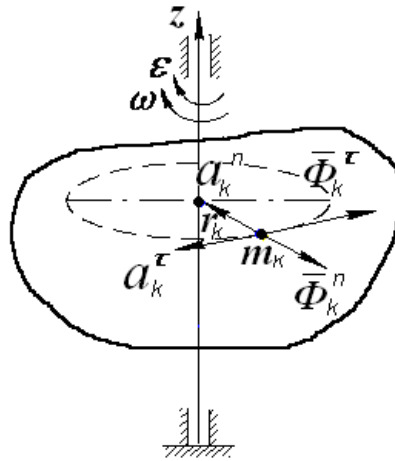


Рис. 3.27

При цьому довільна точка масою m_k описує коло радіуса r_k і має тангенціальне прискорення \bar{a}_k^τ .

Кожна точка буде мати тангенціальну складову сили інерції:

$$\bar{\Phi}_k^\tau = -m_k \bar{a}_k^\tau = -m_k \varepsilon \cdot r_k$$

і нормальну (або відцентрову) силу інерції:

$$\bar{\Phi}_k^n = -m_k \bar{a}_k^n = -m_k \omega^2 r_k,$$

яка не дає моменту відносно осі обертання, тому що перетинає цю вісь.

Тільки тангенціальні сили інерції створюють моменти відносно осі обертання z :

$$M_z^\phi = \sum \Phi_k^\tau \cdot r_k = -\sum m_k \varepsilon \cdot r_k^2 = -\varepsilon \sum m_k r_k^2 = -I_z \cdot \varepsilon,$$

$$M_z^\phi = -I_z \cdot \varepsilon. \quad (3.118)$$

Момент сил інерції тіла, яке обертається навколо нерухомої осі з кутовим прискоренням, дорівнює добутку осьового моменту інерції маси тіла відносно осі обертання на кутове прискорення і спрямований у протилежний бік кутовому прискоренню.

Треба відмітити, що момент сил інерції тіла виникає тільки в період розгону або гальмування (перехідні режими).

В період усталеного руху (рівномірне обертання) момент сил інерції дорівнює нулю.

Зведемо далі відцентрові сили інерції точок всього тіла (рис. 3.28).

Для кожної точки m_k маємо нормальну (відцентрову) силу інерції:

$$\Phi_k^n = m_k \omega^2 r_k.$$

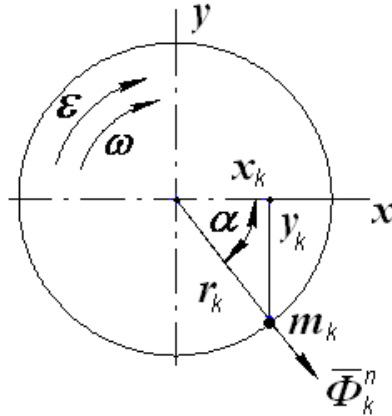


Рис. 3.28

Сумарну силу інерції визначимо через проекції на осі координат:

$$\Phi^n = \sqrt{(\Phi_x^n)^2 + (\Phi_y^n)^2}, \quad (3.119)$$

$$\Phi_x^n = \sum \Phi_{xk}^n = \sum m_k \omega^2 r_k \cos \alpha = \omega^2 \sum m_k x_k,$$

де $\sum m_k x_k = Mx_c$ (значення координати x_c центра мас), M – маса тіла.

$$\Phi_x^n = \omega^2 \cdot Mx_c, \quad (3.120)$$

Аналогічно визначимо проекцію на вісь y :

$$\Phi_y^n = \omega^2 \cdot My_c. \quad (3.121)$$

Підставляючи (3.120) і (3.121) в (3.119), отримаємо:

$$\Phi^n = M\omega^2 \sqrt{x_c^2 + y_c^2} = M\omega^2 r_c = M \cdot a_c^n, \quad (3.122)$$

де r_c – радіус-вектор центра мас тіла, $a_c^n = \omega^2 r_c$ – нормальне, доцентрове прискорення центра мас.

Аналіз виразу відцентрової сили інерції показує, що ця сила завжди має місце при обертанні і досить небезпечна, так як вона пропорційна квадрату кутової швидкості.

Відцентрова сила буде дорівнювати нулю, коли $r_c = 0$, тобто центр мас розміщений на осі обертання.

Це досягається методом балансування.

$$r_c = 0 \Rightarrow a_c^n = \omega^2 r_c = 0 \Rightarrow \Phi^n = 0.$$

Приклад

Визначити прискорення тіл і динамічні реакції при русі механічної системи (рис. 3.29).

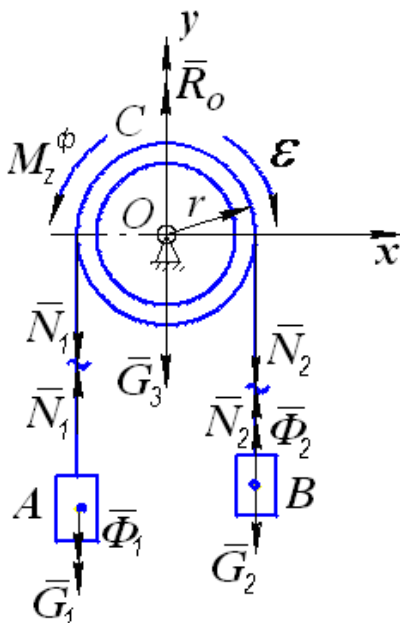


Рис. 3.29

Дано:

$m_2 > m_1$, m_1 - маса тіла А, m_2 - маса тіла В, m_3 - маса тіла С.

Маса шківa розподілена по ободу радіуса r , r - радіус шківa.

Визначити:

a - прискорення вантажів,

N_1 - натяг тросу ліворуч,

N_2 - натяг тросу праворуч,

R_0 - реакцію опори шківa.

Розв'язання

$G_1 = m_1 g$ - вага вантажу А,

$G_2 = m_2 g$ - вага вантажу В,

$G_3 = m_3 g$ - вага шківa,

$I_z = m_3 r^2$ - осьовий момент інерції маси шківa,

$|\bar{\Phi}_1| = m_1 a$ - сила інерції вантажу А,

$|\bar{\Phi}_2| = m_2 a$ - сила інерції вантажу В,

$|M_z^\phi| = I_z \varepsilon = I_z \cdot \frac{a}{r} = m_3 r^2 \frac{a}{r} = m_3 r a$ - момент сил інерції шківa.

Якщо умовно прикласти до вантажів їх сили інерції, а до шківів момент сил інерції M_3^ϕ , то система буде в рівновазі і можна скласти рівняння рівноваги системи у вигляді суми моментів сил відносно точки O , виключивши сили \bar{N}_1 і \bar{N}_2 , як внутрішні:

$$\sum m_0(\bar{\Phi}_k) + \sum m_0(\bar{P}_k) + \sum m_0(\bar{R}_k) = 0,$$

$$\Phi_1 r + G_1 r + \Phi_2 r - G_2 r + M_3^\phi = 0,$$

або

$$m_1 a r + m_1 g r + m_2 a r - m_2 g r + m_3 r a = 0,$$

звідки, скоротивши на r , маємо:

$$m_1 a + m_2 a + m_3 a = m_2 g - m_1 g,$$

$$a = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2 + m_3} \text{ (прискорення вантажів).}$$

Натяг тросу ліворуч:

$$N_1' = G_1 + \Phi_1 = m_1 g + m_1 a = m_1 (g + a).$$

Натяг тросу праворуч:

$$N_2' = G_2 - \Phi_2 = m_2 g - m_2 a = m_2 (g - a).$$

Реакція опори шківів:

$$R_0 = N_1 + N_2 + G_3 = m_1 (g + a) + m_2 (g - a) + m_3 g = G_1 + G_2 + G_3 - a(m_2 - m_1).$$

14.5. Зведення сил інерції точок твердого тіла до центра. Головний вектор і головний момент сил інерції

Тверде тіло – це механічна система матеріальних точок, у якій взаємне розташування точок не змінюється.

Головний вектор системи сил інерції окремих точок не залежить від вибору центра зведення і може бути обчислений задалегідь:

$\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k$ – сила інерції k -тої точки.

$$\bar{\Phi} = \sum -m_k \bar{a}_k = -\sum m_k \bar{a}_k = -M \cdot \bar{a}_c; \quad (3.123)$$

де M – маса тіла (системи), \bar{a}_c – прискорення центра мас системи або центра ваги тіла.

$$\bar{a}_c = \bar{a}_c^\tau + \bar{a}_c^n.$$

Тоді

$$\bar{\Phi} = -M(\bar{a}_c^\tau + \bar{a}_c^n) = -M \cdot \bar{a}_c^\tau - M \cdot \bar{a}_c^n = \bar{\Phi}^\tau + \bar{\Phi}^n.$$

Головний вектор сил інерції тіла, яке рухається довільно, дорівнює добутку маси тіла на прискорення його центра мас і спрямований протилежно вектору прискорення.

Головний момент сил інерції залежить від вибору центра зведення і визначається для окремих випадків руху твердого тіла.

а) Поступальний рух тіла

При поступальному русі тіла відсутнє обертання тіла навколо центра ваги (центра мас), тобто сума головного моменту активних сил і головного моменту реакцій в'язей відносно центра ваги (центра мас системи) дорівнює нулю:

$$M_c^P + M_c^R = 0.$$

Але відомо, що згідно принципу Д'Аламбера, можна записати:

$$M_c^P + M_c^R + M_c^\phi = 0.$$

Оскільки $M_c^\phi = 0$ при поступальному русі тіла, тобто головний момент сил інерції відсутній, то головний вектор сил інерції є рівнодійною сил інерції.

б) Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі

Якщо тіло обертається навколо осі, то нормальні (відцентрові) сили інерції не створюють моментів відносно осі (вони перетинають вісь обертання), а тангенціальні сили інерції створюють сумарний момент.

Як відомо, кожна точка m_k обертового тіла, яка розміщена на деякій відстані r_k , створює елементарну тангенціальну складову сили інерції $\bar{\Phi}_k = -m_k \cdot \varepsilon \cdot \bar{r}_k$, як добуток маси на тангенціальне прискорення.

Просумуємо цю силу по всіх точках тіла і отримаємо сумарну тангенціальну силу інерції:

$$\bar{\Phi}^\tau = \sum \bar{\Phi}_k^\tau = -\sum m_k \varepsilon \bar{r}_k = -\varepsilon \sum m_k \bar{r}_k = -\varepsilon \cdot M \cdot \bar{r}_c = -M \bar{a}_c^\tau. \quad (3.124)$$

Тангенціальна сила інерції тіла прикладена в центрі мас тіла і спрямована протилежно тангенціальному прискоренню центра мас, що і підкреслює знак мінус у виразі (3.124).

Крім того, тангенціальні сили інерції точок створюють моменти

відносно осі обертового тіла, оскільки вони перпендикулярні радіусам обертання, а тому радіус r_k є плечем кожної сили.

Просумуємо ці моменти по всіх точках тіла:

$$M_z^\phi = \sum M_z(\Phi_k^\tau) = \sum \Phi_k^\tau \cdot r_k = -\sum m_k \varepsilon r_k \cdot r_k = -\varepsilon \sum m_k r_k^2 = -\varepsilon I_z .$$

$$M_z^\phi = -I_z \cdot \varepsilon , \quad (3.125)$$

де I_z – осьовий момент інерції маси тіла відносно осі обертання; ε – кутове прискорення.

Момент сил інерції обертового тіла дорівнює добутку моменту інерції маси тіла відносно осі обертання на кутове прискорення тіла. Напрямок моменту інерціальних сил – протилежний напрямку кутового прискорення.

Головний момент сил інерції (3.125) виникає, як і головний вектор тангенціальних сил (3.124), тільки у перехідних режимах руху (розгін, гальмування).

В деяких випадках головний вектор сил інерції і головний момент сил інерції можна замінити однією силою – рівнодією, прикладеною в центрі коливання k (рис. 3.30).

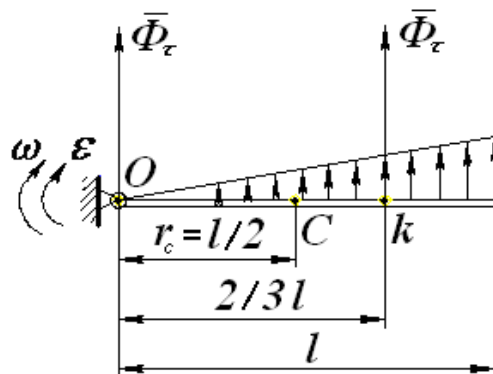


Рис. 3.30

Приклад

Стержень масою m і довжиною l обертається з кутовим прискоренням ε навколо осі z в точці O , яка перпендикулярна площині рисунка. Знайти точку прикладення рівнодіючої головного вектора і головного момента сил інерції.

Розв'язання

Тангенціальна сила інерції дорівнює:

$$|\overline{\Phi}_\tau| = ma_c^\tau = m \cdot \varepsilon \cdot r_c = m\varepsilon \frac{l}{2}.$$

Момент сил інерції:

$$|M_{z0}^\phi| = I_{z0} \cdot \varepsilon = \frac{ml^2}{3} \cdot \varepsilon.$$

Тоді відстань від точки O до точки k , де прикладається сумарна сила, виражається величиною

$$b = \frac{|M_{z0}^\phi|}{|\overline{\Phi}_\tau|} = \frac{ml^2 \cdot \varepsilon \cdot 2}{3 \cdot m \cdot \varepsilon \cdot l} = \frac{2}{3}l.$$

в) Плоскопаралельний рух тіла

Плоскопаралельний рух твердого тіла може бути розкладений на суму двох рухів: поступальний разом з полюсом і обертальний відносно полюса. За полюс, як правило, обирають центр мас точку C .

Припустимо що, стержень AB масою m рухається у площині малюнка (рис. 3.31).

При цьому центр C має прискорення \overline{a}_c , а кутове прискорення стержня - ε .

Тоді головний вектор сил інерції і головний момент сил інерції відповідно дорівнюють:

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_c &= -m\overline{a}_c, \\ M_c^\phi &= -I_{zc} \cdot \varepsilon, \end{aligned} \quad (3.126)$$

де I_{zc} – осьовий момент інерції маси стержня відносно осі z , яка перпендикулярна до площини руху і проходить через центр мас.

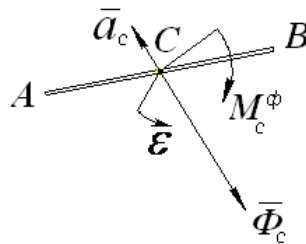


Рис. 3.31

Запитання для самоконтролю

41. Визначте поняття сили інерції.
42. Як формулюється принцип Д'Аламбера для матеріальної точки?
43. Якою є умова невагомості?
44. Який зв'язок між основними теоремами динаміки і силами інерції, а також моментами сил інерції тіла?
45. Напишіть формулу зведеного моменту сил інерції тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
46. Чому сили інерції вважаються фіктивними, а принцип Д'Аламбера - формальним?
47. Як звести до рівнодійної сили інерції точок тіла, яке рухається поступально?
48. Як звести до відповідних силових факторів сили інерції точок тіла, що обертається навколо осі, рухається плоскопаралельно?

ЧАСТИНА IV. ТЕОРІЯ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

РОЗДІЛ 15. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ

Теорія механізмів і машин – це наука, що вивчає загальні методи аналізу та синтезу механізмів і машин.

Під методами аналізу тут розуміють методи дослідження будови (структурний аналіз), кінематичний і динамічний аналіз вже існуючих механізмів, а під методами синтезу – методи проектування нових механізмів із заданими властивостями і робочими характеристиками.

Відповідно до цього в теорії механізмів і машин розрізняють задачі аналізу і задачі синтезу механізмів і машин.

До таких задач відносять:

- розробка загальних методів дослідження структури, геометрії, кінематики і динаміки типових механізмів та їх схем;
- розробка методів регулювання періодичних і неперіодичних коливань швидкості головного валу машинного агрегату;
- розробка способів зменшення динамічних навантажень механізмів і машин;
- розробка загальних методів проектування типових механізмів, машин-автоматів, роботів і маніпуляторів.

Як складова частина базових знань з прикладної механіки, теорія механізмів і машин є теоретичною і науковою основою вивчення і розвитку сучасного механічного обладнання. Користуючись її законами і принципами, можуть бути досліджені і розроблені механізми, машини, прилади та обладнання, автоматизовані лінії, роботи, маніпулятори, що відповідають сучасним вимогам ефективності, економічності й конкурентоспроможності.

Головною і принциповою відмінністю теорії механізмів і машин (ТММ) від інших наук, які вивчають конкретні види машин різних галузей, є те, що ТММ розглядає загальні питання дослідження та проектування механізмів незалежно від галузі їх застосування.

Так, наприклад, типовий кривошипно-повзунний механізм (рис. 4.1) широко застосовується в різноманітних машинах: двигунах внутрішнього згоряння, поршневих компресорах, насосах і т. п.

У кожному варіанті функціонального призначення при проектуванні необхідно враховувати специфічні вимоги до механізму.

Але математичні залежності, що описують структуру, геометрію,

кінематику і динаміку цього механізму у всіх випадках його застосування лишаються практично однаковими.

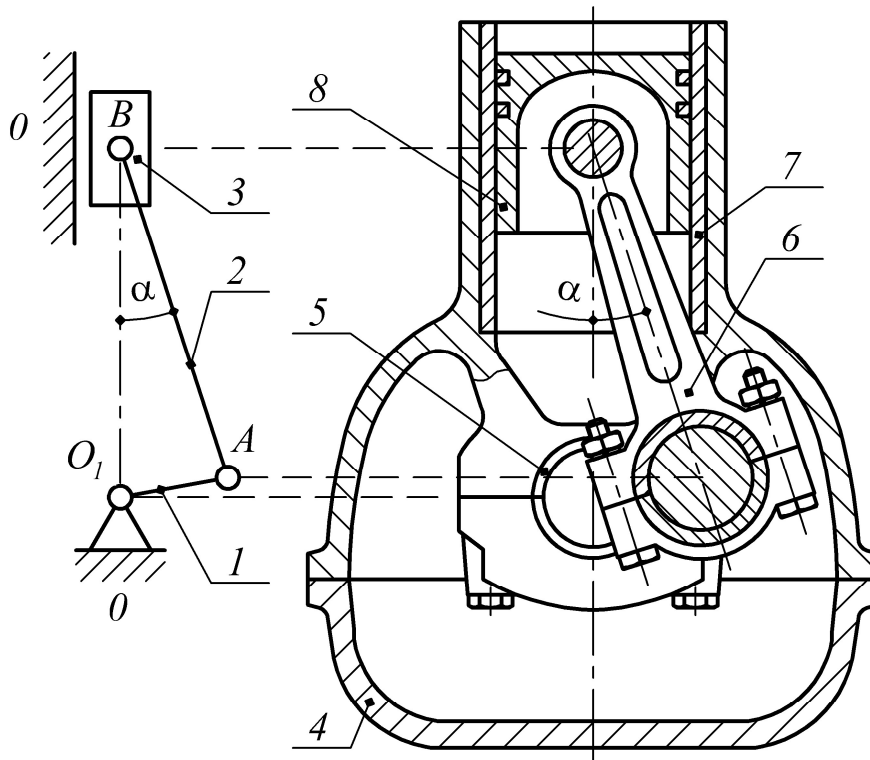


Рис. 4.1

Тому об'єктом дослідження в теорії механізмів і машин являється не реальний механізм або машина, а його модель, яка умовно відображається у вигляді структурної, кінематичної або іншої схеми.

Отже в ТММ основна увага приділяється вивченню методів аналізу і синтезу загальних для даного виду механізму властивостей незалежно від специфіки конкретного застосування і призначення.

Таким чином, теорія механізмів і машин вивчає методи дослідження і створення схем механізмів для проектування машин, приладів, автоматизованих ліній, роботів, маніпуляторів у відповідності до сучасних вимог виробництва.

Подальший розвиток цієї важливої наукової галузі триває і буде здійснюватись шляхом вдосконалення раніше відомих модифікацій механізмів і машин та утворення принципово нових їх видів на основі теоретичних досліджень з біомеханіки, теорії автоматичного регулювання і керування, математичних методів описання та моделювання робочих процесів.

Прикладами сучасних механізмів і машин є саморегулювальні машини-автомати і автоматичні лінії, маніпулятори і робототехнічні системи (рис. 4.2).



Рис. 4.2

15.1. Поняття механізмів і машин як технічних систем

Сучасні механізми і машини являються, як правило, складними технічними пристроями – технічними системами.

Кожна така технічна система призначена для виконання певних функцій і має власну структуру.

У більшості випадків структура цих технічних систем складається із деталей, вузлів, ланок і типових механізмів.

Деталь – це елемент структури технічної системи, який не має внутрішніх в'язей.

Іншими словами деталлю називається та частина механізму або машини, яка виготовлена без складальних операцій і тому не може бути розібрана на більш прості частини без руйнування.

Вузол – це сукупність декількох деталей, які конструктивно або функціонально пов'язані між собою.

При роботі механізму або машини існують деталі і вузли які рухаються як єдине ціле відносно інших деталей.

Тому існує поняття ланки механізму або машини – важливої структурної складової технічної системи.

Ланка є однією з головних структурних одиниць в теорії механізмів і машин.

Кожна рухома деталь або вузол, що утворює одну жорстку рухому систему тіл, називається рухомою ланкою механізму або машини. Наприклад, шатун 1 двигуна (рис. 4.3) буде однією рухомою ланкою, хоча він складається із цілого ряду деталей: тіла шатуна 1, вкладишів 2, головки 3, болтів 4 із гайками 5 і шайбами 6.

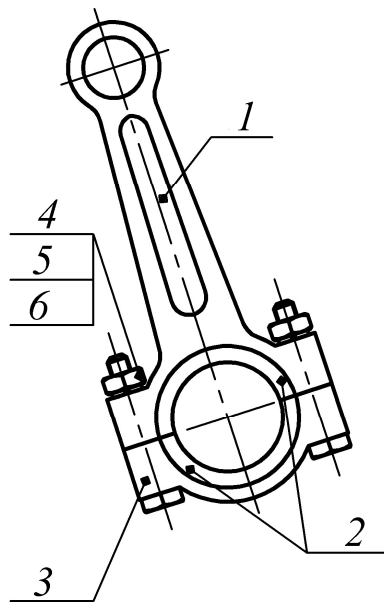


Рис. 4.3

Усі нерухомі деталі утворюють між собою одну нерухому систему тіл, яка називається нерухомою ланкою. Наприклад, корпус двигуна, підшипники корінного вала разом утворюють одну нерухому ланку.

Таким чином в будь-якому механізмі існує одна нерухома ланка і одна (як мінімум) або декілька рухомих ланок.

Отже с точки зору структури будь-який механізм або машина може бути представлений як складна технічна система рухомих і нерухомих ланок, певним чином пов'язаних між собою так, щоб забезпечити задану їх відносну рухомість.

Дослідження механізмів і машин як технічних систем здійснюється

за допомогою застосування їх моделей.

Модель – це пристрій або образ якого-небудь об'єкта або явища, який адекватно віддзеркалює його головні особливості і властивості. Моделі механізмів і машин використовуються для зменшення кількості досліджуваних параметрів і спрощення розрахунків в інженерній практиці, науковій або іншій діяльності.

Залежно від цілей і завдань виду аналізу чи синтезу, який виконується, моделі механізмів і машин розрізняють за наступними ознаками: за формою представлення – на фізичні і математичні; за методом аналізу – на графічні, аналітичні, графоаналітичні, енергетичні, кінетостатичні, динамічні та експериментальні.

Модель будь-якого механізму або машини складається за критеріями подібності, які формулюються в залежності від прийнятих припущень. Основними з цих припущень є наступні:

1. Усі ланки механізмів і машин вважаються абсолютно твердими і жорсткими, тобто не піддаються ніяким деформаціям.
2. Контактуючі поверхні ланок є абсолютно гладенькими.
3. Усі механізми призначені тільки для перетворення руху і силових факторів.

Прийняті припущення дають можливість суттєво спростити аналіз і синтез механізмів і машин на початковому етапі.

Так, з першого припущення випливає, що ланки не змінюють своїх розмірів.

Друге припущення дозволяє виконувати аналіз і синтез без врахування сил тертя і властивостей матеріалів, із яких виготовлені ці ланки.

Згідно із третім припущенням аналіз і синтез механізмів і машин можна проводити без врахування реальних умов їх експлуатації.

В залежності від необхідної точності результатів, які треба отримати, кількість критеріїв або припущень може змінюватись.

Найпоширенішим видом моделей технічних систем є їх схемний образ, або схема. Для одного і того ж механізму або машини розрізняють функціональну, структурну, геометричну, кінематичну і динамічну схеми.

15.2. Машини і їх види

Традиційно машиною називається технічний пристрій, який складається із взаємопов'язаних функціональних частин (деталей, вузлів, пристроїв, механізмів та ін.), що використовує енергію будь-якого виду для виконання покладених на нього функцій. Машини використовуються для виконання певних дій з метою зменшення навантаження на людину

або повної заміни людини при виконанні конкретного завдання і є основою для підвищення продуктивності праці.

З точки зору теорії механізмів і машин поняттю «машина» надамо наступне визначення.

Машина – це технічна система, що виконує механічні рухи, для перетворення енергії, матеріалів та інформації з метою полегшення фізичної та розумової діяльності людини, підвищення якості і продуктивності праці.

За своїм призначенням машини можна розділити на енергетичні, робочі, інформаційні та кібернетичні.

Енергетичні машини призначені для перетворення будь-якого виду енергії в енергію механічного руху або навпаки. У першому випадку машина називається *двигуном*, у другому – *генератором*.

Двигуни – це енергетичні машини, які перетворюють різні види енергії у механічну роботу (електродвигуни, парові машини, гідротурбіни, двигуни внутрішнього згорання та ін.). Наприклад, електродвигун перетворює електричну енергію в механічну енергію обертального руху вала. Двигун внутрішнього згорання перетворює енергію розширення газів при згоранні палива в циліндрі в механічну енергію поступального руху поршня і т.ін.

Генератори – це енергетичні машини, які перетворюють механічну енергію в будь-який інший вид енергії (електрогенератори, поршневі компресори, механізми насосів). Наприклад, електрогенератор перетворює механічну енергію руху парової або гідравлічної турбіни в електричну і т.ін.

Робочі машини використовують механічну чи іншу енергію для виконання роботи по переміщенню або перетворенню матеріалів чи об'єктів. Вони діляться на транспортні і технологічні.

Транспортні та підйомні машини – використовують механічну енергію для переміщення заданих об'єктів в у просторі.

Технологічні машини – використовують механічну енергію для перетворення форми, властивостей, розмірів і стану об'єкта обробки.

Інформаційні машини – призначені для перетворення, обробки і передачі інформації. Вони поділяються на математичні та контрольно-керуючі.

Математичні машини – перетворюють інформацію у вигляді математичних моделей, які задані у формі чисел та алгоритмів.

Контрольно-керуючі машини – перетворюють одержану контрольно-вимірювальну інформацію для керування тією чи іншою машиною або технологічним процесом.

Кібернетичні машини – замінюють або імітують різноманітні механічні, фізіологічні або біологічні процеси, властиві живій природі та оснащені елементами штучного інтелекту. Такі машини можуть керувати машинами інших видів і здатні змінювати програму своїх дій в залежності від стану навколишнього середовища. Як правило робочі органи цих машин можуть відтворювати механічні рухи, які властиві живим істотам.

Тенденцією подальшого розвитку сучасних машин є створення комбінованих машин – машинних агрегатів, які будуть розглянуті нижче.

Поєднання різних робочих машин в одній конструкції привело також до появи машин-комбайнів, а комбінування різних енергетичних машин дало поштовх до розвитку гібридних конструкцій.

За ступенем універсальності машини також поділяють на універсальні, спеціалізовані і спеціальні.

Універсальні машини призначені для здійснення різнопланових технологічних та транспортних операцій, пов'язаних з обробкою та переробкою різноманітних предметів обробки, енергетичних чи інформаційних потоків. Це найпоширеніша група машин. До яких можна віднести універсальні металорізальні верстати, ковальсько-пресові машини, транспортні та транспортуючі машини. Перелік операцій чи робіт, які виконуються універсальною машиною, досить широкий. Машини, які використовуються для виконання дуже великого діапазону робіт, називаються широкоуніверсальними. Сюди ж можна віднести і інформаційні машини, функції яких будуть залежати від виду програмного забезпечення, що виконується на них у даний момент.

Спеціалізовані машини призначені для обробки чи переробки об'єктів однієї номенклатури, що відрізняються формою, розміром чи властивостями (зубообробні чи різьбонарізні верстати, вальцювальне обладнання, сільськогосподарські машини, друкарські машини тощо). До цієї групи можна віднести інформаційні машини, функції яких обмежуються колом задач керування, для яких вони створені.

Спеціальні машини призначені для обробки чи переробки предметів праці тільки певної форми і розмірів, певних властивостей або тільки для виконання якоїсь специфічної роботи чи операції. Це можуть бути верстати для обробки, наприклад, лопаток газових турбін, автомобілі для перевезення тільки певного виду вантажу (цементовози, бензовози, панелевози) тощо. Тут, також можна згадати електронно-механічні пристрої, (вимірювальні, зв'язку і т.п.) де схемно і програмно закладено саме ті функції, які властиві даному приладу.

Новий тип машин, в основу роботи яких покладений вібраційний принцип дії, називаються *вібраційними машинами*.

Вібраційні машини (вібраційні копачі, культиватори, транспортери, сепаратори, сіялки, сушарки, молотарки, млини та ін.) в останні роки отримали широкого вжитку в різних галузях виробництва завдяки економічності, обумовленої використанням ефекту резонансу та інших корисних ефектів вібраційних технологій.

Існують вібраційні машини безударної і ударної дії. В безударних вібраційних машинах робочий орган здійснює вібраційні переміщення, не вдаряючись при цьому по іншим елементам машини або по оброблюваному середовищу, а в ударних – вдаряється, надаючи ударні імпульси.

За ступенем автоматизації усі машини поділяються на машини з ручним керуванням, машини-автомати і напівавтомати.

Машини з ручним керуванням виконують свої функції тільки за безпосередньої участі в їх роботі людини. Людина здійснює пуск машини, управління роботою всіх її механізмів та зупинку машини після виконання певних робіт чи операцій (металорізальні та деревообробні верстати, будівельні машини, транспортні та транспортуючі машини, сільськогосподарські машини тощо).

Машина-автомат – це самостійно діюча машина, яка виконує свою функцію згідно із заданою керуючою програмою без безпосередньої участі людини у процесі обробки, перетворення, передавання та використання матеріальних об'єктів, енергії чи інформації. Розрізняють машини-автомати технологічні (наприклад, металорізальні верстати-автомати, автоматизовані агрегати тощо), енергетичні (автоматичні прилади і засоби енергосистем, електричних машин і мереж), транспортні (автостоп, автопілот), побутові автомати. Залежно від умов роботи і виду енергії, що використовується, існують автомати, які включають механічні, гідравлічні, електричні (електронні), пневматичні та комбіновані пристрої.

Машини-напівавтомати (автоматизовані засоби) – це машини, в яких робочий цикл, що здійснюється на основі попередньо заданої керуючої програми, переривається і для його повторення необхідне обов'язкове втручання людини.

Як бачимо, на сьогоднішній день існує дуже велика кількість машин різного типу, призначення і фізичного принципу дії. Але в курсі теорії механізмів і машин перевага надається тільки тим машинам, які здійснюють і використовують механічний рух для виконання корисної механічної роботи.

15.3. Приводи машин і механізмів та їх види

Енергосиловий механічний пристрій, який приводить машини та механізми в дію називають їх приводом.

Привод машини або механізму – це технічна система, яка складається із джерела надходження механічної енергії – двигуна, механізму для передачі енергії руху – передавального механізму і апаратури керування приводом – контрольно-керуючих пристроїв.

Хоча найчастіше за все джерелом енергії привода є двигун (тепловий, електричний, пневматичний, гідравлічний та ін.), інколи таким джерелом буває механічний пристрій, що може віддавати заздалегідь накопичену механічну енергію (пружинний, інерційний, гирьовий механізм та ін.). Використовують також і нетрадиційні джерела енергії привода (сонячні батареї, енергію вітру), які перспективні в майбутньому як джерела, що не забруднюють навколишнє середовище.

Традиційно по своїй суті привод являє собою «вставку» між приводним двигуном і робочою машиною або механізмом.

Передавальний або перетворювальний механізм привода призначений для узгодження механічних характеристик двигуна з механічними характеристиками робочої машини або механізму, на які передається механічна енергія від приводу.

Для реалізації функцій контролю і керування роботою приводу до його складу входить контрольно-керуючі пристрої, які поєднані в систему керування приводом.

Усі приводи за принципом роботи їх двигуна можна розділити на теплові, гідравлічні, пневматичні та електричні.

В тепловому приводі для перетворення руху використовується тепла енергія теплоносія або безпосередньо продуктів згоряння палива в тепловому або двигуні внутрішнього згоряння; в гідроприводі – енергія тиску або руху рідини гідронасоса в гідродвигуні; в пневмоприводі – енергія тиску повітря або іншого газу компресора в пневмодвигуні; в електроприводі – електрична енергія постійного або змінного струму в електродвигуні.

Доступність електроживлення в сучасних умовах виробництва, а також порівняльна простота електропривода в основному і обумовили найбільше поширення саме його. В приводах машин виробничого призначення широке застосування одержали спочатку електричні двигуни постійного струму, а потім трифазні асинхронні двигуни, що мають високий ККД надійні в експлуатації та економічні.

По характеру подачі механічної енергії на робочі машини розрізняють груповий, індивідуальний і багатодвигунний приводи.

У груповому приводі рух від одного двигуна передається групі робочих машин або механізмів через одну або декілька трансмісій

(передавальних механізмів). Внаслідок технічної недосконалості груповий привод на сьогоднішній день майже не застосовується.

В індивідуальному приводі кожна робоча машина має власний двигун з передачею. Індивідуальний привод дозволяє працювати при найбільш вигідній частоті обертання, здійснювати швидкий запуск і зупинку машини, здійснювати реверс.

У багатодвигунному приводі окремі робочі органи машини приводяться в рух самостійним двигуном через свою систему передач. Такий привод дозволяє отримати компактну конструкцію машини і застосувати її автоматичне керування.

За призначенням приводи машин і механізмів розділяють на стаціонарні, які встановлені нерухомо на рамі або фундаменті; пересувні, які використовуються для рухомих робочих машин; транспортні, що застосовуються для різних транспортних засобів.

У якості стаціонарного привода найбільш поширеним є електропривод. На пересувних робочих і транспортних машинах використовуються головним чином тепловий привод з безпосередньою механічною або електричною передачею. Провідна роль тут належить двигунам внутрішнього згоряння, які встановлюють на автомобілях, тепловозах, судах; газовим турбінам – на літаках, газотурбовозах; ядерним силовим установкам – на човнах.

Електропривод набув широкого застосування у комунальних побутових машинах (швейних, кухонних, пральних), інструментах (рубанки, дрилі).

Поширені також гідравлічний і пневматичний приводи (наприклад, у ручних машинах).

Для забезпечення складних за режимом умов роботи використовуються комбіновані приводи, наприклад парові турбіни встановлюються разом з тепловими двигунами або газовими турбінами, гідропривід комбінується з електроприводом і т.п. (гідроелектропривод, газотурбогідропривод і т.ін.).

Для надання робочим органам вібраційних машин механічних коливань та імпульсів застосовують вібраційні приводи.

За способом впливу існуючі приводи вібраційних машин можна розділити на три групи: симетричні, асиметричні та імпульсні (ударні).

Перші створюють збурювальні зусилля, що змінюються із часом симетрично відносно нульової лінії; другі – асиметрично; треті впливають на робочий орган поштовхами. Деякі вібраційні приводи можуть створювати як симетричні, так і ударні режими.

За видом вібраційні приводи можуть бути розділені на механічні, пневматичні, гідравлічні та електричні.

Механічні вібраційні приводи, у свою чергу, діляться на інерційні та ексцентриккові; пневматичні і гідравлічні відповідно – на поршневі та ротаційні, електричні – на індукційні, електромагнітні та електрогідравлічні.

Використання передавальних або перетворювальних механізмів у приводі машин обумовлене рядом конструктивно-експлуатаційних факторів: за умовами компоновання, габаритів, техніки безпеки двигун не завжди можна безпосередньо з'єднати з робочим механізмом; необхідні швидкості машини звичайно не збігаються з оптимальною частотою обертання двигуна; в технологічних і транспортних машинах, як правило, необхідно забезпечити регулювання швидкостей і можливість роботи з більшими моментами при малих швидкостях (регулювання ж швидкості двигуна не завжди можливо і економічно доцільно); двигуни призначені головним чином для рівномірного обертального руху, а робочі органи машин частіше за все здійснюють поступальне, гвинтове та інші види рухів, а також рух із заданим законом зміни швидкостей і т.п.

В приводах машин передачі виконують із постійним або регульованим передатним відношенням.

Найбільш часто в приводах використовуються: механізми, що зберігають постійне передаточне відношення, – редуктори і мультиплікатори (які відповідно знижують або підвищують частоту обертання); коробки передач (швидкостей), що дозволяють ступінчасто змінювати частоту обертання; варіатори, які забезпечують безступінчасте регулювання числа оборотів і оптимальний швидкісний режим; різні відкриті передачі (пасові, ланцюгові, зубчасті та ін.).

Приводи механізмів дистанційного керування і контролю (в автомобілях, тракторах, комбайнах) здійснюється за допомогою гнучких валів.

Крім механічних передач, в приводах машин використовуються також електричні, гідравлічні та інші передачі.

Апаратура керування приводом служить для пуску, зупинки, зміни напрямку обертання, регулювання швидкості, гальмування, захисту двигунів і механізмів машин від перевантажень і ушкоджень, блокування окремих механізмів і т.ін.

Системи керування приводом можуть бути ручними, напівавтоматичними і автоматичними.

Автоматизація керування приводом машин дозволяє здійснювати регулювання швидкості по заданій програмі, перерозподіл навантаження, дистанційне включення та відключення, точну зупинку або реверсування руху.

Автоматизація приводу дозволяє збільшити надійність, підвищити продуктивність роботи машин у цілому та поліпшити умови виробництва.

15.4. Машинний агрегат і його функціональні частини

Подальший розвиток сучасних машин привів до створення комбінованих машин – машинних агрегатів. У загальному визначенні машинний агрегат являє собою технічну систему, що складається з однієї або декількох уніфікованих агрегатів, які сполучені послідовно або паралельно і призначені для виконання певних необхідних робочих функцій.

Традиційно найпростіший машинний агрегат містить в собі двигун і передавальний механізм (що разом утворюють привод машини), а також саму робочу або енергетичну машину. Із розвитком науки і техніки машинні агрегати набули додаткових пристроїв для виконання функцій керування і контролю. До них належать слідкуючі і регулюючі пристрої та системи автоматичного керування (контрольно-керуючі машини).

Таким чином, в сучасному розумінні *машинний агрегат* – це технічна система, яка складається з декількох послідовно або паралельно з'єднаних машин, і містить в собі двигун, передавальний механізм, робочу або енергетичну машину і контрольно-керуючу машину.

Машинний агрегат є більш досконалою і складною технічною системою у порівнянні із приводом, тому що містить в собі відразу і робочу машину, а наявність контрольно-керуючої машини дозволяє слідкувати і керувати ходом роботи усієї системи.

Функціональна схема машинного агрегату представлена на рис. 4.4 і має наступні позначення його складових частин: Д – двигун; МС – механічна система (передавальний або перетворювальний механізм); РП – робочий процес робочої або енергетичної машини; СЗЗ – система зворотного зв'язку контрольно-керуючої машини; СПК – система програмного керування контрольно-керуючої машини.

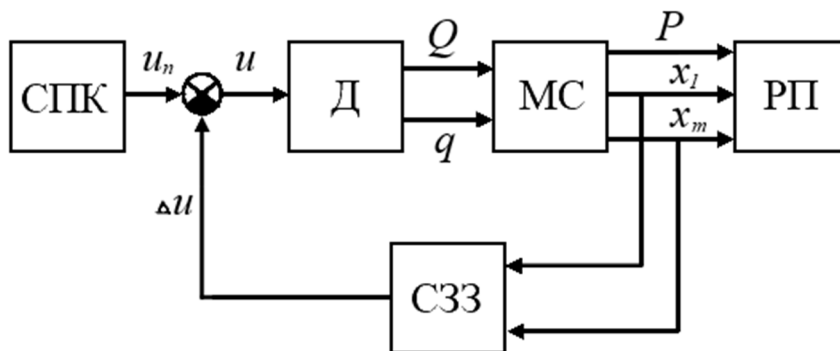


Рис. 4.4

У двигуні, процесом перетворення енергії (теплової гідравлічної, пневматичної або електричної,) в механічну роботу керує вхідний параметр двигуна u . Наприклад, в електричних двигунах таким керуючим параметром буде електричне напруження (в двигунах постійного струму) або частота змінного струму (в асинхронних двигунах), в гідравлічних двигунах – зміна тиску робочої рідини, а в пневматичних – зміна тиску повітря, в двигунах внутрішнього згорання – зміна кількості палива, яке потрапляє в камеру згорання.

Вихідними параметрами двигуна є узагальнена координата q його вихідної ланки, яка здійснює, як правило, обертальний або зворотно-поступальний рух та величина узагальненої сили Q .

Механічна система здійснює перетворення простіших рухів $q(t)$, які утворюються двигуном, в складні рухи робочих органів машини $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$.

При виконанні робочого процесу в механічній системі виникає робоче навантаження – наприклад, активна сила P , що діє на робочі органи машини. При цьому вихідні параметри двигунів являються вхідними параметрами такої механічної системи, тому число її входів дорівнює числу двигунів – числу ступенів рухомості машини.

Функціональна схема машинного агрегату, що має n двигунів, показана на рис. 4.5.

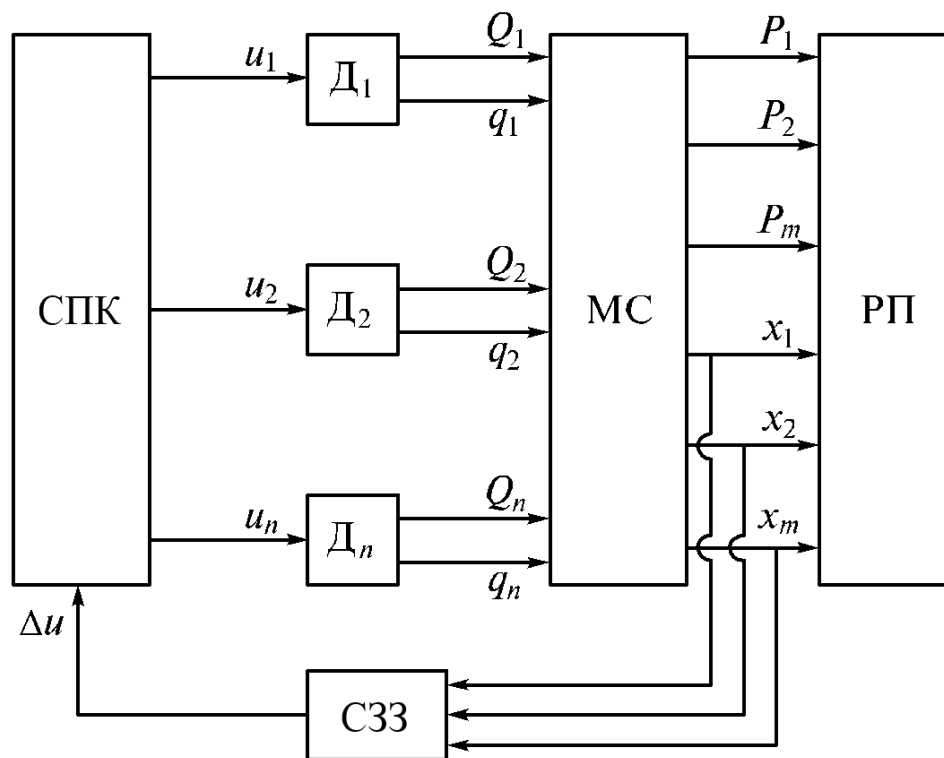


Рис. 4.5

Вхідними параметрами механічної системи є координати вихідних параметрів двигунів q_k та узагальнені сили руху Q_k ($k = 1, 2, \dots, n$), а вихідними – координати робочих органів машини x_s і робочі навантаження P_s ($s = 1, 2, \dots, m$).

Важливими функціональними частинами сучасних машин є системи керування рухом. Системи програмного керування, формуючи програмні керуючі сигнали u_{nk} ($k = 1, 2, \dots, n$), задають тим самим запрограмовані рухи робочих органів машини. Збурювальні фактори, що діють на машину, викликають відхилення дійсних рухів від запрограмованих. Корегування запрограмованих рухів здійснюється системою керування, що працює зазвичай за принципом зворотного зв'язку. При цьому формуються імпульси корекції керуванням руху Δu , які зменшують відхилення.

Включення до складу такої функціональної схеми кібернетичної машини дає можливість керування роботою всієї системи залежно від стану навколишнього середовища без особистої участі людини, утворюючи машини-автомати і автоматизовані виробничі лінії. Подальший розвиток кібернетичних машин і процесу керування енергетичними та робочими машинами приводить до можливості адаптації машин під зміни оточуючого середовища на основі використання систем штучного інтелекту (роботи, маніпулятори з автоматичним керуванням та гнучкі виробничі системи).

15.5. Механізм і його елементи

В цілому машину утворюють сукупність функціонально зв'язаних між собою механізмів.

Механізмом називається система твердих тіл, яка призначена для перетворення руху одного чи кількох тіл в потрібні рухи інших тіл.

Основними структурними елементами будь-якого механізму є його ланки і кінематичні пари.

Ланкою називається жорстке з'єднання твердих тіл, яке рухається в складі механізму як єдине ціле.

Дві стичні ланки (такі, що стикаються, дотикаються, перебувають у контакті одна з одною) при можливості їх відносного руху (тобто руху однієї ланки відносно іншої) утворюють *кінематичну пару*.

Таким чином, *кінематичною парою називається з'єднання двох стичних ланок, яке забезпечує їх відносну рухомість.*

Будь-який механізм можна розглядати як сукупність ланок, що послідовно з'єднані між собою кінематичними парами. Таке з'єднання називають *кінематичним ланцюгом*.

Як зазначено було вище, ланки в механізмі можуть бути як рухомими, так і нерухомими. Нерухомі ланки механізму називають стояком або стійкою (це може бути станина, корпус, плита або рама механізму чи машини).

На кресленні нерухомі ланки позначаються цифрою 0, а рухомі ланки – цифрами 1, 2, 3... n.

Із рухомих ланок в механізмі можна виділити вхідні, проміжні і вихідні ланки. Вхідна ланка – це ланка, яка сприймає рух і відповідні силові фактори (сили або моменти) для перетворення їх механізмом і передачі їх на вихідну ланку механізму – ланку, з якої цей необхідний рух і силові фактори знімаються і передаються далі за межі механізму. Інші рухомі ланки механізму є проміжними або з'єднувальними.

Як правило, в механізмі є одна вхідна і одна вихідна ланки. Наприклад, вхідна ланка одержує рух від двигуна, а вихідна ланка з'єднується з робочим органом машини. Але можливе застосування в механізмі також і декількох вхідних або вихідних ланок.

В залежності від характеру руху відносно стояка рухомі ланки мають певну назву.

Кривошип – це ланка, яка здійснює при роботі механізму повний оберт навколо осі, що закріплена на стояку (рис. 4.6, а).

Коромисло – це ланка, яка здійснює при роботі механізму коливальний або обертальний рух навколо осі, що закріплена на стояку

(рис. 4.6, б).

Шатун – це ланка, яка з'єднана з рухомими ланками і здійснює при роботі механізму плоскопаралельний рух (рис. 4.6, в).

Повзун – це ланка, яка здійснює при роботі механізму поступальний рух вздовж направляючих стояка (рис. 4.6, г).

Куліса – це обертова ланка, яка одночасно є направляючою для кулісного каменя (рис. 4.6, д).

Кулачок – це ланка профіль якої має змінну кривизну (рис. 4.6, е).

Зубчасте колесо – це ланка із замкненою системою зубців, які забезпечують безперервний обертовий рух парної ланки (рис. 4.6, ж).

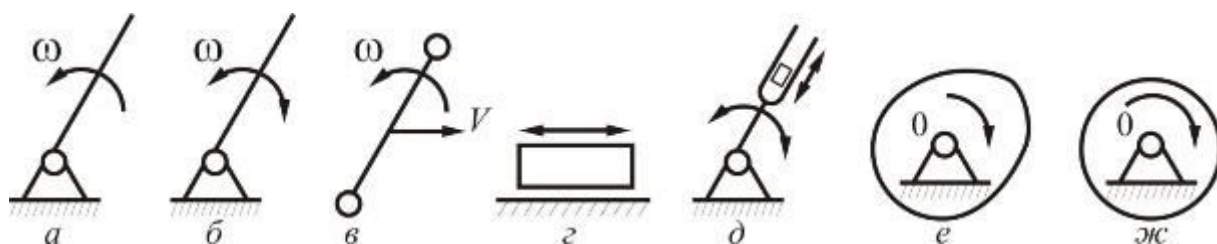


Рис. 4.6

У цілому ланки будь-якого механізму можна класифікувати також по наступним ознакам.

За фізико-механічними властивостями матеріалу, із якого зроблені ланки, розрізняють:

тверді ланки – це ланки, пружна деформація яких не вносить істотних змін в роботу механізму;

пружні ланки – це ланки, пружна деформація яких вносить істотні зміни в роботу механізму (пружини, мембрани та ін.);

гнучкі ланки – це ланки, що мають здатність змінювати форму робочих поверхонь для забезпечення функціонування механізму (ремені, ланцюги, канати та ін.);

рідкі ланки – це ланки, що мають рідку структуру (вода, масло і т.ін.);

газоподібні ланки – це ланки, що мають газоподібну структурою (газ, повітря).

Треба відзначити, що в даному курсі ТММ ми будемо розглядати лише механізми із твердими ланками. Інші ланки (пружні, гнучкі, рідкі та газоподібні) виходять за межі програми курсу.

За конструктивним виконанням ланки бувають прості та складні.

Проста ланка – це ланка, що входить до складу двох і більше кінематичні пар, через геометричні центри яких можливо провести одну пряму.

Складна (або складена) ланка – це ланка, що входить до складу трьох і більш кінематичні пар, через геометричні центри яких неможливо провести одну пряму.

Прості ланки на схемах механізмів зображують у вигляді ліній або кривих, а складні або складені ланки позначаються у вигляді замкнених і незамкнених геометричних фігур. При цьому замкнені геометричні фігури, що зображують складні або складені ланки, штрихують.

Отже, наприклад, найпростіший кривошипно-повзунний механізм, який складається із кривошипа 1, шатуна 2 і повзуна 3, схематично може бути представлений, як це показано на рис. 4.7.

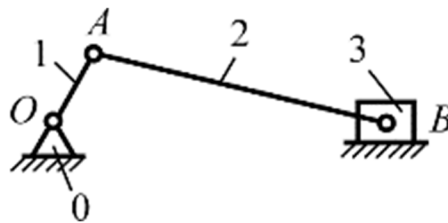


Рис. 4.7

Рухомі ланки цього механізму 1, 2, 3 зв'язані між собою, стояком і направляючими стояка 0 за допомогою трьох обертальних кінематичних пар (шарнірів в точках O , A , B) і однієї поступальної пари (повзун – направляючі стояка). По числу рухомих і нерухомих ланок цей механізм буде чотирьохланковим. Він відноситься до плоских механізмів, тому що усі осі його шарнірів паралельні між собою, а ланки рухаються в одній площині.

Далі розглянемо докладніше основні види інших механізмів.

15.6. Основні види механізмів

Усе різноманіття механізмів можна класифікувати по різним ознакам.

Відповідно до галузі застосування і виробничому призначенню розрізняють:

- механізми сільськогосподарського призначення (вузли комбайнів, тракторів, для обробки ґрунту, сіялок, сепараторів, сушарок і т.ін.);
- механізми транспортних машин (коробок передач, редукторів, регуляторів швидкості, гальмівних систем та інших вузлів);
- механізми важкого машинобудування і металообробки (прокатних станів, ковальських машин і пресів, верстатів, та ін.);

-
- механізми літальних апаратів;
 - механізми двигунів (електричних гідравлічних, пневматичних, теплових);
 - механізми компресорів і насосів;
 - механізми промислових роботів (маніпуляторів).

Цей перелік може бути продовжений і далі.

За видом передаточної функції механізми підрозділяються на дві групи.

Механізми з постійною передаточною функцією – це механізми, передаточне відношення яких за один цикл їх роботи не змінюється.

Механізми зі змінною передаточною функцією – це механізми, передаточне відношення яких за один цикл їх роботи може змінюватися в заданому діапазоні.

За видом структури механізми можуть бути:

- із постійною структурою – це механізми, структура яких за цикл роботи не змінюється;
- із змінною структурою – це механізми, структура яких за цикл роботи може змінюватися.

За видом руху і розташуванню ланок у просторі механізми розділяються на плоскі, просторові та сферичні.

Плоскі механізми – це механізми, ланки яких здійснюють рухи в паралельних площинах.

Просторові механізми – це механізми, ланки яких здійснюють рухи в перпендикулярних площинах.

Сферичні механізми – це механізми, у яких одне або декілька ланок здійснюють рухи в декількох площинах одночасно.

У дійсності всі механізми є просторовими, але, дотримуючись розглянутих ознак, деякі з них є просторово просторовими, інші – просторово плоскими, а треті – просторово сферичними. При цьому перше слово з назви механізму надалі виключається.

За своїм функціональним призначенням механізми бувають:

- передаточні (механізми, які призначені для відтворення заданої функціональної залежності між переміщеннями вхідної і вихідної ланки);
- направляючі (механізми точки вихідних ланок яких рухаються по заданим траєкторіям).

За видом перетворення руху механізми розділяють на ті що:

- перетворюють обертальний рух вхідної ланки в обертальний рух вихідної ланки (редуктори, мультиплікатори, коробки передач, муфти);
- перетворюють обертальний рух вхідної ланки в поступальний рух

вихідної;

- перетворюють поступальний рух вхідної ланки в обертальний рух вихідної ланки;
- перетворюють поступальний рух вхідної ланки в поступальний рух вихідної ланки.

За способом передачі і перетворення потоку механічної енергії розрізняють:

- механізми фрикційні;
- механізми із зачепленням;
- хвилеві механізми;
- механізми із гнучкою в'яззю;
- імпульсні механізми.

В залежності від форми, конструктивного виконання і руху ланок механізми розділяють на:

- важільні механізми;
- кулачкові механізми;
- зубчасті механізми;
- механізми переривчастого руху (мальтійські механізми, храпові);
- епіциклічні механізми;
- гвинтові механізми;
- пасові механізми;
- ланцюгові і комбіновані механізми.

За ступенем моделювання механізми підрозділяються на дійсні, типові і ідеальні.

Усі механізми машин і приводів, що виконують певне службове призначення, є *дійсними механізмами*.

Проте, виходячи із прийнятих в ТММ припущень, вивчення структури механізмів можна виконувати без врахування специфіки їх подальшої експлуатації. Це дозволяє розбити механізми на типові групи за принципом схожості їх структури і скористатися вже розробленими для них методами і алгоритмами аналізу і синтезу. Отримані таким чином механізми називаються типовими.

Типовий механізм – це простий механізм, що має при різному функціональному призначенні широке застосування в машинах різних видів.

Характерним прикладом типового механізму є кривошипно-повзунний механізм, який широко застосовується в машинах різних видів, що мають різне функціональне призначення: двигуни внутрішнього згорання, поршневі компресори і насоси, верстати, кувальні машини та ін. Знаючи алгоритми проведення структурного, кінематичного і динамічного

аналізів такого типового механізму, можна досліджувати його структуру, кінематику і динаміку без врахування особливостей функціонального призначення, так як математичне описання усіх його залежностей лишаються без зміни практично при будь-яких варіантах його застосування.

Ефективність типового механізму оцінюється певними параметрами, основними з яких є передаточна функція і коефіцієнт корисної дії (ККД).

Як відомо, відношення швидкості руху вхідної ланки до швидкості руху вихідної ланки називається *передаточним відношенням*:

$$i = \frac{\omega_{вх}}{\omega_{вих}} = \frac{V_{вх}}{V_{вих}}. \quad (1.1)$$

Якщо аналіз механізму виконується протягом деякого проміжку часу, то замість передаточного відношення прийнято розглядати *передаточну функцію*, тобто

$$i = f(t). \quad (1.2)$$

Вхідний і вихідний потоки механічної енергії кожного механізму прийнято оцінювати через його роботу. Відношення роботи $A_{вих}$, що розвивається на вихідній ланці, до роботи $A_{вх}$ на вхідній ланці називається *коефіцієнтом корисної дії*.

Зрозуміло, що ККД дійсного механізму завжди менше одиниці, оскільки процес перетворення руху завжди супроводжується втратами механічної енергії:

$$\eta = \frac{A_{вих}}{A_{вх}} - \xi < 1, \quad (1.3)$$

де ξ – коефіцієнт втрат.

Ідеальними механізмами вважаються такі, що не мають втрат механічної енергії, тобто коли ККД цих механізмів дорівнюватиме одиниці.

Ідеальний механізм – це механізм, що утворений лише абсолютно жорсткими ланками, в якому вхідний потік механічної енергії перетвориться у вихідний потік без втрат.

Отже прийняті в ТММ припущення, що ланки типових механізмів є абсолютно жорсткими, дозволяють проводити аналіз і синтез цих механізмів без врахування будь-яких видів деформацій ланок і сил тертя.

15.7. Основні вимоги до сучасних механізмів і машин

Розвиток промислового виробництва іде шляхом інтенсифікації раніше вже відомих та дослідженням нових технологічних процесів, збільшенням обсягів виробництва і більш економічного способу його ведення, задоволенням усе більш зростаючих вимог по відношенню до якості, точності і досконалості продуктів і засобів виробництва.

Перелік сучасних машин у різних галузях промисловості не лише збільшується чисельно, але і стає усе більш складним. Це вимагає все більших знань не тільки в галузі теорії механізмів і машин та їх конструюванні, але в і інших суміжних галузях механіки, матеріалознавства, автоматизації та спеціальних технологій.

Інтенсифікація процесів неминує викликає збільшення швидкостей і енергетичних потужностей. Все більш широко впроваджується автоматичне керування окремими машинами, цілими машинними комплексами, автоматичними лініями і роботехнічними системами.

Той або інший напівфабрикат або виріб можна отримати різними способами, інакше кажучи, різними технологічними процесами, причому ефективність їх буде різною. У зв'язку з цим правильно було б при розробці спеціальних машин враховувати варіантність технологічного процесу і його розчленовування на частини. В цьому випадку вже можуть бути пред'явлені певні вимоги як до окремих виконавчих механізмів, так і до продуктивності машини.

Все це дозволяє сформулювати загальні вимоги, які мають бути пред'явлені до сучасних машин.

Продуктивність машини повинна задовольняти інтенсивному технологічному процесу. Практика показала, що найбільш продуктивним є безперервний технологічний процес, тому при проектуванні нових машин слід перш за все прагнути до розробки безперервного технологічного процесу при виробництві виробів або напівфабрикатів того або іншого виду.

Надійність роботи машин і механізмів забезпечує найкращу продуктивність, тому що зменшується час на усунення неполадок, їх налаштування і ін. Вимушена зупинка в технологічній лінії малонадійної машини неминує викликає простій інших машин, що позначається на продуктивності всієї лінії. Треба зазначити, що чим машина або механізм простіші, тим вони надійніші, тобто тим менше в них окремих ланок, що вимагають погодженої роботи.

У багатьох галузях промисловості надійність машини може бути забезпечена, якщо усунути вплив агресивності середовища – корозійного, хімічного та абразивного. Боротьба із зносом шляхом відповідного вибору матеріалів деталей машин і їх захисту від шкідливого впливу середовища може забезпечити їм більшу довговічність. Крім цього в рухомих

з'єднаннях механізмів в результаті зносу їх поверхонь контакту збільшуються зазори. Це при великих швидкостях приводить до ударів при зміні напрямку дії сил і моментів сил та сприяє ще більшому зносу.

Отже, довговічність машини може бути підвищена в тому випадку, коли при проектуванні машини будуть вибрані механізми, в яких при виконанні заданої операції робочі навантаження будуть мінімально можливими, а вибраний тип рухомого з'єднання ланок і матеріали їх контактуючих поверхонь забезпечать мінімальний знос.

Особливу роль у розвитку сучасних машин і механізмів відіграють також питання коливань і вібрацій. З одного боку, це питання боротьби з вібраціями шляхом створення вібростійких конструкцій машин і механізмів, з іншого боку – це використання резонансного ефекту вібрацій для виконання різних технологічних процесів і створення нових вібраційних механізмів, які мають необхідні кінематичні і динамічні характеристики. У зв'язку з цим важливе значення набуває прогнозування ресурсу машин і їх механізмів, тобто прогнозування терміну їх служби до стану, коли їх подальша експлуатація неможлива.

Металоемність машини і її механізмів у багатьох випадках також має велике значення. Збільшення ваги окремих механізмів зменшує корисне навантаження і енергоефективність машини. Надмірні запаси міцності машини при недостатньо повному аналізі роботи її механізмів приводять не лише до збільшення ваги машини і необхідної потужності, але у деяких випадках і до зменшення її фактичної продуктивності та надійності. Ретельний розрахунок окремих механізмів і вибір оптимальної схеми можуть забезпечити проектування машини мінімальної металоемності для заданих умов роботи.

Якість і точність роботи механізмів в машинах визначається вимогами, що пред'являються до кінцевого продукту, результату або іншими умовами (наприклад, точність дотримання траєкторії руху і т.ін.).

Точність роботи механізмів залежить як від типу механізму, так і від особливостей його виконання, наявності зазорів в рухомих з'єднаннях, деформації ланок в процесі роботи механізму та ін. У зв'язку з вимогами, що пред'являються з точки зору точності відтворення заданих переміщень, необхідно проводити відповідні розрахунки схем механізмів і вибирати з них ті, що задовольняють поставленим вимогам.

В останні часи все більшого застосування знаходять просторові механізми, наприклад в задачах, що пов'язані із проектуванням роботів, маніпуляторів і роботехнічних систем. Такі задачі вимагають впровадження і подальшого розвитку теорії просторових механізмів, у тому числі методів описання їх руху, силових розрахунків та інших аналітичних методів розрахунку і досліджень.

Важливою вимогою до механізмів і машин є застосування сучасних методів їх контролю і технічної діагностики. Розробка цих методів заснована на виділенні об'єктивних параметрів якості, працездатності і одночасно ознак дефектного стану механізму.

Отже головними критеріями досконалості сучасних механізмів і машин є якість, ефективність і економічність їх роботи, що залежить від перерахованих вище і багатьох інших специфічних умов виробництва.

Запитання для самоконтролю

1. Що вивчає теорія механізмів і машин?
2. Які періоди розвитку ТММ як наукової дисципліни ви знаєте?
3. Наведіть приклади механізмів сучасної техніки.
4. Дайте визначення деталі, вузла і ланки як складових технічних систем.
5. Які моделі механізмів і машин застосовують в ТММ?
6. Що називається машиною? Які машини Ви знаєте?
7. Дайте визначення приводу машини.
8. Що таке машинний агрегат?
9. Що називається механізмом і які його елементи ви знаєте?
10. Що називають ланкою, які види ланок існують?
11. Чим відрізняється деталь від ланки?
12. Що називають кінематичною парою?
13. Що називається кінематичним ланцюгом?
14. Як класифікуються механізми.
15. Які вимоги ставляться до сучасних механізмів?

РОЗДІЛ 16. СТРУКТУРА І КЛАСИФІКАЦІЯ МЕХАНІЗМІВ

16.1. Основні поняття

Створення нових механізмів та аналіз існуючих можливо за умов, коли повністю визначена структура і елементи механізму як складові технічної системи, і відомі закони з'єднань цих елементів.

Механізм як система твердих тіл може мати як просту, так і досить складну будову (структуру). Будовою механізму визначаються такі його найважливіші характеристики, як види здійснюваних рухів, способи їх перетворення, число ступенів вільності.

Формування механізму, тобто з'єднання окремих його частин в єдину систему, супроводжується накладанням певних обмежень руху – в'язей. Правильний їх вибір і розподіл в будові механізму обумовлює його надійну експлуатацію. Тому дуже важливо з багатьох різноманітних варіантів механізму вибрати самий оптимальний і правильно підібрати його основні структурні елементи. Для цього треба знати основні структурні характеристики сучасних механізмів та закономірності їх будови. Отже в даному розділі викладені основні закони утворення механізмів – їх структура (будова) та класифікація.

Як вже було зазначено вище, основними структурними елементами механізму є ланки (тверді тіла) та кінематичні пари (рухомі з'єднання твердих тіл). З точки зору теорії механізмів і машин, будь-який механізм чи машина складаються лише з ланок, які поєднані між собою кінематичними парами.

Кінематичні пари забезпечують при з'єднанні двох ланок відносну їх рухомість у складі механізму. Місце з'єднання однієї ланки з іншою називається *елементом кінематичної пари*. Фактично елементом кінематичної пари є сукупність поверхонь, ліній або точок, по яким відбувається рухоме з'єднання двох ланок, що власне і створює кінематичну пару. За допомогою кінематичних пар відбувається передача руху і зусиль в механізмі від вхідної ланки до вихідної. Варіанти поєднання різних ланок і кінематичних пар можна проаналізувати на основі дослідження структури механізму.

Структура механізму може бути на різних стадіях проектування описуватися різними засобами, з різним рівнем абстрагування: на функціональному рівні – функціональна схема, на рівні ланок і структурних груп – структурна схема і т. п.

Структурна схема – це графічне зображення механізму, що виконане з використанням умовних позначень рекомендованих стандартами або прийнятих в спеціальній літературі, містить інформацію про число і

розташування елементів (ланок, груп), а також про вигляд і клас кінематичних пар, що сполучають ці елементи. На відміну від кінематичної схеми механізму, структурна схема не містить інформації про розміри ланок і викреслюється без дотримання масштабів.

На будь-якому етапі проектування механізмів розрізняють задачі структурного синтезу і задачі структурного аналізу механізмів.

Задачею структурного аналізу є визначення параметрів структури заданого механізму – числа ланок і структурних груп, числа і видів кінематичних пар, ступенів рухомості (основних і місцевих), числа контурів і числа надлишкових в'язей.

Задачею структурного синтезу є синтез структури нового механізму, що має задані властивості: число рухомостей, відсутність місцевих рухомостей і надлишкових в'язей, мінімумом числа ланок, з кінематичними парами певного виду (наприклад, лише обертальними, як найбільш технологічними) і тому подібне.

Дослідження механізмів почнемо з вивчення їх структурної схеми, будови, числа і класу кінематичних пар, ступені рухомості і класу механізму.

Для цього спочатку розглянемо принцип утворення і класифікацію кінематичних пар механізмів.

16.2. Класифікація кінематичних пар

Як було зазначено вище, кінематичну пару в механізмі утворюють дві ланки при умові їх контакту (стикання або дотикання) і можливості їх відносного руху. Таку пару можуть створювати не тільки рухомі ланки, але і ланки, одна з яких нерухома і є в механізмі стояком.

При цьому стикання ланок може відбуватись як геометричним способом – за рахунок їх геометричної форми або конструкції, так і силовим способом – за рахунок сили притискання пружиною або сили тяжіння. У першому випадку говорять про геометричне замикання кінематичної пари, а у другому – про силове.

За характером відносного руху ланок кінематичні пари можна розділити на поступальні, обертальні, гвинтові, плоскі та сферичні.

За характером стикання ланок кінематичні пари ділять на вищі і нижчі (згідно класифікації Ф. Рело).

В нижчих кінематичних парах стикання відбувається по поверхні, у вищих – по лінії або в точках.

Одна з переваг нижчих кінематичних пар порівняно з вищими – можливість сприйняття і передачі більших зусиль завдяки більшій площі контакту в елементах кінематичної пари. Але у свою чергу застосування

вищих кінематичних пар дозволяє зменшити тертя в механізмах та машинах і отримати дуже різноманітні потрібні закони руху вихідної ланки механізму шляхом надання певної форми ланкам, що утворюють вищу пару.

Треба також відмітити, що нижчі кінематичні пари мають властивість оберненості руху (властивість інверсії), а вищі пари такої властивості не мають. Так, наприклад, при перекочуванні без ковзання циліндра по нерухомій площині траєкторія руху точки A , яка лежить на поверхні циліндра, буде циклоїдальною (рис. 4.8, *a*). І навпаки, при обкочуванні без ковзання площини B навколо нерухомого циліндра точка A площини B буде рухатись по евольвенті (рис. 4.8, *б*).

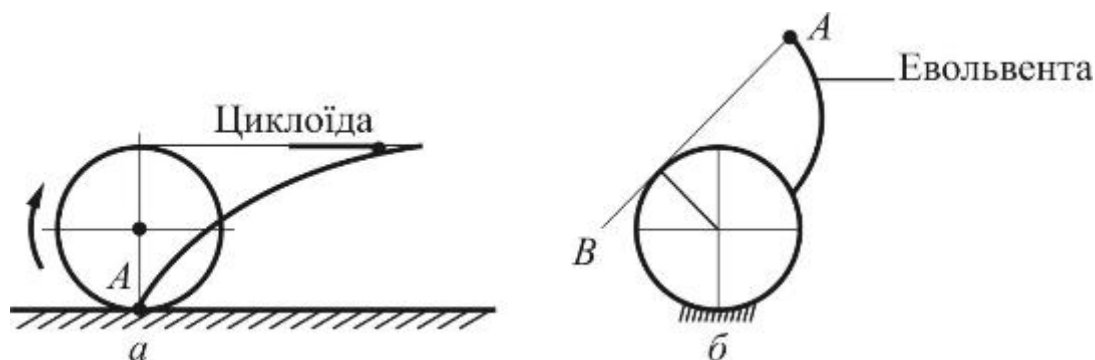


Рис. 4.8

Отже траєкторії збіжних точок вищих кінематичних пар будуть різними.

Згідно класифікації І. Артоболовського кінематичні пари поділяються на п'ять класів за числом обмежень (в'язей), які накладено на рух однієї ланки кінематичної пари відносно іншої. Розглянемо принцип цієї класифікації.

З курсу теоретичної механіки відомо, що у загальному випадку будь-яке абсолютно тверде тіло, що вільно рухається у просторі, має шість ступенів вільності (ступенів рухомості). Треба нагадати, що ступінь рухомості визначається кількістю незалежних один від одного параметрів, які характеризують положення тіла. Це можуть бути відстані між точками, координати точок або величини кутів між двома напрямками, що характеризують положення тіла.

Дійсно, якщо відомо положення трьох довільних точок тіла A , B і C (рис. 4.9) із координатами $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$ то вони цілком однозначно будуть визначати і положення усього тіла. Але ці дев'ять координат зв'язані між собою трьома умовами постійності відстаней AB , BC , AC . В результаті кількість незалежних параметрів, які

однозначно будуть характеризувати положення даного твердого тіла у просторі, зменшиться до шести.

При цьому можливими будуть шість видів незалежних рухів тіла – три обертальних навколо осей x , y та z і три поступальних уздовж цих же осей.

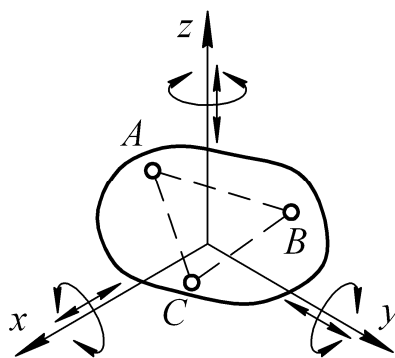


Рис. 4.9

Таким чином будь-яке переміщення вільного твердого тіла у просторі можна розкласти на шість його незалежних рухів (ступенів вільності). Отже і вільна ланка, як вільне тверде тіло, у просторі, буде мати також шість ступенів вільності (шість незалежних рухів).

Але коли дві ланки утворюють кінематичну пару, то на відносний рух цих ланок накладаються деякі обмеження (в'язі), що залежать від способу їх з'єднання.

В результаті число ступенів вільності H однієї ланки відносно іншої при утворенні кінематичної пари буде зменшуватись згідно наступної залежності:

$$H = 6 - S,$$

де S – кількість умов в'язі.

Тоді клас кінематичної пари за числом умов в'язей S згідно класифікації І. Артоболевського визначається за формулою

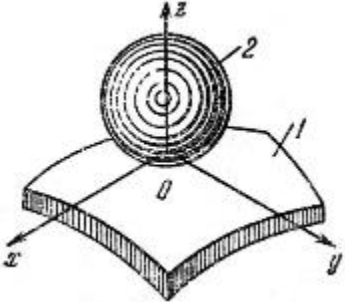

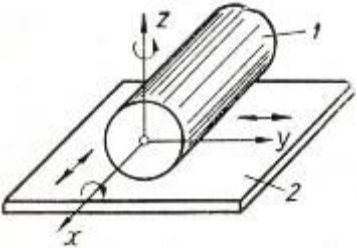

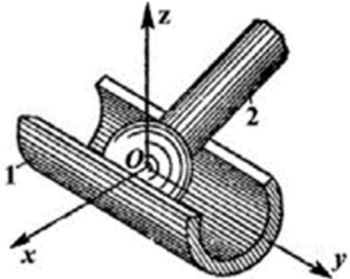

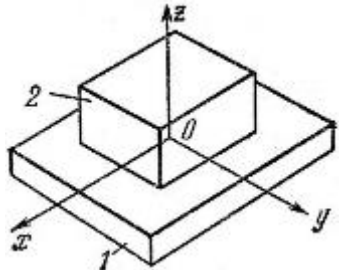

$$S = 6 - H. \quad (4.1)$$

Крім цього за класифікацією В. Добровольського всі кінематичні пари поділяють за кількістю незалежних рухів (за числом ступенів вільності H) на одно-, дво-, три-, чотири- і п'ятирухомі.

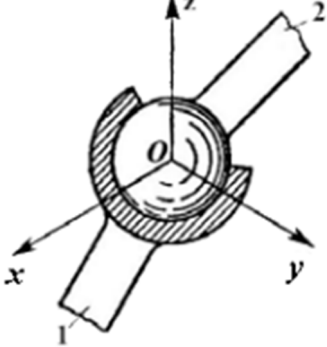

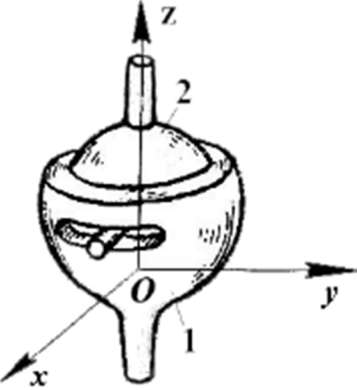

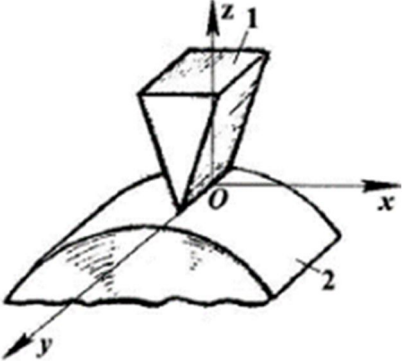
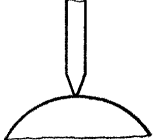
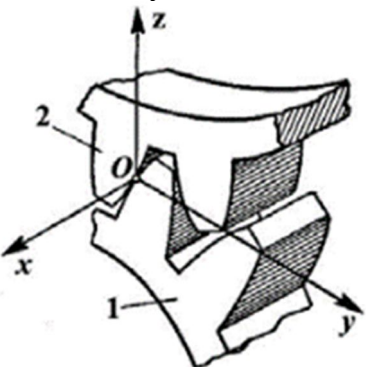

Існує велика кількість конструктивних форм і складових елементів кінематичних пар. Для зручності зображення кінематичних пар і складових ланок прийнято їх умовне позначення, незалежно від дійсного конструктивного оформлення.

В табл. 4.1 наведено приклади кінематичних пар: їх назва, схема, кількість умов в'язі S , число ступенів вільності H , вид, клас та умовне позначення згідно з рекомендаціями міжнародних стандартів, стосовно структурних та кінематичних схем. Треба відзначити, що тут наведено принципове зображення кінематичних пар, а їх конструктивне виконання може бути різним.

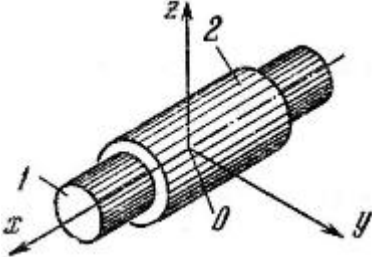

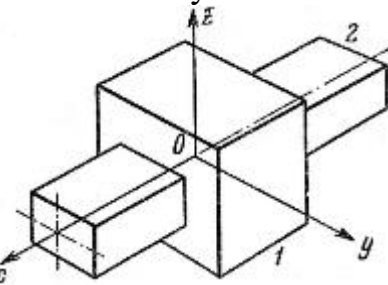

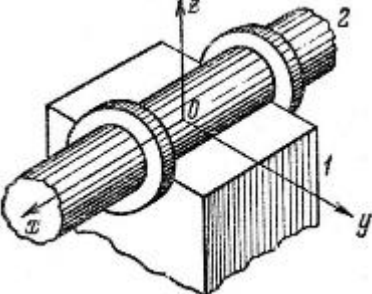
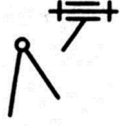
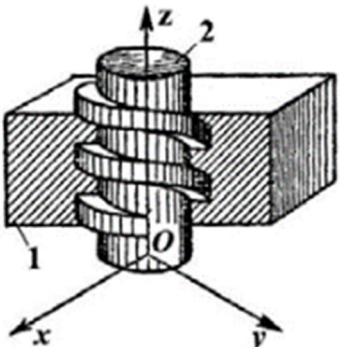

Таблиця 4.1. Класифікація кінематичних пар (КП)

Назва і схематичне зображення КП	S	H	Вид	Клас	Умовне позначення
1	2	3	3	5	6
1. Куля-площина 	1	5	Вища	I	
2. Циліндр-площина 	2	4	Вища	II	
3. Куля-циліндр 	2	4	Вища	II	
4. Площинна 	3	3	Нижча	III	

Продовження табл. 4.1

1	2	3	4	5	6
<p>5. Сферична</p> 	3	3	Нижча	III	
<p>6. Сферична з пальцем</p> 	4	2	Нижча	IV	
<p>7. Плоска</p> 	4	2	Вища	IV	
<p>8. Зубчаста</p> 	4	2	Вища	IV	

Продовження табл. 4.1

1	2	3	4	5	6
9. Циліндрична 	4	2	Нижча	IV	
10. Поступальна 	5	1	Нижча	V	
11. Обертальна 	5	1	Нижча	V	
12. Гвинтова 	5	1	Нижча	V	

1. У п'ятирухомій вищій КП I класу куля – площина куля може повертатись навколо кожної з координатних осей і рухатись поступально вздовж двох осей, тобто має 5 ступенів вільності ($H=5$). Умовою існування цієї КП є те, що куля не може відірватись від площини, бо тоді ланки не будуть дотикатись і це утворення перестане бути кінематичною парою. Тобто в даній КП неможливий один поступальний рух (вздовж

вертикальної осі z) і кількість умов в'язі становить $S=1$. Тому за визначенням маємо п'ятирухому пару I класу. Номери класів пар позначають римськими цифрами. Стикання ланок відбувається в точці. Тому ця пара буде вища.

Відмітимо, що в даній кінематичній парі має бути передбачене її силове замикання.

2. *Чотирирухома вища КП II класу циліндр – площина* має число ступенів вільності $H=4$, а кількість умов в'язі $S=2$. Неможливим тут буде один відносний поступальний рух ланок (вздовж вертикальної осі z) і один обертальний (навколо осі y). Стикання ланок відбувається по прямій. Тому ця пара вища з силовим замиканням.

3. *Для чотирирухомої вищої КП II класу куля – циліндр* число ступенів вільності і кількість умов в'язі також дорівнюють $H=4$ і $S=2$. Неможливими тут будуть два відносні поступальні рухи ланок (вздовж вертикальної осі z і горизонтальної осі x). Оскільки стикання тут відбувається в точці або по лінії, то пара вища з геометричним замиканням.

4. *У трирухомій нижчій КП III класу площинній* число ступенів вільності і кількість умов в'язі $H=3$, $S=3$. Неможливими тут будуть три відносні обертання ланок (навколо осей x , y , z). Стикання ланок відбувається по поверхні. Тому ця пара нижча з силовим замиканням.

5. *Для трирухомої нижчої КП III класу сферичної* число ступенів вільності і кількість умов в'язі також буде $H=3$, $S=3$. Але обмеження тут накладається на три відносних поступальних рухи (вздовж координатних осей x , y , z). Стикання ланок відбувається також по поверхні з геометричним замиканням.

6. *Дворухома нижча КП IV класу сферична з пальцем* являє собою кулю всередині ланки із сферичною поверхнею. Куля може повертатись навколо осі пальця та разом з ним повертатись вздовж паза, прорізаного в сферичній поверхні іншої ланки. Тоді $H=2$, $S=4$, так як неможливими тут є три відносних поступальних рухи (вздовж координатних осей x , y , z) і один обертальний рух (навколо осі y). Оскільки стикання тут відбувається по поверхні, то пара вища з геометричним замиканням.

7. *У дворухомої вищої КП IV класу плоскій* одна ланка відносно іншої може ковзати (вздовж осі x) або похитуватись (повертатись навколо осі x) в одній тій самій площині. Інші відносні рухи ланок в інших площинах тут неможливі. Для неї $H=2$, $S=4$. Стикання ланок відбувається по лінії з силовим замиканням.

8. *У іншій дворухомої вищої КП IV класу зубчастій* одна ланка відносно іншої може також ковзати (вздовж осі x) та перекочуватись без

ковзання (навколо осі x) в одній тій самій площині. Інші просторові рухи ланок тут також будуть неможливими. Отже і тут $H = 2$, $S = 4$. Стикання ланок також відбувається по лінії.

9. У дворухомої нижчої КП IV класу циліндричної внутрішня ланка є циліндром, а зовнішня – втулкою з циліндричним отвором. Циліндр може обертатись в отворі втулки (навколо осі x) та пересуватись вздовж неї (рухатись поступально вздовж осі x). Тобто $H = 2$, $S = 4$. Стикання ланок відбувається по поверхні з геометричним замиканням.

10. Однорухома нижчої КП V класу поступальна допускає лише прямолінійний поступальний відносний рух ланок (вздовж осі x). Інші рухи тут неможливі. Тому $H = 1$, $S = 5$. Стикання ланок також відбувається по поверхні з геометричним замиканням.

11. Однорухома нижча КП V класу обертальна допускає лише один відносний обертовий рух однієї ланки навколо іншої (навколо осі x). Тому для неї також $H = 1$, $S = 5$. Елементи цієї пари дотикаються по циліндричній поверхні з геометричним замиканням.

12. В однорухомій нижчій КП парі V класу гвинтовій одна ланка може рухатись вздовж гвинтової поверхні іншої. Оскільки одна ланка відносно іншої має тільки один незалежний рух (обертання навколо і поступальний рух вздовж осі z гвинта взаємопов'язані між собою), то $H = 1$, $S = 5$. Стикання ланок відбувається по гвинтовій поверхні геометричним способом.

Треба відмітити, що в плоских механізмах можуть бути лише кінематичні пари IV та V класів. На сьогоднішній день ці кінематичні пари є найбільш поширеними.

Отже, як бачимо, для того, щоб визначити клас кінематичної пари, треба одну з ланок умовно прийняти за нерухому, зв'язати з нею просторову систему координат та порахувати кількість можливих незалежних рухів іншої ланки H (або порахувати накладені умови в'язі, тобто обмеження на можливі незалежні рухи ланки, S). Клас кінематичної пари відповідно буде визначатись як $S = 6 - H$.

Дослідивши кінематичні пари і користуючись їх умовним зображенням, далі можна скомпонувати структурну схему механізму. Така структурна схема буде являти собою умовне креслення механізму у вигляді кінематичного ланцюга, з'єднаного із стійкою.

Це дозволить визначити кількість ланок механізму, число і клас кінематичних пар, а також види руху, що здійснює кожна ланка відносно стояка.

Виконана в масштабі структурна схема механізму буде вже його кінематичною схемою.

16.3. Класифікація кінематичних ланцюгів

Ланки механізму, які з'єднані між собою кінематичними парами, утворюють кінематичний ланцюг.

Кінематичні ланцюги бувають простими і складними, замкненими і незамкненими, плоскими і просторовими.

1. За конструктивним виконанням кінематичні ланцюги ділять на:

Прості – це кінематичні ланцюги, яких кожна ланка має тільки дві кінематичні пари (рис. 4.10, а, в).

Складні – це кінематичні ланцюги, у яких є хоча б одна ланка, що утворює з іншими ланками три або більше кінематичних пар (рис. 4.10 б, г).

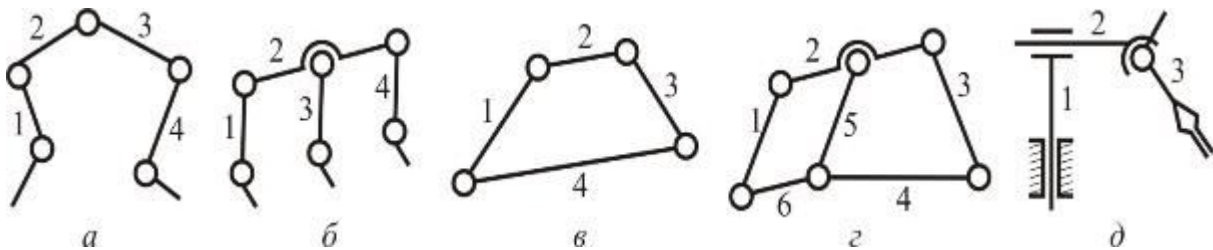


Рис. 4.10

2. За взаємодією ланок:

Замкнені – це кінематичні ланцюги, у яких ланки утворюють один або декілька замкнених контурів (рис. 4.10, в, г).

Незамкнені – це кінематичні ланцюги, у яких ланки не утворюють замкнених контурів (рис. 4.10, а, б).

3. За характером розташування ланок у просторі:

Плоскі – це кінематичні ланцюги, у яких траєкторії точок усіх його ланок лежать у паралельних площинах (рис. 4.10, а, б, в, г).

Просторі – це кінематичні ланцюги, у яких траєкторії точок його ланок є просторовими кривими або знаходяться у різних непаралельних площинах (рис. 4.10, д). Якщо точки ланок просторового ланцюга описують траєкторії на концентричних сферах, то такий ланцюг називається *сферичним*. Просторові кінематичні ланцюги використовують при проектуванні механізмів маніпуляторів і роботів.

Кінематичні ланцюги присутні в кожному механізмі, якщо він складений тільки з твердих тіл. Але існують також механізми (пневматичні, гідравлічні), у яких кінематичні ланцюги відсутні.

З'єднання кінематичних ланцюгів зі стійкою утворюють механізми, а взаємодія кінематичних ланцюгів між собою приводить до утворення кінематичних з'єднань. Розглянемо далі поняття кінематичних з'єднань, їх призначення і приклади.

16.4. Кінематичні з'єднання

Кінематичні пари, що наведені в табл.4.1, прості і компактні. Вони реалізують практично всі необхідні при створенні механізмів відносні переміщення ланок. Проте з точки зору конструктивного виконання при створенні механізмів і машин вони застосовуються досить рідко. Це обумовлено тим, що в елементах кінематичної пари зазвичай виникають значні зусилля тертя, які приводять до значного зносу елементів пари, а значить і до її передчасного руйнування.

Тому простий двохланковий кінематичний ланцюг кінематичної пари часто вигідно замінити довшими кінематичними ланцюгами, які в сукупності реалізують той же самий відносний рух ланок, що і замінювана ними кінематична пара.

Отже *кінематичне з'єднання* – це незамкнений кінематичний ланцюг, яким конструктивно можна замінити кінематичну пару.

Кінематичне з'єднання складається, як правило, з декількох ланок і кінематичних пар, але тільки дві ланки можуть бути з'єднані з іншими ланками механізму або машини.

Характерним прикладом кінематичного з'єднання є кульковий або роликівий підшипник, який конструктивно може замінити обертальну кінематичну пару і зменшити тим самим тертя (рис. 4.11, *a*). Підшипник має зовнішнє 1 і внутрішнє кільце 4, сепаратор 2 і кульки 3. Тут тільки внутрішнє або зовнішнє кільце з'єднане з іншими ланками.

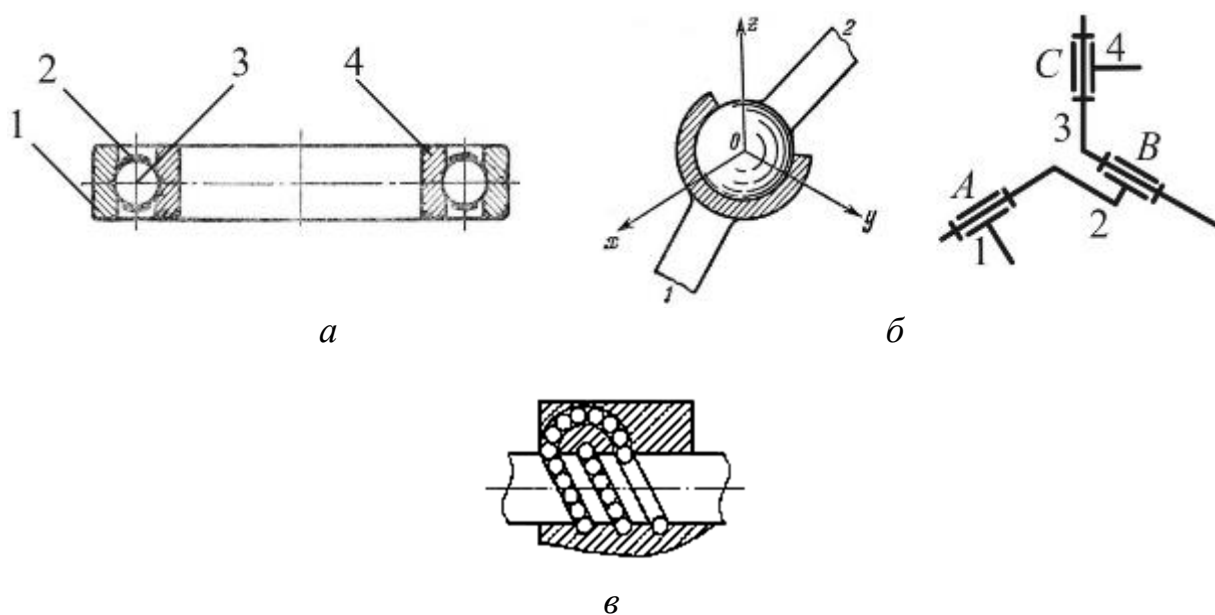


Рис. 4.11

Іншим прикладом є послідовне з'єднання чотирьох ланок трьома обертальними парами, осі яких перетинаються в одній точці (рис. 4.11, б). Цим кінематичним з'єднанням можна замінити сферичну кінематичну пару.

Також для зменшення тертя звичайна гвинтова пара може бути замінена на гвинтову пару кочення (рис. 4.11, в).

Використання кінематичних з'єднань замість кінематичних пар дає можливість збільшити здатність конструкції механізму або машини витримувати значні робочі навантаження, зменшити тертя та спростити технологію виготовлення.

16.5. Структурні схеми механізмів з вищими і нижчими кінематичними парами

В залежності від виду кінематичних пар, які входять у склад механізмів, розрізняють механізми з нижчими і вищими кінематичними парами. І одні і другі можуть бути як плоскими, так і просторовими.

Найбільш поширені механізми з нижчими парами – клинові, гвинтові, важільні, а з вищими парами – кулачкові, зубчасті, фрикційні, мальтійські, храпові.

Також існує велика кількість різних комбінованих механізмів, які поєднують в собі ті або інші властивості цих основних механізмів.

Розглянемо далі приклади структурних схем найбільш поширених механізмів, які застосовуються в різних машинах.

Механізми з нижчими кінематичними парами

Клиновий механізм – це механізм, структура якого містить лише нижчі поступальні кінематичні пари (рис. 4.12).

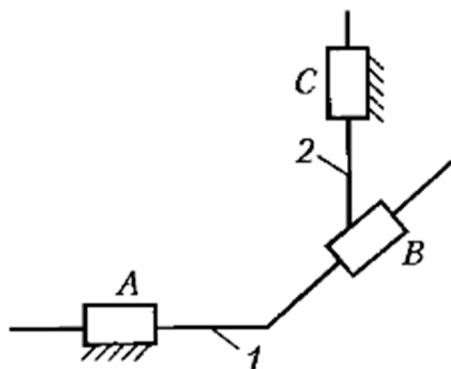


Рис. 4.12

Клинові механізми призначені для передачі руху і зусиль між ланками, осі яких перетинаються. Усі клинові механізми відносяться до виду механізмів, що перетворюють поступальний рух ланки 1 в поступальний рух ланки 2. Клинові механізми застосовують у різного роду затискних пристроях і пристосуваннях, в яких потрібно створити велике зусилля на виході при обмежених зусиллях на вході.

Гвинтові механізми – це механізми, структура яких містить лише нижчі кінематичні пари, хоча б одна з яких є гвинтовою.

Гвинтові механізми призначені для передачі руху і зусиль між співвісними ланками. Усі гвинтові механізми відносяться до виду механізмів, що перетворюють обертальний рух в поступальний.

Схема типового гвинтового механізму містить стійку і дві рухомі ланки (рис. 4.13).

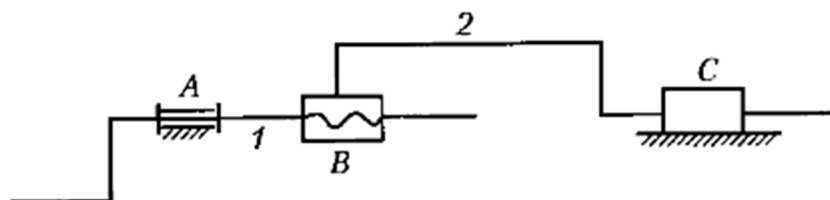


Рис. 4.13

Рухомими ланками типових гвинтових механізмів є гвинт 1 і гайка 2.

У гвинтових механізмах перетворення руху і зусиль здійснюється шляхом безпосереднього контакту робочої поверхні гвинта з робочою поверхнею гайки. Внаслідок різниці швидкостей руху контактуючих поверхонь ланок в зоні їх контакту має місце тертя ковзання, що приводить до інтенсивного зносу цих поверхонь, зменшення ККД і ресурсу роботи механізму. Тому для заміни в гвинтовій парі тертя ковзання на тертя кочення в схемі гвинтового механізму застосовують замість гвинтової кінематичної пари кінематичне з'єднання – гвинтову пару кочення (рис. 4.11, в), а отриманий механізм буде кульково-гвинтовим.

Далі розглянемо важільні механізми.

Важільні механізми – це механізми, які утворені ланками, що виконані у вигляді стержневих конструкцій-важелів.

У цілому ланки важільних механізмів можуть утворювати нижчі обертальні, поступальні, циліндричні або сферичні кінематичні пари в залежності від конструктивного виконання механізмів і від того плоскі вони, чи просторові.

Плоскі важільні механізми – це механізми, які мають тільки обертальні та поступальні пари. Такі механізми знайшли широке

застосування завдяки можливості забезпечення потрібного перетворення руху при простоті геометричних форми ланок та елементів кінематичних пар. Перевагами цих механізмів є висока технологічність виготовлення, здатність передавати відносно великі зусилля, довговічність та надійність у роботі.

Основним представником таких механізмів є шарнірний чотириохланковий механізм (рис. 4.14). Такий механізм складається із рухомих ланок: кривошипа 1, шатуна 2 і коромисла 3.

Шарнірний чотириланковий механізм використовується для перетворення одного виду обертального руху в інший його вид (наприклад обертально-коливальний) і може бути в залежності від розмірів ланок бути кривошипно-коромисловим, а також двохкривошипним або двохкоромисловим.

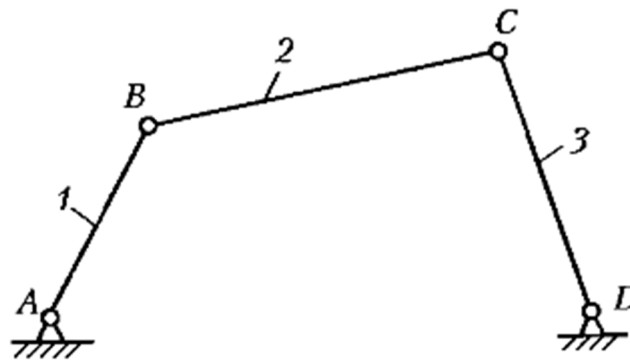


Рис. 4.14

Прикладом такого механізму в техніці може служити механізм переміщення та ущільнення соломи в бункері зернозбирального комбайна.

Якщо в шарнірному чотириохланковому механізмі замінити обертальну пару (наприклад D) на поступальну, то можемо отримати кривошипно-повзунний механізм двох видів (рис. 4.15, а, б).

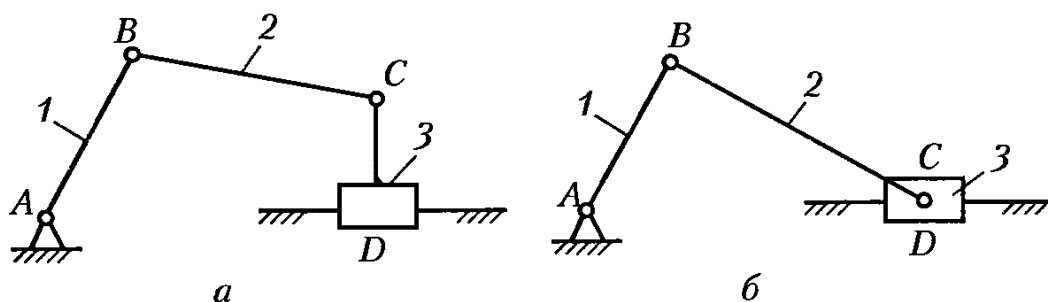


Рис. 4.15

Кривошипно-повзунний механізм перетворює обертальний рух кривошипа 1 в поступальний рух повзуна 3. Цей механізм є основою всіх поршневих машин (двигунів внутрішнього згорання, компресорів, насосів, пресів і т.ін.).

Якщо ж замінити в шарнірному чотирьохланковому механізмі обертальну пару C на поступальну, отримаємо *кулісний механізм*. Рухомими ланками простого кулісного механізму є кривошип 1, кулісний камінь 2 і куліса 3.

Деякі різновиди кулісних механізмів представлені на рис. 4.16.

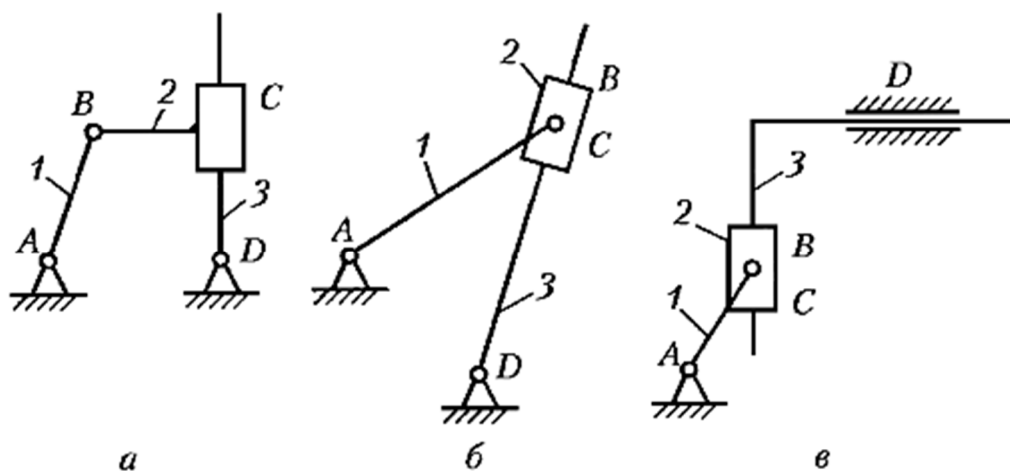


Рис. 4.16

Кулісні механізми перетворюють обертальний рух в коливальний (рис. 4.16, *а, б*), або обертальний рух в поступальний (рис. 4.16, *в*). Використовуються такі механізми в стругальних верстатах, валкових жниварах, конвеєрах.

Зокрема кулісний механізм, представлений на рис. 4.16, *в*, отримано із шарнірного чотирьохланкового механізму шляхом заміни у ньому обертальних пар C і D на поступальні. Цей механізм ще носить назву *синусного*, тому що у ньому переміщення повзуна 2 пропорціональне синусу кута повороту кривошипа 1. Синусні механізми застосовується в інерційних конвеєрах для переміщення насипних матеріалів.

Існує також різновид кулісного механізму, в якому переміщення вихідної ланки (повзуна 3) пропорційне тангенсу кута повороту кривошипа 1. Такий механізм носить назву *тангенсного* механізму (рис. 4.17).

Треба відмітити, що тут із точки зору кінематики ланки 1 і 2 краще називати кулісою і кулісним каменем.

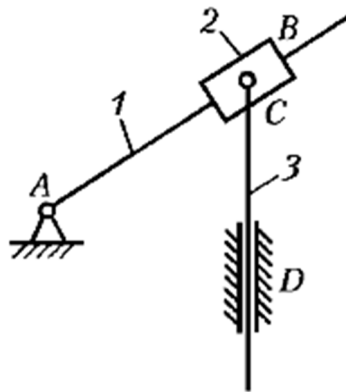


Рис. 4.17

Крім плоских важільних механізмів на практиці використовуються також просторові важільні механізми з нижчими кінематичними парами. На рис. 4.18 наведені приклади схем деяких просторових важільних механізмів.

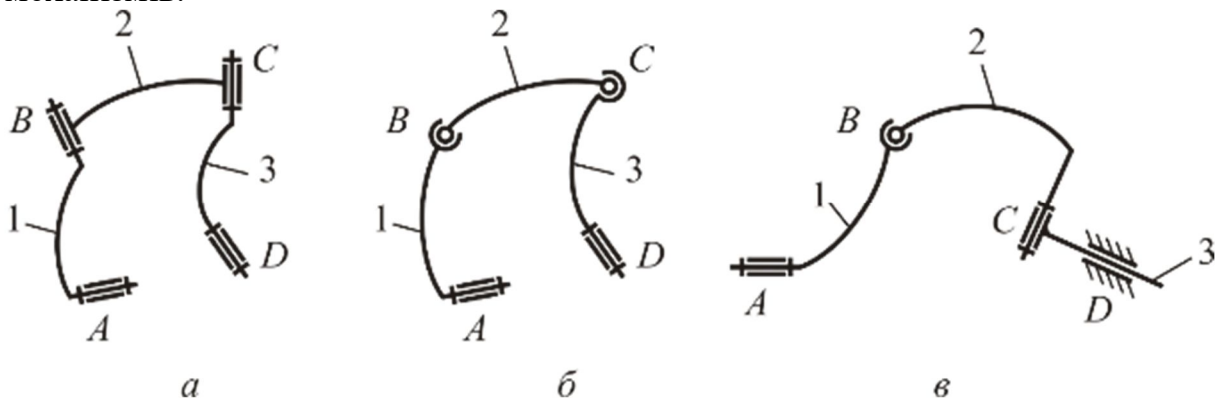


Рис. 4.18

Просторовий шарнірний чотириланковий механізм може складатись тільки з кінематичних пар п'ятого класу (рис. 4.18, а), або включати пари B , C третього класу (рис. 4.18, б). Структурне перетворення такого механізму дозволяє отримати різні кінематичні з'єднання (наприклад, універсальний шарнір).

Просторовий кривошипно-повзунний механізм (рис. 4.18, в) застосовується у тому випадку, якщо вісь обертання вхідної ланки не буде перпендикулярною до площини, в якій рухається повзун.

Широкого вжитку важільні механізми набули в робототехніці. Особливістю цих механізмів є те, що у них велике число ступенів вільності, а значить, вони мають багато приводів. Узгоджена робота

приводів вхідних ланок забезпечує точне переміщення вихідної ланки (робочого органу) по раціональній траєкторії в задане місце навколишнього простору.

Механізми з вищими кінематичними парами

Кулачковими механізмами називаються механізми з вищими кінематичними парами, до складу яких входить кулачок – ланка, яка виконана у вигляді поверхні змінної кривизни (рис. 4.19).

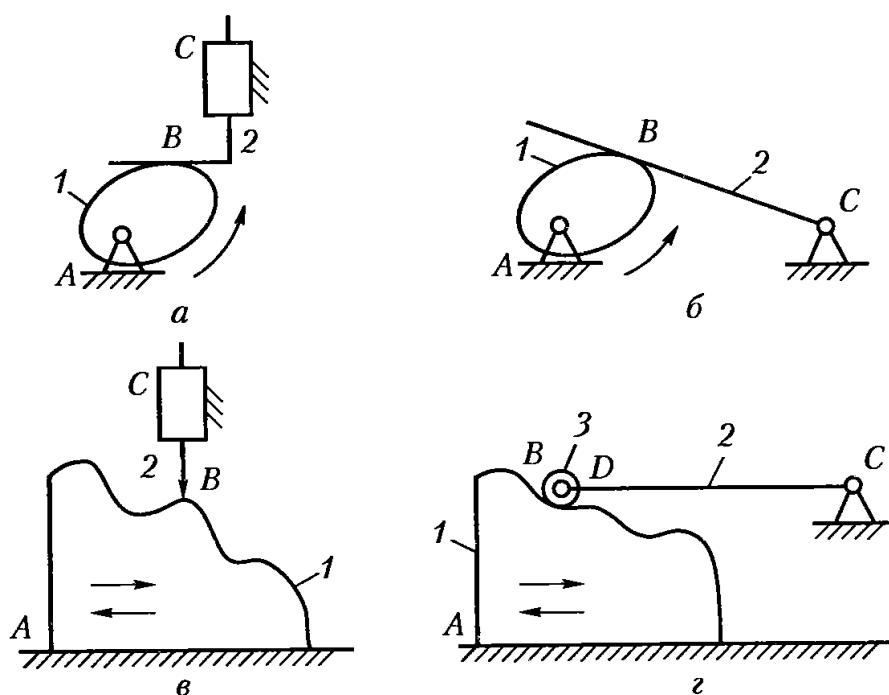


Рис. 4.19

Вища кінематична пара B IV класу тут утворюється між поверхнями контакту кулачка 1 і вихідної ланки 2.

За допомогою кулачкових механізмів можна отримати майже будь-який рух вихідної ланки за заданим законом.

Необхідний закон руху вихідної ланки досягається за рахунок надання вхідній ланці – кулачку відповідної форми. Кулачок може здійснювати обертальний (рис. 4.19, а, б), поступальний (рис. 4.19, в, г) або складний рухи. Вихідна ланка, що здійснює поступальний рух (рис. 4.19, а, в), називається штовхачем, а якщо коливальний рух (рис. 4.19, б, г) – коромислом. Для зменшення втрат та тертя у вищій кінематичній парі B застосовують додаткову ланку – ролик.

Кулачкові механізми можуть бути як плоскими, так і просторовими.

Різноманітність форми кулачка визначає надзвичайну різноманітність законів руху його вихідної ланки.

Кулачкові механізми використовуються в двигунах внутрішнього згорання для автоматичного керування роботою клапанів і т.ін.

Фрикційними механізмами називаються механізми, в яких передача руху між контактуючими ланками здійснюється за рахунок сил тертя.

Схеми найпростіших триланкових фрикційних механізмів представлені на рис. 4.20.

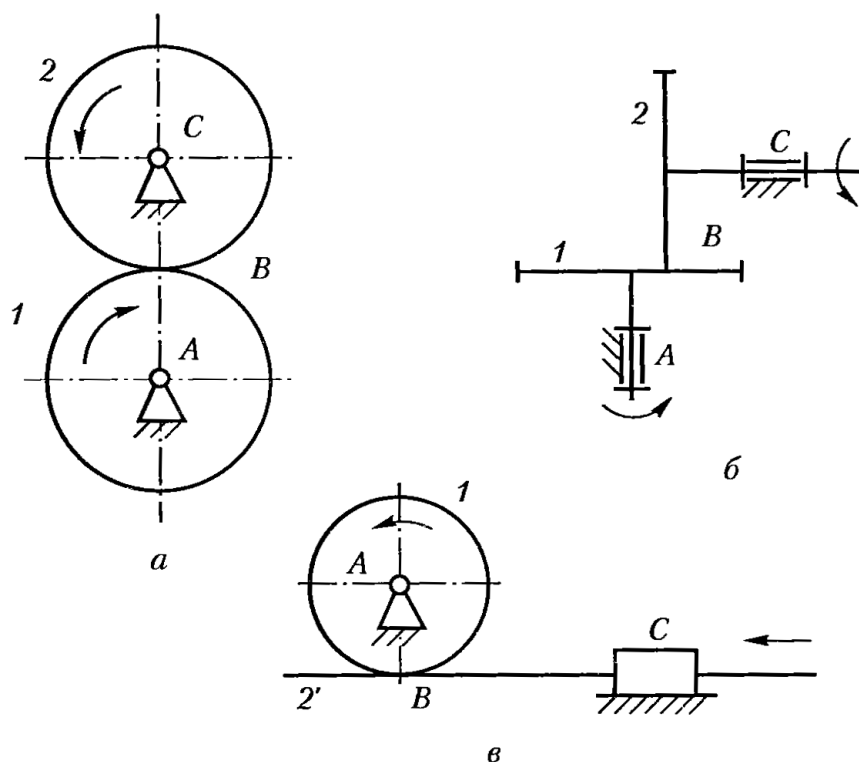


Рис. 4.20

Це фрикційний механізм із паралельними осями (рис. 4.20, а), фрикційний механізм із осями, що перетинається (рис. 4.20, б) і рейковий фрикційний механізм (рис. 4.20, в)

Основними рухомими ланками фрикційних механізмів є вхідна ланка 1 (ведуче колесо), вихідна ланка 2 (ведене колесо), рейка 2'.

Внаслідок того що у фрикційних механізмах ланки 1 і 2 притиснуті одна до одної, по лінії контакту між ними виникає сила тертя, за допомогою якої рух від ланки 1 передається на ведену ланку 2.

Фрикційні механізми можуть бути як плоскими (з паралельними осями коліс), так і просторовими (з осями, що перетинаються, конічними колесами і т.ін.).

Широкого вжитку фрикційні механізми отримали в приладах, фрикційних лебідках, варіаторах (механізмах з плавним регулюванням числа обертів).

Механізм, який призначений для передавання (перетворення) обертального руху за допомогою пари зубчастих коліс (або колеса і рейки), що перебувають у зачепленні, називається *зубчастим механізмом* або *зубчастою передачею*.

Пара зубчастих коліс зубчастої передачі утворює вищу кінематичну пару IV класу в місці зачеплення зубців ведучої і веденої ланок зубчастого механізму.

Зубчасті механізми бувають плоскими і просторовими, із зовнішнім і внутрішнім зачепленням, відкритими і закритими, з осями зубчастих коліс що паралельні, перетинаються або перехрещуються. За допомогою зубчастого зачеплення коліс можна здійснювати передачу обертального руху як між валами з нерухомими осями, так і з такими, що рухаються у просторі.

На рис. 4.21 показані деякі найбільш поширені види зубчастих механізмів з нерухомими осями.

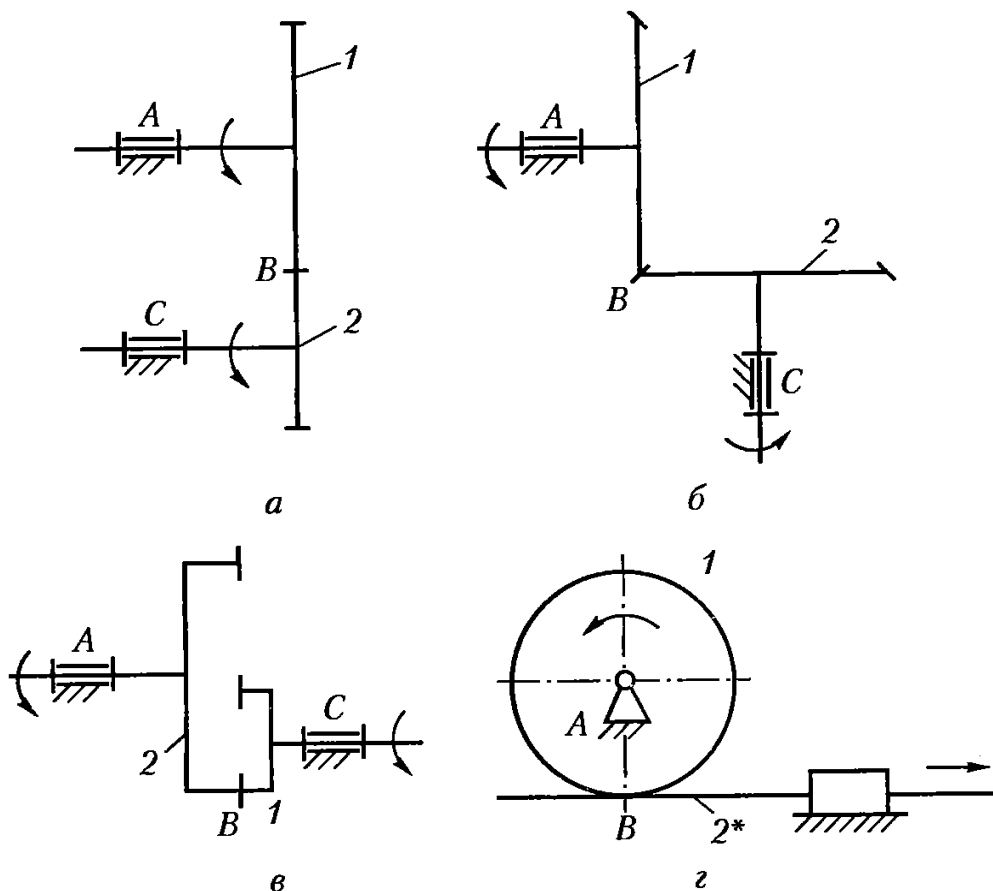
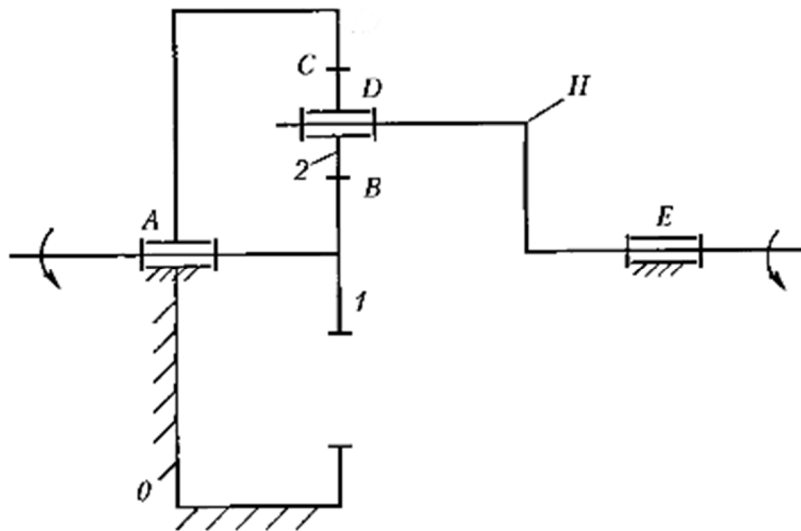


Рис. 4.21

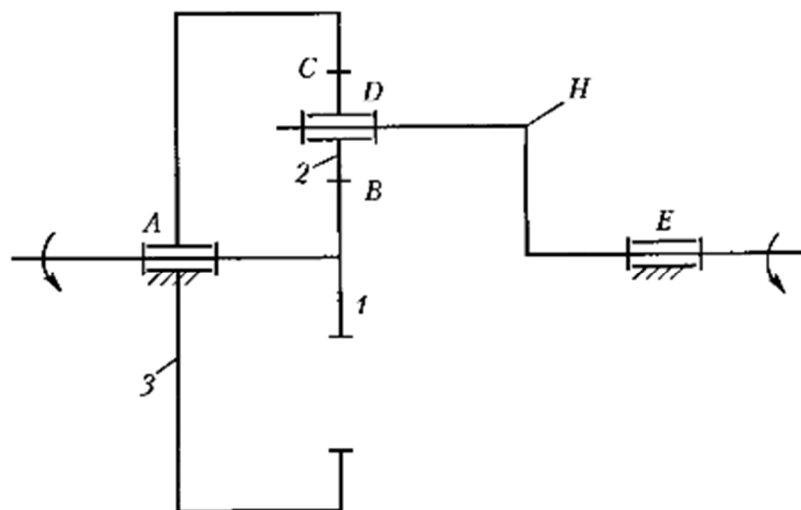
Це циліндричні, конічні, торцеві, рейкові механізми, що мають рухомі ланки: вхідну ланку 1 (ведуче колесо), вихідну ланку 2 (ведене колесо), рейку 2'.

Колесо зубчастої передачі, яке менше за розмірами і числом зубців, називають шестернею, а більше – зубчастим колесом. Рейка є окремим випадком зубчастого колеса, у якого радіус кривизни дорівнює нескінченності.

Зубчасті механізми, у яких є колеса з рухомими осями, називаються епіциклічними. Епіциклічні механізми поділяються на планетарні, у яких центральне колесо нерухоме – 0 (рис. 4.22, а) і диференціальні, у яких центральне колесо 3 обертається (рис. 4.22, б).



а



б

Рис. 4.22

Епіциклічні зубчасті механізми порівняно із механізмами з нерухомими осями дозволяють передавати більші потужності і передаточні числа при меншому числі зубчастих коліс (особливо диференціальні).

Для передачі обертання на великі відстані використовують також зубчасті механізми із гнучкими в'язями (зубчасті паси або ланцюги).

Передача обертального руху між осями, що перехрещуються, здійснюється за допомогою черв'ячної передачі (рис. 4.23).

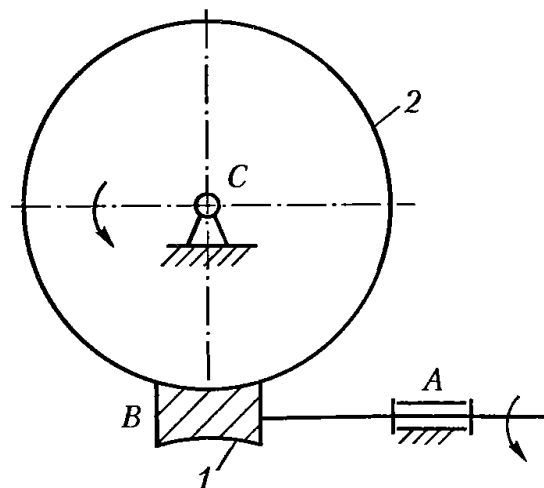


Рис. 4.23

Черв'ячна (або зубчасто-гвинтова) передача являє собою кінематичну пару, що складається з черв'яка і черв'ячного колеса.

Черв'ячну передачу можна розглядати як модифікацію гвинтової пари, довга гайка якої розрізається поздовжньою площиною (паралельною осі гвинта) і згинається в кругове кільце – зубчасте колесо, що охоплює тіло гвинта – черв'яка по дузі.

Завдяки особливості конструкції зачеплення черв'ячна передача має властивість самогальмування (рух може передаватись тільки від черв'яка до колеса, але не навпаки, що важливо для підйомних механізмів), а також дозволяє реалізувати великі передаточні відношення.

До зубчастих механізмів переривистого руху відносяться мальтійські і храпові механізми.

Так, наприклад, на рис.4.24, а показаний механізм чотирилопатевого "мальтійського хреста".

Даний механізм перетворює безперервне обертання вхідної ланки – кривошипа 1 з цівкою 3 в переривчасте обертання вихідної ланки 2 ("мальтійського хреста"). При цьому цівка 3 входить в радіальний паз ланки 2 і повертає його на кут $\frac{2\pi}{z}$, де z – число пазів.

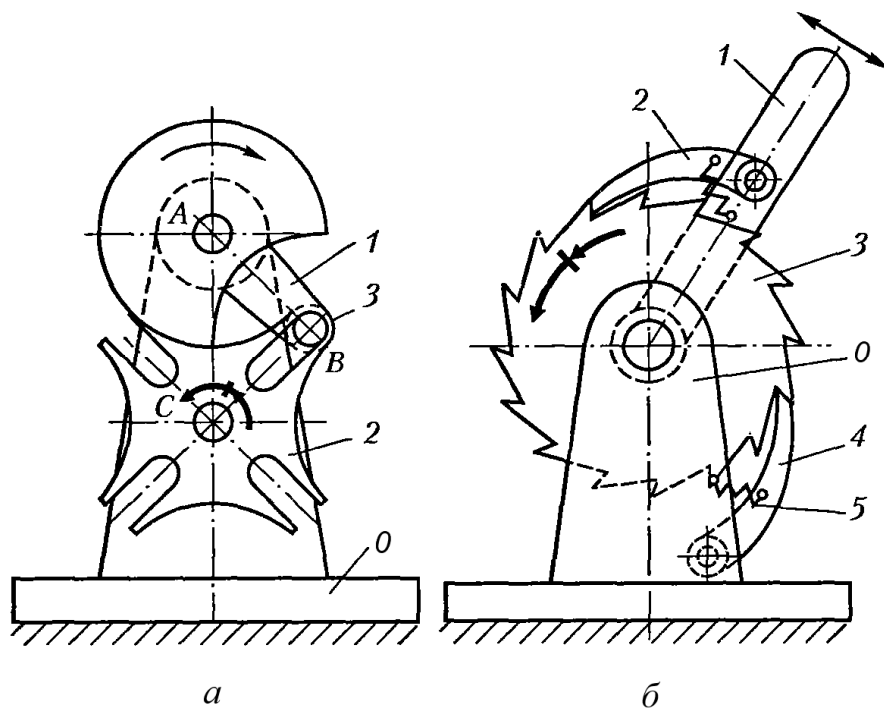


Рис. 4.24

Для здійснення руху лише в одному напрямі застосовують храпові механізми.

На рис.4.24, б показаний храповий механізм, який складається з коромисла 1, храпового колеса 3, собачок 3 і 4.

При коливаннях коромисла 1 собачка 2 надає обертання храповому колесу 3 лише при русі коромисла проти годинникової стрілки. Для утримання колеса 3 від руху за годинниковою стрілкою в механізмі встановлено стопорну собачку 4 із пружиною 5.

Мальтійські і храпові механізми широко застосовуються в регулюючих пристроях і приладах.

Отже ми розглянули лише невелику частину найбільш типових простих механізмів з вищими і нижчими кінематичними парами, які широко застосовуються у сільськогосподарському машинобудуванні, переробці продукції сільського господарства і інших галузях промисловості.

Більшість інших механізмів можна знайти у довідниках і спеціальній літературі, присвяченій цій темі [2, 18, 22].

Треба відмітити, що в сучасному машинобудуванні широко використовують також механізми з немеханічним способом передачі руху: електричним, гідравлічним, пневматичним і т.ін. Але ми будемо розглядати тільки механізми з механічним способом передачі руху.

16.6. Структурні формули механізмів

В структурі різноманітних механізмів існують загальні закономірності, які зв'язують рухомість механізму із числом його рухомих ланок і числом та видом його кінематичних пар. Ці закономірності носять назву *структурних формул* механізмів.

При цьому рухомість механізму є його найважливішою характеристикою, тому що структура механізму (його кінематичний ланцюг) має забезпечити за допомогою використання певних кінематичних пар в першу чергу можливість відтворення заданих відносних рухів його ланок.

У цілому *рухомість механізму* визначається числом незалежних узагальнених координат, що однозначно визначають положення ланок механізму у просторі чи на площині.

Для визначення рухомості механізму знаходять *число ступенів рухомості (вільності)* його рухомих ланок відносно нерухомої ланки (стояка) за допомогою *формул рухомості*, які і є *структурними формулами механізму*.

Знайдемо число ступенів рухомості W довільного просторового механізму, який має n рухомих ланок, що з'єднані між собою різними кінематичними парами від V до I класу.

Для n рухомих ланок цього механізму загальне число ступенів рухомості відносно стояка дорівнювало б $6n$, якби вони не були з'єднані між собою кінематичними парами. Кожна кінематична пара V класу зменшить це загальне число ступенів рухомості на 5 умов в'язі, а всі пари V класу – на $5p_1$, де p_1 – кількість однорухомих кінематичних пар V класу.

Аналогічно дворухома кінематична пара IV класу зменшить загальне число ступенів рухомості на 4 умови в'язі, а всі пари IV класу – на $4p_2$, де p_2 – кількість дворухомих кінематичних пар IV класу і т.д.

В результаті число ступенів рухомості просторового механізму можна знайти за наступною формулою:

$$W = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5, \quad (4.2)$$

де n – кількість рухомих ланок в механізмі; p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 – кількість одно-, дво-, ..., п'ятирухомих кінематичних пар V, IV, ..., I класу.

Або в скороченому вигляді

$$W = 6n - \sum_{i=1}^5 (6-i)p_i. \quad (4.2')$$

Формула (4.2) або (4.2') носить назву структурної формули

просторових механізмів (просторових кінематичних ланцюгів) або *формули Сомова – Малышева*.

Якщо розглянути плоскі механізми, то число ступенів рухомості ланок і умов в'язі в них буде на 3 менше, ніж у просторових. При цьому в плоских механізмах кінематичних пар I, II і III класів не існує, тому що їх ланки здійснюють тільки просторові рухи.

Тому структурна формула (4.2) для плоских механізмів перетвориться на наступну:

$$W = (6 - 3)n - (5 - 3)p_1 - (4 - 3)p_2. \quad (4.3)$$

В результаті ступінь рухомості буде дорівнювати:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2. \quad (4.4)$$

Формула (4.4) називається структурною формулою для плоских механізмів з не тільки поступальними кінематичними парами або *формулою Чебишева*.

Для плоских механізмів тільки з поступальними кінематичними парами число ступенів рухомості ланок і умов в'язі буде менше на 4, ніж у просторових. Пар IV класу в таких механізмах також не буває.

В результаті структурна формула (4.2) прийме вигляд:

$$W = 2n - p_1. \quad (4.5)$$

Формула (4.5) називається структурною формулою для плоских механізмів з тільки поступальними кінематичними парами або *формулою Добровольського*.

Таким чином формули (4.2), (4.4) і (4.5) використовуються для визначення ступенів рухомості при проведенні структурного аналізу існуючих механізмів і синтезу структурних схем нових механізмів.

Далі наведемо приклади визначення ступенів рухомості деяких просторових і плоских механізмів.

Приклад (рис. 4.25). Визначити ступінь рухомості просторового механізму маніпулятора для різання.

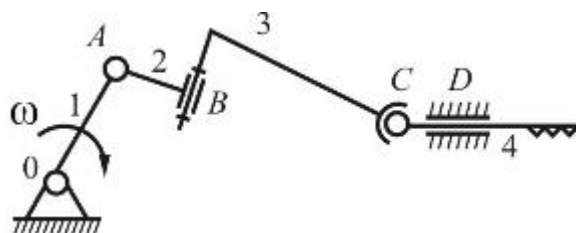


Рис. 4.25

Розв'язання.

Число рухомих ланок у даному просторовому механізмі буде $n = 4$. Число однорухомих кінематичних пар V класу дорівнює $p_1 = 4$, число трирухомих кінематичних пар III класу – $p_3 = 1$, кінематичні пари інших класів відсутні.

Ступінь рухомості такого просторового механізму визначається за формулою Сомова – Малишева:

$$W = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5 = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 4 - 4 \cdot 0 - 3 \cdot 1 = 2.$$

Приклад (рис. 4.26). Визначити ступінь рухомості плоского важільного механізму пресу.

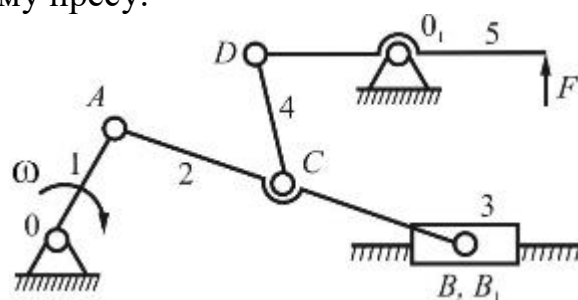


Рис. 4.26

Розв'язання.

Число рухомих ланок у даному плоскому механізмі буде $n = 5$. Число однорухомих кінематичних пар V класу тут дорівнює $p_1 = 7$, кінематичні пари інших класів відсутні.

Ступінь рухомості цього плоского механізму визначається за формулою Чебишева:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1.$$

Приклад (рис. 4.27). Визначити ступінь рухомості плоского механізму з тільки поступальними кінематичними парами.

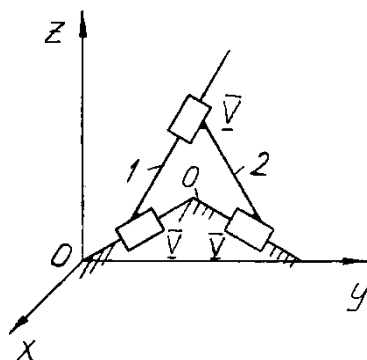


Рис. 4.27

Розв'язання.

Число рухомих ланок у даному плоскому механізмі буде $n = 2$. Число однорухомих кінематичних пар V класу тут дорівнює $p_1 = 3$, кінематичні пари інших класів відсутні.

Ступінь рухомості такого плоского механізму визначається за формулою Добровольського:

$$W = 2n - p_5 = 2 \cdot 2 - 3 = 1.$$

Приклад (рис. 4.28). Визначити ступінь рухомості ступінчастого зубчастого механізму з нерухомими осями коліс..

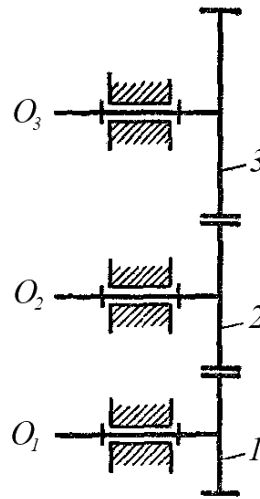


Рис. 4.28

Розв'язання.

Число рухомих ланок у даному механізмі буде $n = 3$. Число однорухомих кінематичних пар V класу тут дорівнює $p_1 = 3$, а дворухомих IV класу – $p_2 = 2$.

Ступінь рухомості цього плоского механізму визначається за формулою Чебишева:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$$

Приклад (рис. 4.29). Визначити ступінь рухомості епіциклічного зубчастого механізму у двох варіантах:

а). коли механізм планетарний і центральне колесо буде нерухомим (рис. 4.29, а);

б). коли механізм буде диференціальний і центральне колесо буде

обертатись (рис. 4.29, б).

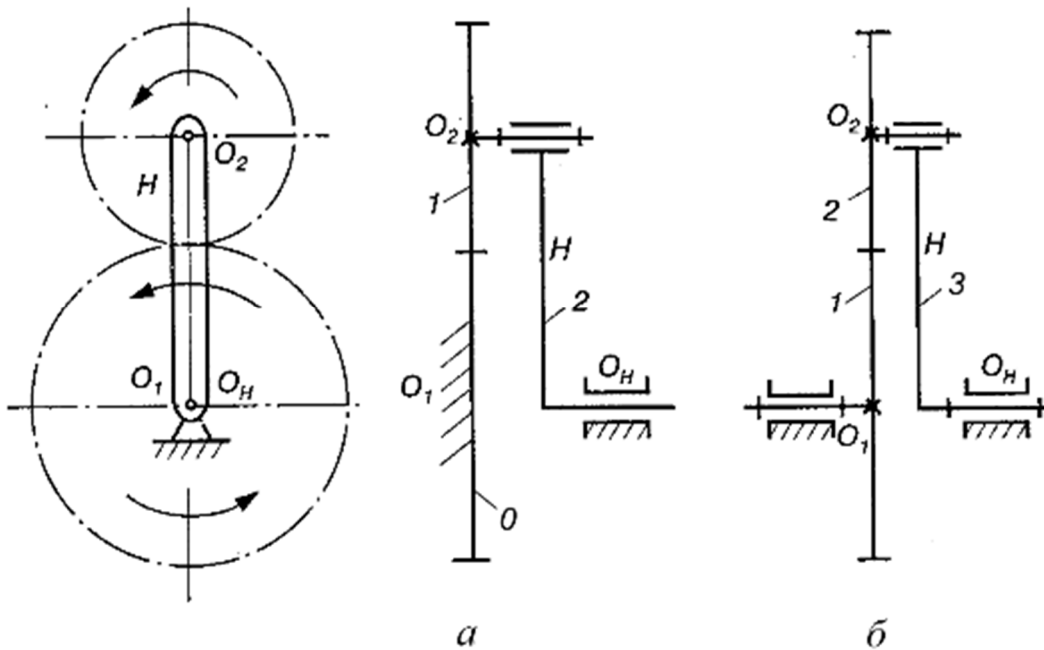


Рис. 4.29

Розв'язання.

а). В першому варіанті для планетарного механізму число його рухомих ланок буде $n = 2$. Число однорухомих кінематичних пар V класу тут дорівнює $p_1 = 2$, дворухомих кінематичних пар IV класу $p_2 = 1$.

Тоді за формулою Чебишева ступінь рухомості цього плоского механізму:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1.$$

б). У другому варіанті для диференціального механізму число його рухомих ланок буде $n = 3$. Число однорухомих кінематичних пар V класу тут дорівнює $p_1 = 3$, дворухомих кінематичних пар IV класу $p_2 = 1$.

Тоді за формулою Чебишева:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2.$$

Отже ступінь рухомості диференціальних механізмів більше одиниці.

Проаналізуємо тепер поняття ступеня рухомості (вільності) механізму більш докладно.

Як було з'ясовано вище, ступінь рухомості механізму характеризує число ступенів рухомості його кінематичного ланцюга відносно стояка. Отже, якщо механізм має один ступінь рухомості, то одній з ланок

механізму треба задати рух; при цьому всі інші ланки механізму отримують цілком визначені рухи, що є функціями заданого. Тобто для визначеності рухів усіх ланок механізму, який утворений кінематичним ланцюгом з одним ступенем рухомості, необхідно і достатньо мати заданим закон руху однієї з ланок.

Якщо ж механізм має два ступені рухомості, то необхідно задати одній з ланок два незалежних рухи або двом ланкам по одному незалежному руху.

Отже, ступінь рухомості механізму вказує на число незалежних рухів, які треба задати в механізмі, щоб рух усіх інших ланок був цілком визначеним.

Зазначимо, що при нульовому ступені рухомості ні одна з ланок не може рухатися відносно нерухомої ланки і кінематичний ланцюг перетворюється у ферму.

Кожна з незалежних між собою координат, що визначає положення всіх ланок механізму відносно стояка, називається *узагальненою координатою механізму*. За узагальнену координату звичайно приймається кут повороту або лінійне зміщення ланки.

Ланка, якій приписується одна чи декілька узагальнених координат, називається *початковою* ланкою. Цей термін пов'язаний з тим, що знаходження положень усіх ланок механізму починають з побудови положень початкової ланки. Вибір початкової ланки визначається зручністю визначення положень ланок механізму та зручністю його аналізу. Початкові та вхідні ланки можуть як збігатися, так і не збігатися.

Число узагальнених координат механізму також визначається ступенем рухомості механізму. Кожний незалежний рух визначається заданням закону зміни однієї узагальненої координати (кутової або лінійної).

Наприклад, для кривошипно-повзунного механізму (рис. 4.7) ступінь рухомості дорівнює одиниці, тобто $W = 1$. Отже, для визначеності руху всіх його ланок треба задатися всього одним рухом або треба мати заданою всього одну узагальнену координату.

Нехай буде заданим закон обертання ланки I у вигляді функції $\varphi_1 = f(t)$, де φ_1 – кут повороту кривошипа I . У цьому разі всі інші ланки цього механізму будуть мати цілком визначений рух. Ланка 1 механізму (кривошип) буде *вхідною (початковою)*. Нагадаємо, що ланка (ланки) механізму, якій надається рух, що перетворюється в потрібний рух інших ланок механізму, називається *вхідною*.

Ступінь рухомості механізму визначає число вхідних (початкових) ланок, тобто кількість ланок, яким необхідно задати рух, щоб усі інші ланки рухались цілком визначено.

Зазначимо, що, в основному, в конструкціях машин і приладів використовуються механізми з одним ступенем вільності. Значно рідше знаходять застосування механізми з двома та більше ступенями вільності. До таких конструкцій відносяться, наприклад, диференціали автомобілів, маніпулятори.

Але інколи трапляється, що число ступенів рухомості механізму, яке розраховано за структурними формулами, може не співпадати із його дійсним значенням. Розглянемо такі випадки нижче.

16.7. Надлишкові в'язі та зайві ступені рухомості

Крім в'язей, які активно впливають на число ступенів рухомості механізму і були розглянуті вище, в механізмах також можуть існувати так звані *надлишкові* або *пасивні в'язі*.

Пасивні в'язі не впливають на кінематику всього механізму в цілому, але формально змінюють його ступінь рухомості (вільності).

Ці в'язі можна отримати шляхом введення у склад механізму зайвої ланки, яка не буде впливати на його кінематику, але утворить зайві кінематичні пари з іншими його ланками. В результаті ступінь рухомості цього механізму зміниться. Такі ступені рухомості називаються зайвими, а в'язі – надлишковими або пасивними.

Звичайно пасивні в'язі вводяться у склад механізму для підвищення його жорсткості, зменшення впливу деформації на параметри руху, поліпшення розподілу діючих на ланки зусиль.

Розглянемо для прикладу важільний п'ятиланковий механізм подвійного паралелограма, який на практиці використовують в приводах коліс потягів, деяких конструкціях грохотів, у вагових механізмах та ін. (рис.4.30, а).

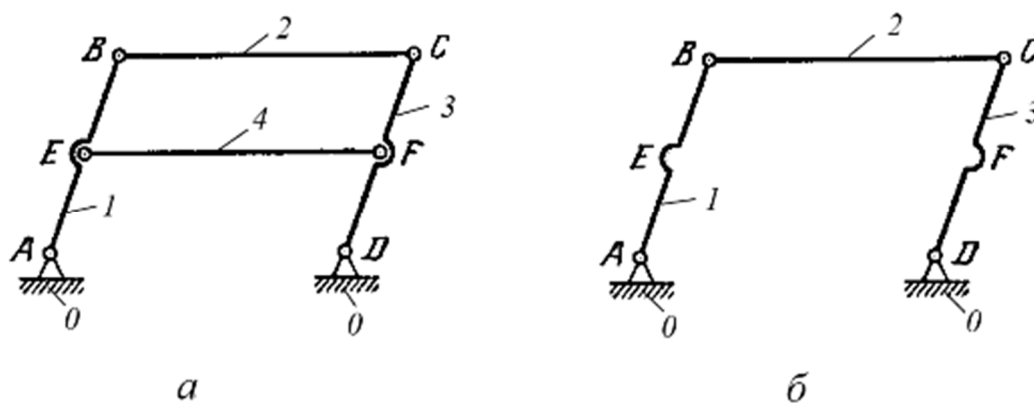


Рис. 4.30

В конструкцію цього механізму введена додаткова ланка – шатун EF при умові, що довжини ланок відповідно будуть $AB = CD$, $AD = EF = BC$, $AE = BE$ і $DF = FC$.

Введення додаткової ланки EF тут продиктовано необхідністю збільшення жорсткості механізму, так як ланки звичайного шарнірного паралелограма при значних робочих навантаженнях можуть недопустимо деформуватися. Крім того, шарнірний паралелограм, переходячи через своє граничне положення, може перетворитися в антипаралелограм.

Отже механізм подвійного паралелограма має зайву ланку EF , яка паралельна шатуну BC . Тоді число рухомих ланок цього механізму разом із зайвою ланкою буде $n = 4$, кінематичних пар V класу – $p_1 = 6$, а кінематичних пар IV класу – $p_2 = 0$.

Розрахункове число ступенів рухомості за формулою Чебишева:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 - 0 = 0,$$

тобто, механізм має нульовий ступінь рухомості і рухатись не може.

Але насправді такий механізм рухатись буде і, як показує практика, у разі приведення в рух кривошипа AB (чи іншої ланки) усі ланки даного кінематичного ланцюга мають цілком визначені рухи. Отже, кінематичні пари E та F і в'язі, накладені ними на ланки, не впливають на рух даного механізму в цілому.

Тому для отримання дійсного числа ступенів рухомості цього механізму виключимо із його структурної схеми ланку EF (рис.4.30, б). Таке виключення можливе, тому що не вплине на закон руху механізму, а ланка EF є зайвою і накладає лише зайві пасивні в'язі.

В результаті отримаємо дійсне число ступенів рухомості даного механізму:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1,$$

де $n = 3$; $p_1 = 4$; $p_2 = 0$.

Далі розглянемо кривошипний механізм із двома повзунами (рис. 4.31).

Другий повзун тут встановлено також для збільшення жорсткості механізму або для інших цілей. Його розраховане число ступенів рухомості теж буде нульовим:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 - 0 = 0,$$

де $n = 4$; $p_1 = 6$; $p_2 = 0$.

Але насправді даний механізм має ступінь рухомості $W = 1$, тому що без усякого порушення характеру руху механізму ланку 4 можна видалити як зайву.

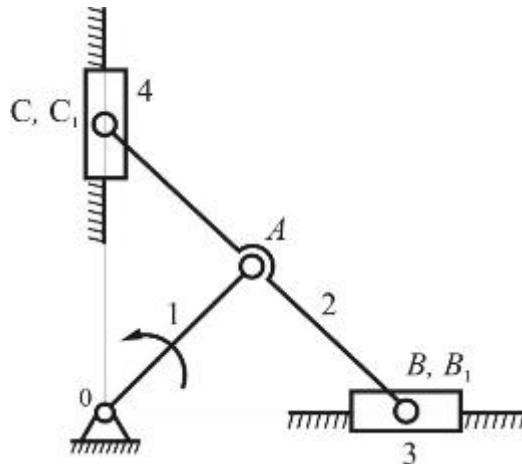


Рис. 4.31

В кулачковому механізмі, показаному на рис. 2.25, *а*, встановлення ролика продиктовано необхідністю зменшити тертя і зношування поверхні кулачка та штовхача.

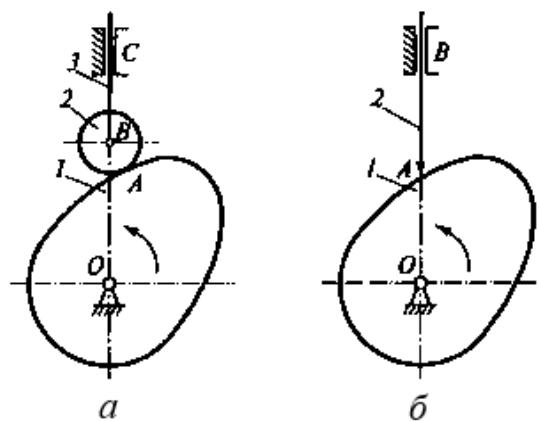


Рис. 4.32

Обертання ролика навколо осі *B* в цьому механізмі також не викликає зміни руху ні самого кулачка 1 ні штовхача 3, але формально дає зайвий ступінь рухомості

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 1 = 2,$$

де $n = 3$; $p_1 = 3$; $p_2 = 1$.

Кінематика кулачкового механізму в цілому не зміниться, якщо ролик вилучити, а профіль кулачка еквівалентно збільшити на радіус ролика (рис. 4.32, *б*).

Тоді ступінь рухомості кулачкового механізму без ролика стане

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1,$$

де $n = 2$; $p_1 = 2$; $p_2 = 1$.

З метою збільшення жорсткості і міцності також встановлюють додаткові шарнірні опори A' , A'' в механізмах колінчастого валу (рис. 4.33, а) а для зубчастих передач додаткові шарнірні опори – A' , B' (рис. 4.33, б).

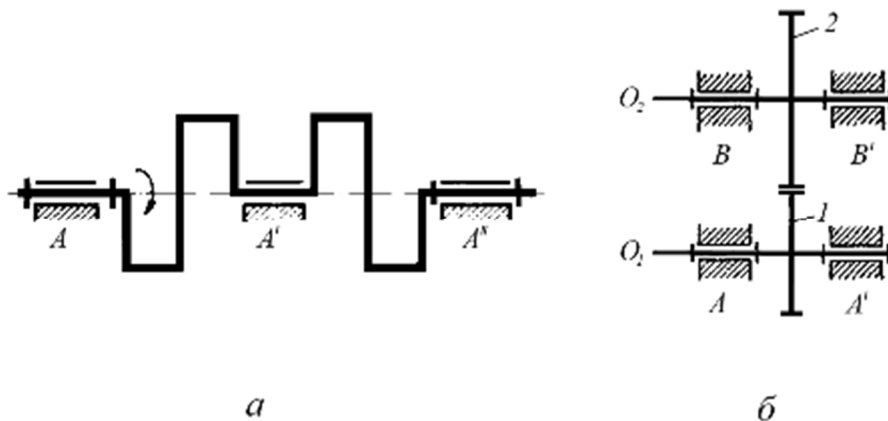


Рис. 4.33

З точки зору кінематики цих механізмів з одним ступенем вільності ($W = 1$) тут достатньо однієї однорухомої обертальної кінематичної пари V класу. Інші опори є *зайвими локальними в'язями* і лише формально змінюють ступінь рухомості даних механізмів, а тому не повинні враховуватись при застосуванні структурних формул при структурному аналізі.

Таким чином, *надлишкові в'язі при структурному аналізі механізму необхідно вилучати*, так як вони дають лише зайві ступені рухомості і ускладнюють його структуру.

Треба зауважити, що на практиці надлишкові в'язі можуть бути не тільки корисними, але й шкідливими. Їх застосування в механізмі може збільшити тертя за рахунок утворення зайвих кінематичних пар та викликати додаткові інерційні сили і вібрації.

16.8. Проектування раціональних механізмів

При проектуванні механізмів і машин конструктору в першу чергу необхідно вибирати найбільш прості та надійні механізми, які б змогли найкращим чином забезпечити виконання задач по перетворенню руху вхідних і вихідних ланок. При цьому працездатність та надійність

механізмів у більшості випадків залежить від того, наскільки вірно вибрана їх структурна схема і проведений структурний аналіз.

При цьому треба враховувати, що структурні формули визначення числа ступенів рухомості механізмів отримані для ідеальних механізмів, тобто таких, в яких ланки виготовлені абсолютно точно і які можна скласти без деформації. Але в реальних механізмах внаслідок неточності їх виготовлення і монтажу, а також від дії робочих навантажень і зносу поверхонь елементів кінематичних пар в процесі експлуатації, з'являються додаткові зайві в'язі q та рухомості, які приводить до того, що механізми стають статично невизначеними системами. Такі механізми вже не можна зібрати без зайвої деформації їх ланок.

Отже *статично невизначеним механізмом* називається механізм, який має зайві в'язі, без яких зібрати його без деформації неможливо.

Для визначення ступенів рухомості механізмів, які мають зайві в'язі q , формула Сомова-Малишева (4.2) набуває вигляду:

$$W = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5 - q, \quad (4.6)$$

або в скороченому вигляді

$$W = 6n - \left[\sum_{i=1}^5 (6-i)p_i - q \right]. \quad (4.6')$$

де n – кількість рухомих ланок в механізмі; p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 – кількість одно-, дво-, ..., п'ятирухомих кінематичних пар V, IV, ..., I класу; q – кількість зайвих в'язей.

У випадку, коли ступінь рухомості W механізму відома з геометричних міркувань і дорівнює числу його узагальнених координат, із останнього виразу можна знайти число зайвих в'язей q :

$$q = W - 6n + \sum_{i=1}^5 (6-i)p_i. \quad (4.7)$$

Для плоского механізму із зайвими в'язями q_{Π} відповідно отримаємо із формули Чебишева:

$$W_{\Pi} = 3n - 2p_1 - q_{\Pi}, \quad (4.8)$$

звідки

$$q_{\Pi} = W_{\Pi} - 3n - 2p_1 - p_2, \quad (4.9)$$

де W_{Π} – кількість ступенів рухомості ідеально плоского механізму.

Якщо $q = 0$ – зайвих в'язей немає, і механізм може бути складений без деформації ланок (останні якби самовстановлюються), то такі механізми називаються *самоустановлюваними або раціональними*. Така

система буде статично визначена.

Якщо ж $q > 0$ – пасивні в'язі існують, і механізми потребують підвищеної точності виготовлення і складання. У випадку недостатньої точності в процесі складання ланки механізму деформуються, що викликає перевантаження кінематичних пар і ланок додатковими зусиллями, підвищене тертя в кінематичних парах. Тому з цього погляду зайві в'язі в механізмах небажані.

Розглянемо приклад визначення і усунення зайвих в'язей для наступного чотириланкового механізму (рис. 4.34, *a*).

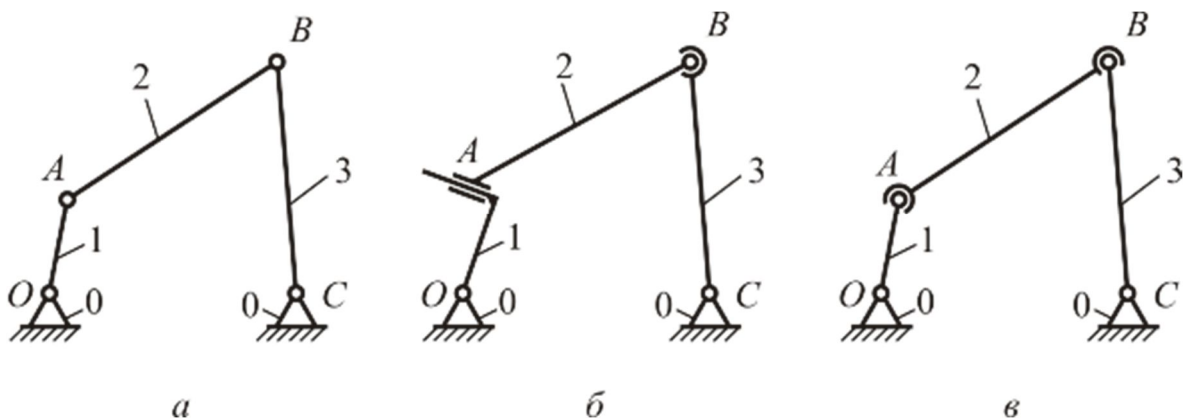


Рис. 4.34

Для цього плоского механізму число рухомих ланок $n = 3$. Число однорухомих кінематичних пар V класу $p_1 = 4$, кінематичні пари інших класів відсутні. Ступінь за формулою Чебишева буде:

$$W_{II} = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

Але ідеально виготовити цей механізм важко, а порушення паралельності осей може відбутися і в процесі його експлуатації внаслідок зношування кінематичних пар і деформації ланок. Тому фактично цей механізм треба розглядати як просторовий, а кількість ступенів рухомості визначати за формулою Сомова-Малишева для просторового механізму:

$$W = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = -2,$$

де $p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 0$ – двох-, трьох-, ... , п'ятирухомі кінематичні пари IV, ... , I класу, які відсутні.

В результаті кількість зайвих в'язей буде дорівнювати

$$q = W_{II} - W = 1 + 2 = 3.$$

Отже для того, щоб даний просторовий механізм став статично

визначеним, необхідно змінити його структурну схему таким чином, щоб зменшити кількість зайвих в'язей на 3.

Це можна зробити декількома способами.

По перше, наприклад, замінити однорухомі обертальні кінематичні пари в точках A і B на одну дворухому циліндричну і одну трирухому сферичну (рис. 4.34, б).

Тоді

$$W = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1,$$

де $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$.

В результаті

$$q = W_{II} - W = 1 - 1 = 0.$$

Тобто отриманий механізм буде вже статично визначеним і раціональним.

Другий варіант зміни структури даного механізму – це замінити однорухомі обертальні кінематичні пари в точках A і B на дві трирухомі сферичні (рис. 4.34, в).

В цьому разі

$$W = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5 = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 2,$$

де $p_1 = 2$, $p_3 = 2$.

У цьому випадку, крім основної рухомості $W = 1$, з'являється додатково ще місцева рухомість $W_M = 1$ – це можливість обертання шатуна 2 навколо своєї осі AB . Але ця рухомість не буде впливати на загальну рухомість даного механізму і може бути навіть корисною з точки зору вирівнювання шарнірів.

Формула Сомова-Малишева підтверджує, що такий механізм також буде статично визначеним:

$$q = 2 - 6 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 0. \quad (4.7)$$

Отже і цей механізм буде раціональним.

Таким чином, для того щоб позбутися зайвих в'язей в механізмі, необхідно знизити клас відповідної кінематичної пари, перейшовши від плоских механізмів до просторових.

Але треба нагадати, що в деяких механізмах для забезпечення їх жорсткості та міцності в процесі роботи зайві в'язі необхідні конструктивно і без них може відбуватися перекося, заклинювання або інші види руйнування і виходу механізмів із ладу.

16.9. Заміна вищих кінематичних пар нижчими

Для того щоб не створювати окрему класифікацію для механізмів із вищими кінематичними парами, необхідно замінити ці пари на нижчі. При цьому заміна структури механізму не повинна вплинути на його кінематичні характеристики і число ступенів рухомості.

Розглянемо методику заміни вищих кінематичних пар нижчими на прикладі триланкового плоского механізму (рис. 4.35) із двома нижчими парами V класу (у точках A, B) та однією вищою кінематичною парою IV класу (у точці C).

Кількість ступенів рухомості цього механізму буде

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1,$$

де $n = 2$; $p_1 = 2$; $p_2 = 1$.

Профілями елементів $1, 2$, що утворюють вищу кінематичну пару IV класу, є дві дуги a і b . Через точку C контакту цих двох дуг проведемо нормаль $N-N$. На нормалі визначимо центри кривизни O_1 і O_2 цих дуг.

Під час руху ланок положення точок O_1 і O_2 буде змінюватись, але не відстань між ними. Тобто $O_1O_2 = const$.

Отримати еквівалентний механізм із нижчими кінематичними парами можна, якщо з'єднати ланками відстані AO_1 , O_1O_2 і O_2B .

Даний замінений механізм AO_1O_2B буде мати теж саме число ступенів рухомості, що і попередній

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1,$$

де $n = 3$; $p_1 = 4$; $p_2 = 0$.

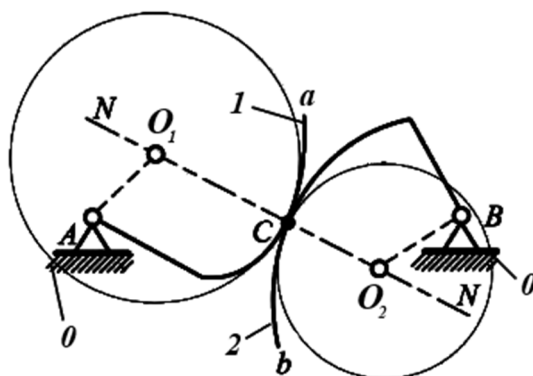


Рис. 4.35

Отже в результаті заміни вищої кінематичної нижчими отриманий механізм AO_1O_2B називається *еквівалентним* або *замінюючим механізмом*.

Із виконаних перетворень видно, що одна вища кінематична пара у плоских механізмах еквівалентна одній умовній ланці і двом кінематичним парам V класу.

На рис. 4.36 показано інші приклади побудови еквівалентних механізмів із заміною вищих кінематичних пар нижчими.

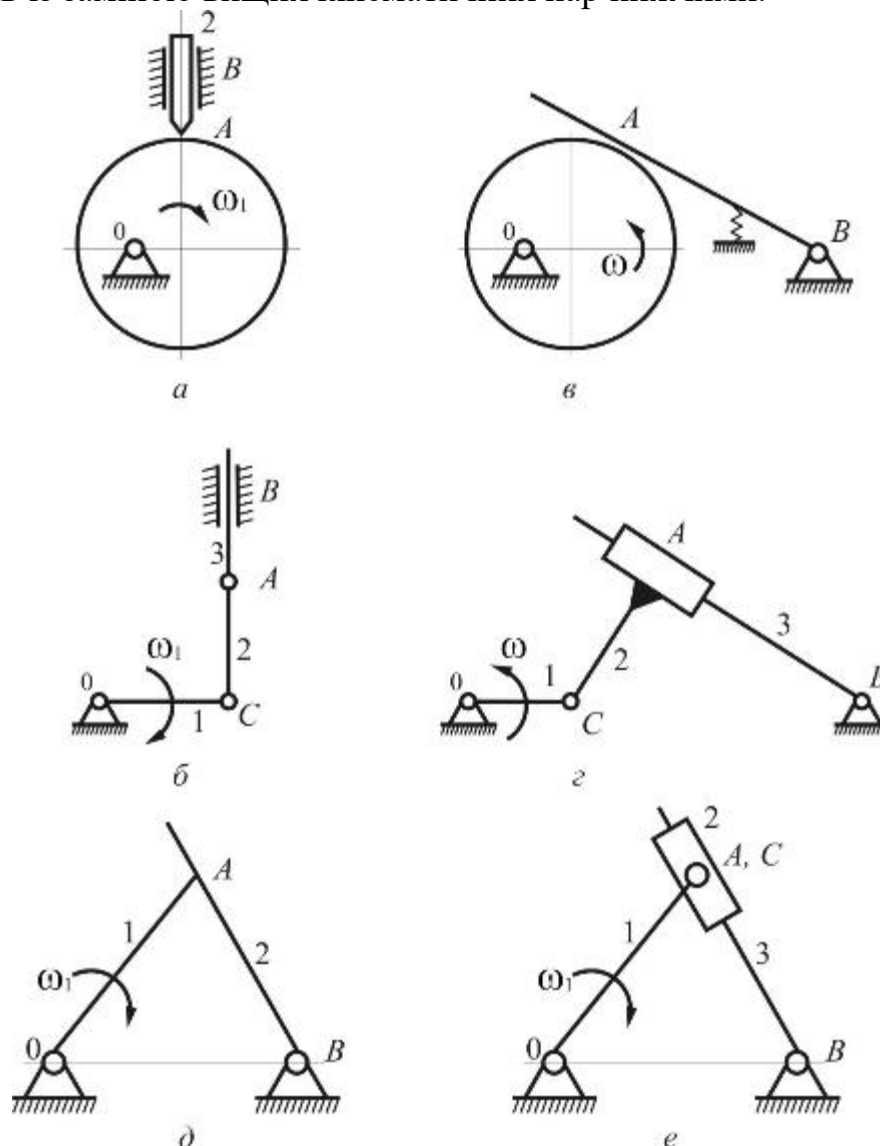


Рис. 4.36

На рис. 4.36, *a, в, д* показані дійсні механізми, а на рис. 4.36, *б, г, е* – відповідні їм еквівалентні механізми.

Після проведення заміни вищих кінематичних пар і отримання структурної схеми нового еквівалентного механізму з нижчими парами, можна проводити класифікацію його структури.

16.10. Структурна класифікація механізмів по Ассурі

Для вирішення завдань структурного синтезу і аналізу складних важільних механізмів професором Петербурзького університету Л. Ассуром у 1914 р. була запропонована оригінальна структурна класифікація. Згідно цієї класифікації механізми, які не мають надлишкових в'язей і місцевих рухомостей, складаються з первинних (початкових) механізмів і так званих структурних груп Ассура.

Спочатку Ассур розробив таку класифікацію для плоских важільних механізмів тільки із обертальними кінематичними парами. В подальшому акад. І. Артоболовський поширив ідеї Л. Асура і на плоскі важільні механізми із поступальними кінематичними парами, а потім також на просторові механізми.

Отже за структурною класифікацією Ассура утворення складних важільних механізмів полягає у послідовному приєднанні до ведучих ланок і стояків кінематичних ланцюгів із нульовим ступенем вільності. Поєднання ведучої ланки і стояка Л. Ассур назвав *початковим механізмом* або *механізмом I класу*. В результаті більш складні механізми можуть бути отримані шляхом приєднання до початкового механізму *структурних груп Ассура*, які були названі в його честь.

Таким чином, *початковим механізмом (механізмом I класу)* буде кінематичний ланцюг із ненульовим ступенем вільності, що складається із двох ланок (одна з яких нерухома).

Для плоских механізмів *початковий механізм* буде складатись із кривошипа 1 (рис. 4.37, а) або повзуна 1 (рис. 4.37, б), стояка 0 і відповідно однорухомої обертальної або поступальної кінематичної пари *O V* класу.

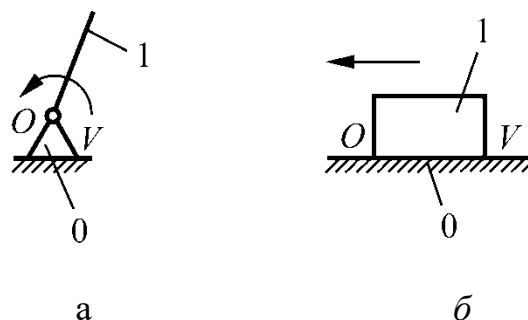


Рис. 4.37

Дійсно, число ступенів вільності таких початкових механізмів буде більше ніж 0:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 0 = 1.$$

В подальшому будемо розглядати тільки початкові механізми із кривошипом. Такі механізми широко поширені на сьогоднішній день в різноманітних галузях техніки. Це механізми приладів роторного типу і таких машин як електродвигуни, відцентрові насоси, генератори, турбіни, вентилятори.

Далі для утворення більш складних плоских механізмів до початкового механізму треба приєднати вільними елементами кінематичних пар структурні групи Ассура.

Надамо визначення цих структурних груп.

Структурною групою Ассура називається плоский кінематичний ланцюг, який:

1. має нульовий ступінь рухомості, якщо його приєднати до стояка вільними елементами кінематичних пар;
2. він не ділиться на більш прості ланцюги з нульовим ступенем рухомості.

Тобто, ступінь рухомості групи Ассура буде дорівнювати:

$$W = 3n - 2p_1 = 0,$$

звідки

$$p_1 = \frac{3}{2}n. \quad (4.10)$$

Оскільки число рухомих ланок n і число однорухомих пар p_1 можуть бути тільки цілими, то умову (4.2) задовольнятимуть така послідовність їх значень:

Таблиця 4.2. Співвідношення значень n і p_1 в групах Ассура

n	2	4	6	8	...
p_1	3	6	9	12	...

Звідси впливають наступні властивості груп Ассура:

1. Кількість ланок в групі Ассура кратне двом.
2. Кількість кінематичних пар п'ятого класу в групі Ассура кратне трьом.
3. До складу групи Ассура входять тільки кінематичні пари п'ятого класу (обертальні і поступальні).

Тепер розглянемо порядок утворення і класифікацію структурних груп Ассура.


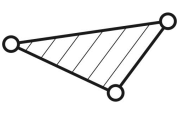
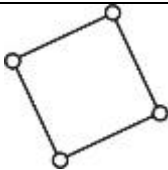
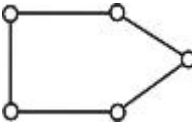
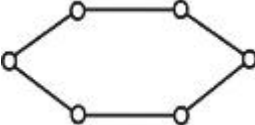
Група Ассура може бути утворена шляхом приєднання до замкненого базисного контуру повідків.

Клас групи Ассура визначається найвищим класом контуру, що входить до її складу.

Номер класу контуру дорівнює кількості кінематичних пар, які утворюють ланки контуру.

Контури різних класів наведені в табл.4.3, де поступальні пари V класу, якщо вони є, умовно замінені на обертальні.

Таблиця 4.3. Класи базисних контурів

II клас	III клас	IV клас	V клас	VI клас
				

Контури II і III класів є жорсткими фігурами. Жорсткі фігури III класу позначаються штриховкою.

Номери класів структурних груп позначаються римськими цифрами: II, III, IV, V, VI,

В свою чергу групи Ассура у межах класу поділяються на відповідні порядки.

Порядок групи Ассура визначається кількістю вільних елементів кінематичних пар, якими група приєднується до основного механізму.

Треба відмітити, що така класифікація структурних груп та механізмів не залежить від розмірів та розташування ланок.

Найпростішими в такій структурній класифікації являються структурні групи Ассура з $n = 2$ і $p_1 = 3$, які є групами II класу і називаються *двоповодковими групами – діадами*. Вони складаються з двох ланок. Поводок на відміну від ланки, має вільний елемент кінематичної пари. При з'єднанні його з іншим вільним елементом іншої ланки утворюється ще одна кінематична пара.

Групи Ассура II класу діляться на п'ять видів, в залежності від кількості обертальних та поступальних пар та їхнього взаємного розташування.

На рис. 4.38 показані усі п'ять видів груп Ассура II класу і їх окремі випадки.

У групі першого виду II класу спільна кінематична пара і вільні елементи інших двох кінематичних пар є обертальними. Інші чотири види груп II класу можна отримати шляхом заміни окремих обертальних пар чи їх вільних елементів на поступальні.

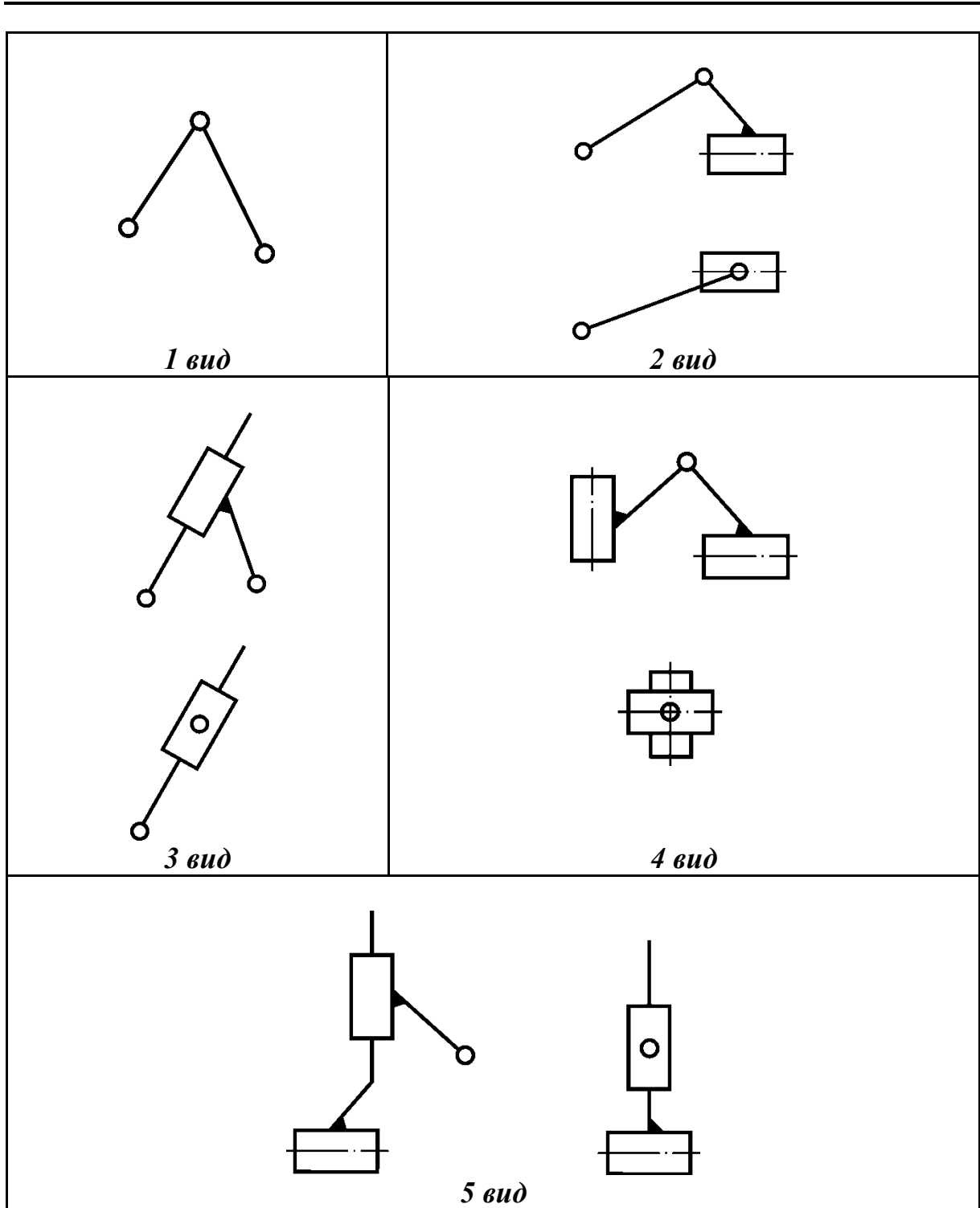


Рис. 4.38

На рис. 4.39 наведені приклади груп Ассур III класу третього порядку (рис. 4.39, а); IV класу другого порядку (рис. 4.39, б); V класу третього порядку (рис. 4.39, в) і VI класу, третього порядку (рис. 4.39, з).

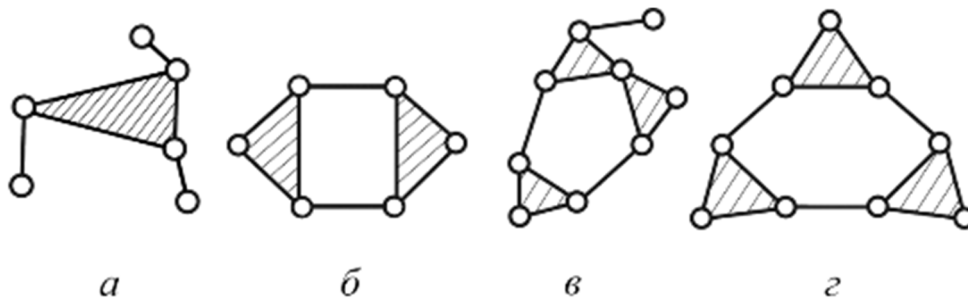


Рис. 4.39

Легко перевірити, що число ступенів рухомості кожної з наведених груп $W = 0$.

Особливістю структурної групи Ассура є те, що вона статично визначена. Тобто, використовуючи структурні групи, можна провести структурний, кінематичний і силовий аналіз механізмів. Дійсно, якщо групу Ассура вільними елементами приєднати до стояка то отримаємо ферму.

Склад і послідовність приєднання груп Ассура при аналізі структури механізму виражається *формулою будови механізму*. При цьому *клас механізму* визначається найвищим класом структурних груп Ассура, що входять до його складу.

Розглянемо принцип утворення плоских механізмів на наступному прикладі (рис. 4.40).

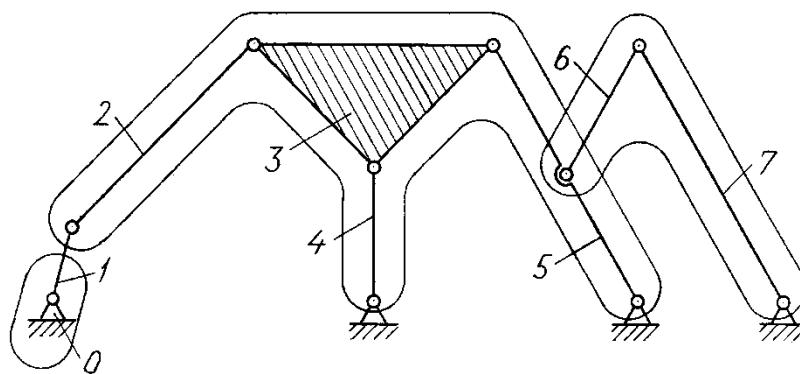


Рис. 4.40

Тут до початкового механізму або механізму I класу (ланки 0, 1) спочатку приєднується вільним елементом кінематичної пари група Ассура III класу третього порядку (група ланок 2, 3, 4, 5), а далі до цієї групи Ассура послідовно приєднується ще одна група Ассура II класу 1-го

виду (група ланок 6, 7).

Тоді склад і послідовність приєднання груп Ассура, тобто формула будови механізму запишеться як

$$\text{I кл. } (0,1) \leftarrow \text{III кл. } 3 \text{ пор. } (2,3,4,5) \leftarrow \text{II кл. } 1 \text{ в. } (6,7).$$

Номер класу цього механізму буде дорівнювати найбільшому номеру класу групи, яка входить до його складу, тобто розглянутий тут механізм буде механізмом III класу.

Аналізуючи структуру механізмів, необхідно визначити кількість його ланок, число та клас кінематичних пар, ступінь рухомості, а також встановити клас і порядок структурних груп, що входять до його складу.

16.11. Структурний аналіз плоских важільних механізмів

У загальному випадку структурний аналіз плоских важільних механізмів зводиться до вирішення двох наступних завдань:

1. визначення рухомості механізму;
2. аналіз складу структури механізму.

Перше завдання вирішується за допомогою формул рухомості для плоских важільних механізмів. Друге – завдяки структурній класифікації механізму за Ассуром і знаходженню згідно цієї класифікації формули будови механізму.

Основою для структурного аналізу є структурна схема механізму, яка не містить пасивні в'язі та зайві ступені рухомості. Крім цього, число ступенів рухомості механізму має відповідати кількості його ведучих ланок, а останні повинні входити у кінематичні пари із стояком.

При дослідженні структури механізму рекомендується:

1. від'єднання структурних груп починати з ланок, які найбільше віддалені від ведучих;
2. намагатись від'єднати в першу чергу найпростіші структурні групи – діади;
3. слідкувати, щоб число ступенів рухомості кінематичного ланцюга механізму до та після від'єднання кожної структурної групи лишалось незмінним;
4. пам'ятати, що кожна кінематична пара і кожна ланка можуть входити тільки в одну структурну групу чи в один початковий механізм.

Якщо в плоскому механізмі є вищі кінематичні пари, то аналіз його структури виконується за схемою еквівалентного заміненого механізму, в якому вищі кінематичні пари замінені на нижчі.

Загальний порядок проведення структурного аналізу механізмів

наступний:

1. Видаляють з кінематичної схеми механізму пасивні в кінематичному відношенні ланки, а також ланки, що створюють зайві ступені вільності. Вищі кінематичні пари IV класу замінюють парами V класу.

2. Визначають кількість ступенів рухомості механізму і будують структурну схему механізму:

- на схемі зображують рухомі і нерухомі ланки у вигляді простих геометричних фігур;

- ланку, що утворює з іншими ланками дві кінематичні обертальні або поступальні пари, позначають прямолінійним відрізком;

- ланку, яка утворює з іншими ланками три кінематичні пари позначають трикутником, чотири пари – чотирикутником і т.д.;

- усі фігури, що позначають жорсткі контури, заштриховують;

- побудову структурної схеми починають з креслення стояка;

- потім послідовно добавляють ланки, які утворюють кінематичні пари із стояком;

- позначають усі кінематичні пари механізму та рухомі і нерухомі ланки.

3. Виділяють початковий механізм (або механізми). Кількість початкових механізмів має дорівнювати числу ступенів вільності усього механізму.

4. Інші рухомі ланки механізму і з'єднуючі їх кінематичні пари умовно розкладають на структурні групи Ассура. При цьому відокремлення структурних груп розпочинають з ланок і пар, які найбільше віддалені від початкової ланки. Спочатку намагаються від'єднати групи II класу. Від'єднуючи структурні групи, слідкують, щоб кількість ступенів рухомості частини механізму, що залишилась, не змінилась. Якщо від'єднати групи II класу не вдається, необхідно перейти до спроб відокремлення груп III, а потім IV класу.

5. Визначають клас і порядок виділених структурних груп Ассура.

6. За класом старшої групи Ассура визначають клас механізму в цілому.

7. Записують формулу будови механізму.

Розглянемо приклади структурного аналізу плоских важільних механізмів.

Приклад (рис. 4.41, а). Виконати структурний аналіз кривошипно-коромислового механізму, який входить до складу сіноворушилок, порційних автоматів і т.ін.

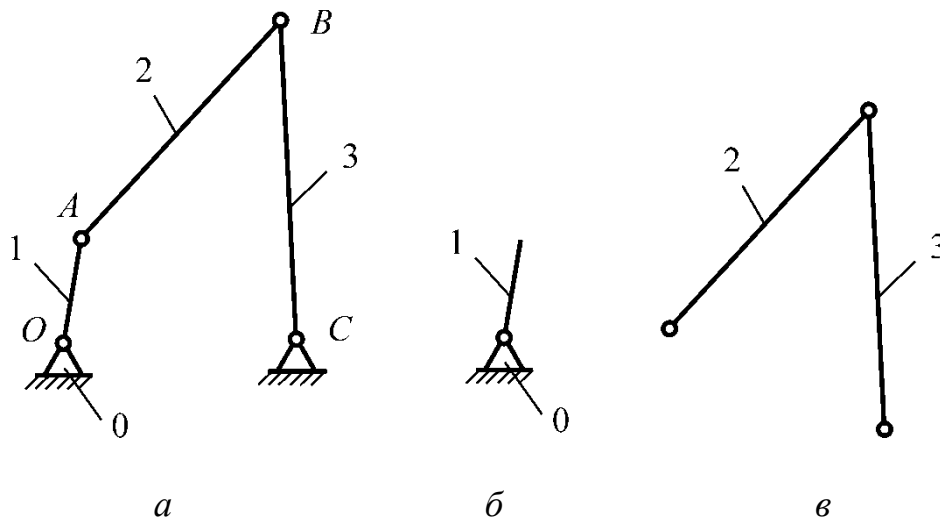


Рис. 4.41

Розв'язання.

Спочатку нумеруємо нерухомі і рухомі ланки механізму. Стояк завжди нумерується цифрою 0, кривошип – 1. Далі нумерація проводиться в напрямі від механізму I класу до стояка. Отже механізм складається зі стояка 0, кривошипа 1, шатуна 2, коромисла 3.

Позначаємо кінематичні пари. Пара між стояком і кривошипом позначається великою латинською літерою *O*. Наступні пари позначаються по порядку в напрямі від механізму I класу до стояка великими літерами латинського алфавіту: *A, B, C, D, E, F, G, H, ...*

Механізм складається із трьох рухомих ланок ($n = 3$) і чотирьох кінематичних пар V класу ($p_1 = 4$).

Число ступенів вільності за формулою Чебишева буде дорівнювати:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

Виділяємо механізм I класу (рис. 4.41, б) та одну групу Ассура (рис. 4.41, в).

Отже даний механізм утворений послідовним приєднанням до механізму I класу (ланки 0, 1), структурної групи Ассура II класу 1-го виду (ланки 2, 3).

Формула будови даного механізму буде:

$$\text{I кл. } (0,1) \leftarrow \text{II кл. 1 в. } (2,3),$$

де цифрою I позначено механізм I класу, цифрою II клас групи Ассура. В дужках позначені номери ланок з яких утворились групи Ассура.

У цілому за визначенням даний механізм відноситься до II класу.

Приклад (рис. 4.42, а). Виконати структурний аналіз кривошипно-повзунного механізму, який використовується в поршневих двигунах, компресорах та насосах.

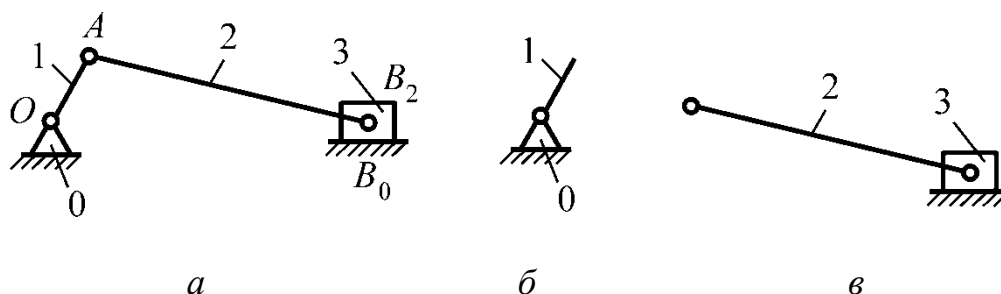


Рис. 4.42

Розв'язання.

Нумеруємо нерухомі і рухомі ланки даного механізму: стояк – 0, кривошип – 1, шатун – 2, повзун – 3.

У такому ж напрямі позначаємо кінематичні пари O, A . Ланка 3 утворює дві пари. Одну – з ланкою 2. Вона позначається B_2 . Другу – з ланкою 0. Позначається B_0 . За таким же принципом позначаються кінематичні пари інших механізмів.

Механізм складається із трьох рухомих ланок ($n = 3$) і чотирьох кінематичних пар V класу ($p_1 = 4$).

Число ступенів вільності за формулою Чебишева буде дорівнювати:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

Виділяємо механізм I класу (рис. 4.42, б) та групу Ассура (рис. 4.42, в). Даний механізм утворений послідовним приєднанням до механізму I класу (ланки 0, 1), структурної групи Ассура II класу 2-го виду (ланки 2, 3).

Формула будови механізму

$$\text{I кл. } (0,1) \leftarrow \text{II кл. 2 в. } (2,3).$$

Отже маємо механізм II класу.

Приклад (рис. 4.43, а). Виконати структурний аналіз кулісного механізму, який використовується, наприклад, в стругальному верстаті.

Розв'язання.

Так само нумеруємо ланки і позначаємо кінематичні пари. Механізм складається із стояка 0, кривошипа 1, кулісного каменя 2, куліси 3.

Ланка 2 утворює дві пари. Одну – з ланкою 1. Вона позначається A_1 . Другу – з ланкою 3. Позначимо її A_3 .

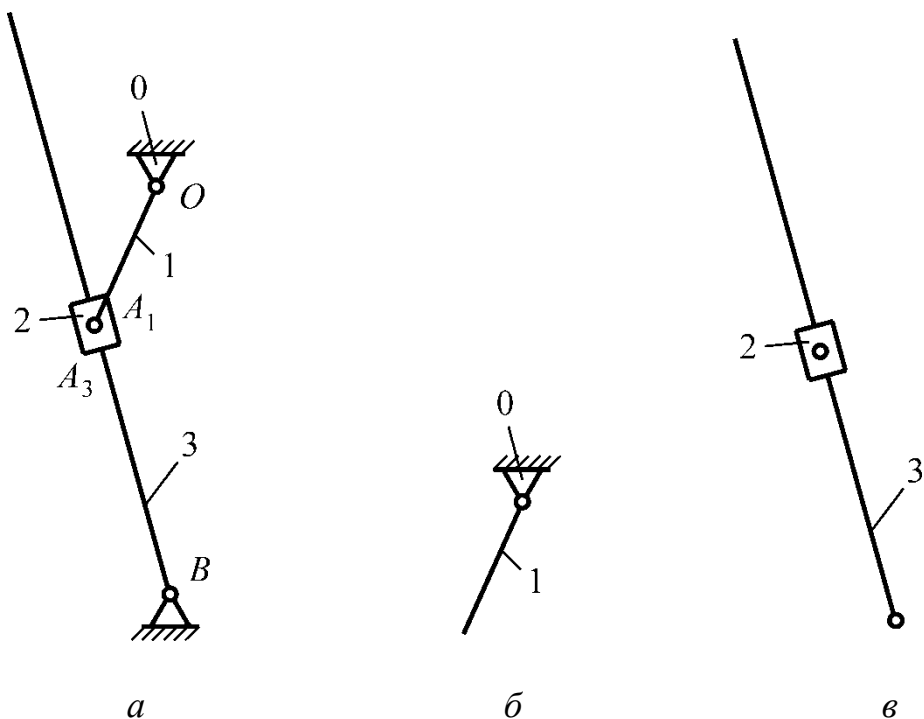


Рис. 4.43

Механізм складається із трьох рухомих ланок ($n = 3$) і чотирьох кінематичних пар V класу ($p_1 = 4$).

Число ступенів вільності за формулою Чебишева дорівнює:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

Виділяємо механізм I класу (рис. 2.36, б) та групу Ассура (рис. 2.36, в). Даний механізм утворений послідовним приєднанням до механізму I класу (ланки 0, 1), структурної групи Ассура II класу 3-го виду (ланки 2, 3).

Формула будови механізму

$$\text{I кл. } (0,1) \leftarrow \text{II кл. 3 в. } (2,3).$$

Отже за визначенням маємо механізм II класу.

Приклад (рис. 4.44, а). Виконати структурний аналіз кулісного механізму із хитним кулісним каменем.

Розв'язання.

Нумеруємо ланки та позначаємо кінематичні пари. Механізм також складається із стояка 0, кривошипа 1, куліси 2 і кулісного каменя 3.

Ланка 2 утворює дві пари. Одну – з ланкою 0. Вона позначається B_0 . Другу – з ланкою 3. Позначимо її B_2 .

Механізм складається із трьох рухомих ланок ($n = 3$) і чотирьох

кінематичних пар V класу ($p_1 = 4$).

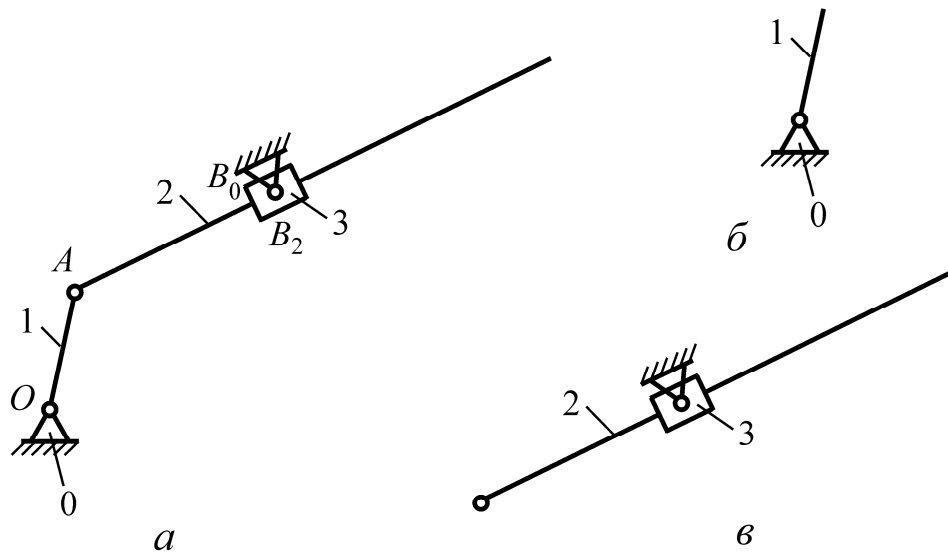


Рис. 4.44

Число ступенів вільності за формулою Чебишева буде:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

Виділяємо механізм I класу (рис. 4.44, б) та групу Ассура (рис. 4.44, в). Даний механізм утворений послідовним приєднанням до механізму I класу (ланки 0, 1), як і в попередньому випадку, структурної групи Ассура II класу 3-го виду (ланки 2, 3).

Формула будови механізму

$$\text{I кл. (0,1)} \leftarrow \text{II кл. 3 в. (2,3)}.$$

За визначенням маємо механізм II класу.

Приклад (рис. 4.45, а). Виконати структурний аналіз синусного механізму.

Розв'язання.

Нумеруємо ланки та позначаємо кінематичні пари. Механізм складається із стояка 0, кривошипа 1 та повзунів 2 і 3.

В цьому механізмі як повзун 2, так і повзун 3 мають повідки, які є однією ланкою (ланкою 1 і ланкою 2).

Ланка 1 утворює дві обертальні пари – з ланкою 0 і з повідком ланки 2. Позначимо їх відповідно як O і A . Ланки 2 і 3 утворюють також дві, але поступальні пари. Одну – з повідком ланки 3 (позначимо її як B). Другу – з ланкою 0 (позначимо її як C).

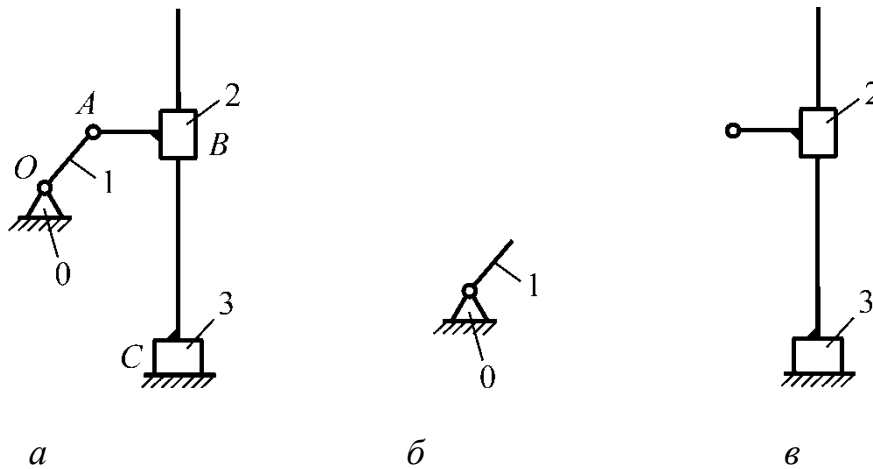


Рис. 4.45

Отже механізм складається із трьох рухомих ланок ($n = 3$) і чотирьох кінематичних пар V класу ($p_1 = 4$).

Число ступенів рухомості

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

Виділяємо механізм I класу (рис. 4.45, б) та групу Ассура (рис. 4.45, в). Даний механізм утворений послідовним приєднанням до механізму I класу (ланки 0, 1), структурної групи Ассура II класу 5-го виду (ланки 2, 3).

Формула будови механізму

$$\text{I кл. (0,1)} \leftarrow \text{II кл. 5 в. (2,3)}.$$

Таким чином маємо механізм II класу.

Приклад (рис. 4.46, а). Виконати структурний аналіз тангенсного механізму.

Розв'язання.

Нумеруємо ланки та позначаємо кінематичні пари. Цей механізм, як і попередній, складається із стояка 0, кривошипа 1 та повзунів 2 і 3.

Позначаємо, як і в попередніх випадках, кінематичні пари: дві обертальні O і A_3 і дві поступальні A_1 і B .

Механізм складається із трьох рухомих ланок ($n = 3$) і чотирьох кінематичних пар V класу ($p_1 = 4$).

Число ступенів рухомості буде

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 - 0 = 1.$$

Виділяємо механізм I класу (рис. 4.46, б) і групу Ассура (рис. 4.46, в).

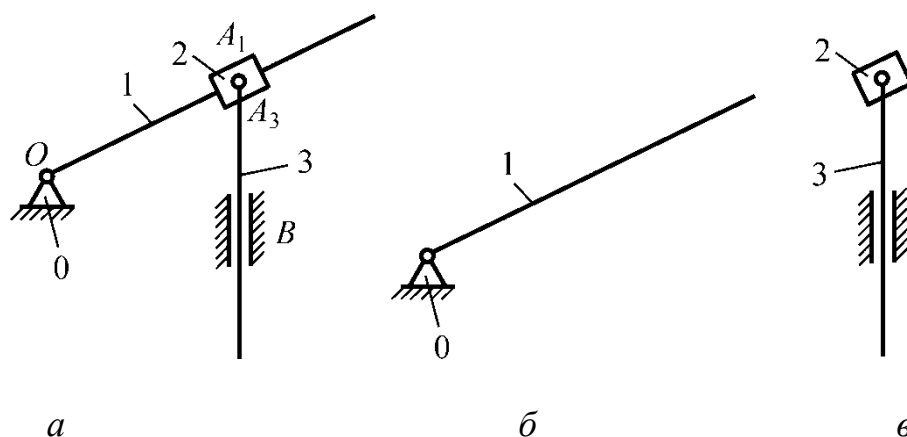


Рис. 4.46

Даний механізм утворений послідовним приєднанням до механізму I класу (ланки 0, 1), структурної групи Ассура II класу 4-го виду (ланки 2, 3).

Формула будови механізму

$$I \text{ кл. } (0,1) \leftarrow II \text{ кл. } 4 \text{ в. } (2,3).$$

Таким чином маємо механізм II класу.

Приклад (рис. 4.47, а). Виконати структурний аналіз важільного механізму преса.

Розв'язання.

Нумеруємо ланки та позначаємо кінематичні пари в найкоротшому напрямі від механізму I класу до стояка.

Цей механізм складається із стояка 0, кривошипа 1, шатуна 2, коромисла 3, шатуна 4 та повзуна 5.

Позначаємо, як і в попередніх випадках, кінематичні пари механізму. Ланка 2 утворює пари з ланками 3 та 4, які позначаються відповідно B_3 та B_4 . Ланка 5 утворює пари з ланками 4 та 0. Вони позначаються відповідно як D_4 та D_0 .

Механізм складається із п'ятьох рухомих ланок ($n = 5$) і сімох кінематичних пар V класу ($p_1 = 7$).

Число ступенів рухомості даного механізму буде

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1.$$

Виділяємо механізм I класу (рис. 4.47, б), потім першу приєднану групу Ассура II класу 1-го виду (рис. 4.47, в) – (ланки 2, 3), а потім другу приєднану групу Ассура II класу 2-го виду (рис. 4.47, г) – (ланки 4, 5).

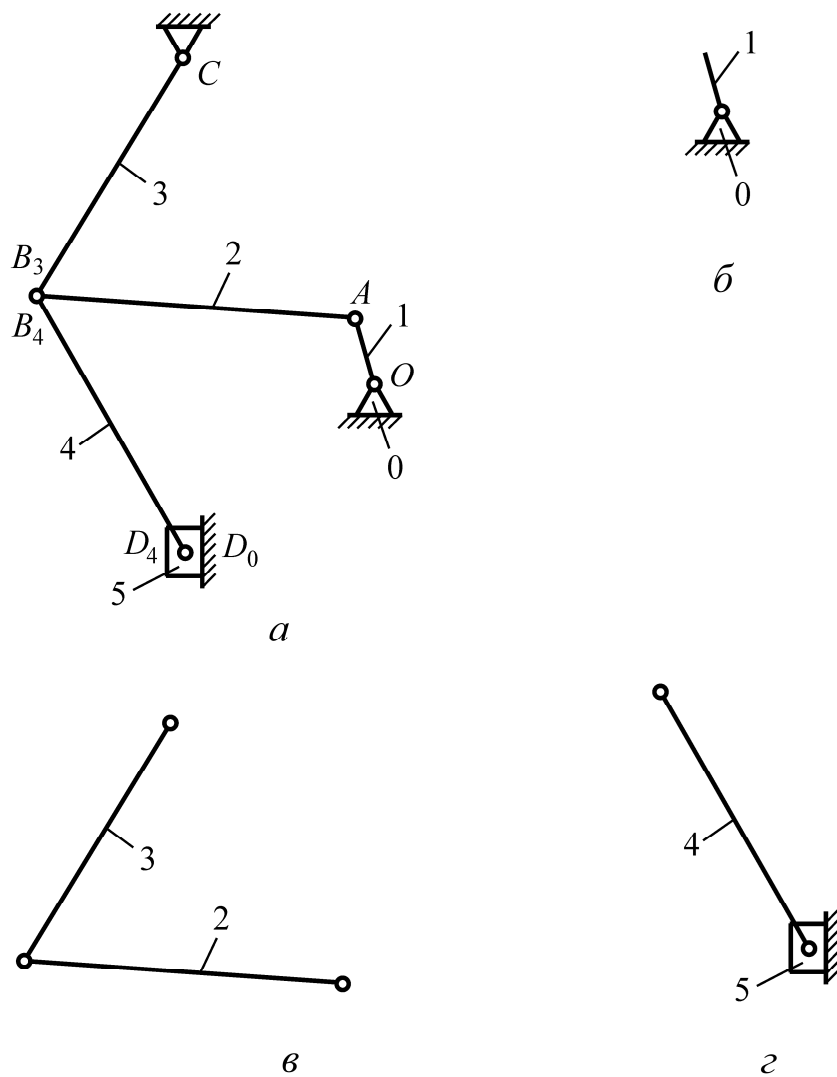


Рис. 4.47

Далі запишемо формулу будови цього механізму:

$$I \text{ кл. } (0,1) \leftarrow II \text{ кл. } 1 \text{ в. } (2,3) \leftarrow II \text{ кл. } 2 \text{ в. } (4,5).$$

За визначенням цей механізм II класу.

Приклад (рис. 4.48, а). Виконати структурний аналіз важільного механізму інерційного конвеєра, що використовується при транспортуванні сипучих вантажів.

Розв'язання.

Нумеруємо ланки та позначаємо кінематичні пари в найкоротшому напрямі від механізму I класу до стояка.

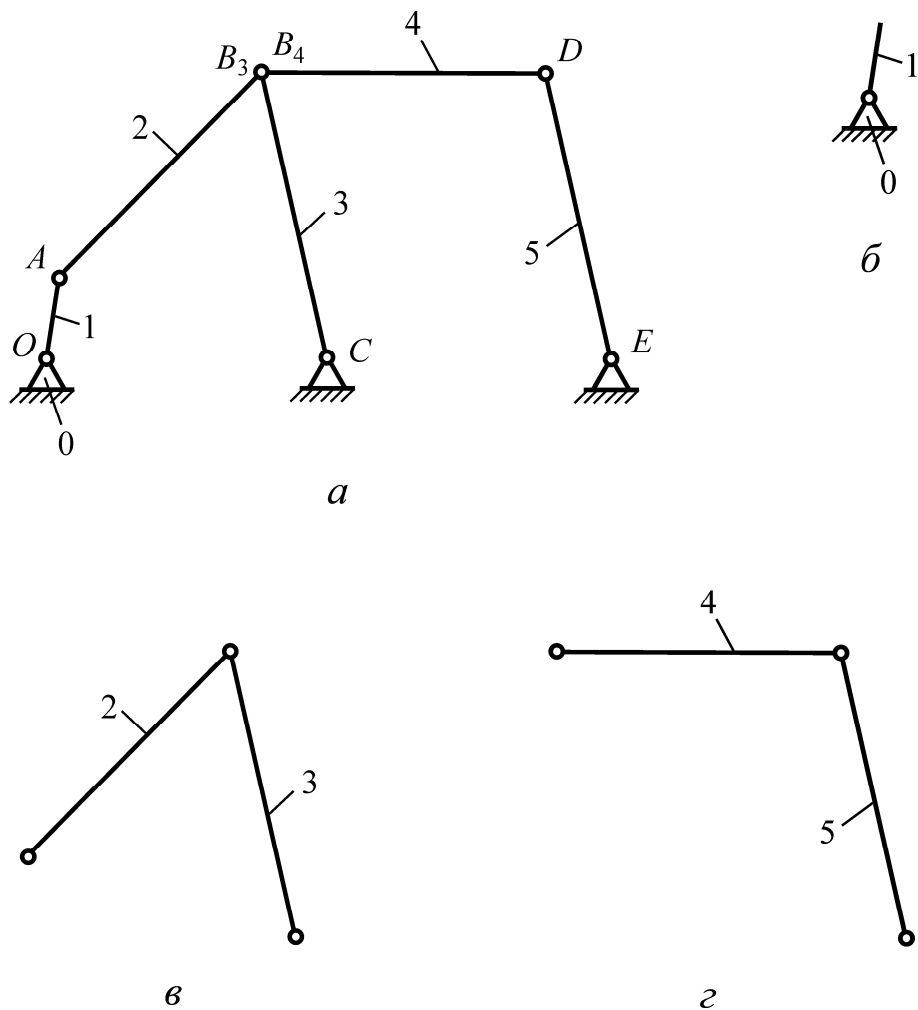


Рис. 4.48

Механізм складається зі стояка 0, кривошипа 1, шатунів 2, 4 та коромисел 3 і 5.

Позначаємо кінематичні пари. Ланка 2 утворює пари з ланками 3 та 4. Вони позначаються відповідно B_3 та B_4 .

Механізм складається із п'ятьох рухомих ланок ($n = 4$) і сімох кінематичних пар V класу ($p_1 = 7$).

Число ступенів рухомості цього механізму буде

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1.$$

Виділяємо механізм I класу (рис. 4.48, б), потім виділяємо першу приєднану групу Ассурі II класу 1-го виду (рис. 4.48, в) – (ланки 2, 3), а потім другу приєднану групу Ассурі II класу 1-го виду (рис. 4.48, г) – (ланки 4, 5).

Формула будови даного механізму

I кл. (0,1) ← II кл. 1 в. (2,3) ← II кл. 1 в. (4,5).

Отже маємо механізм II класу.

Приклад (рис. 4.49, а). Виконати структурний аналіз механізму стругального верстата, який може використовуватись для обробки деталей.

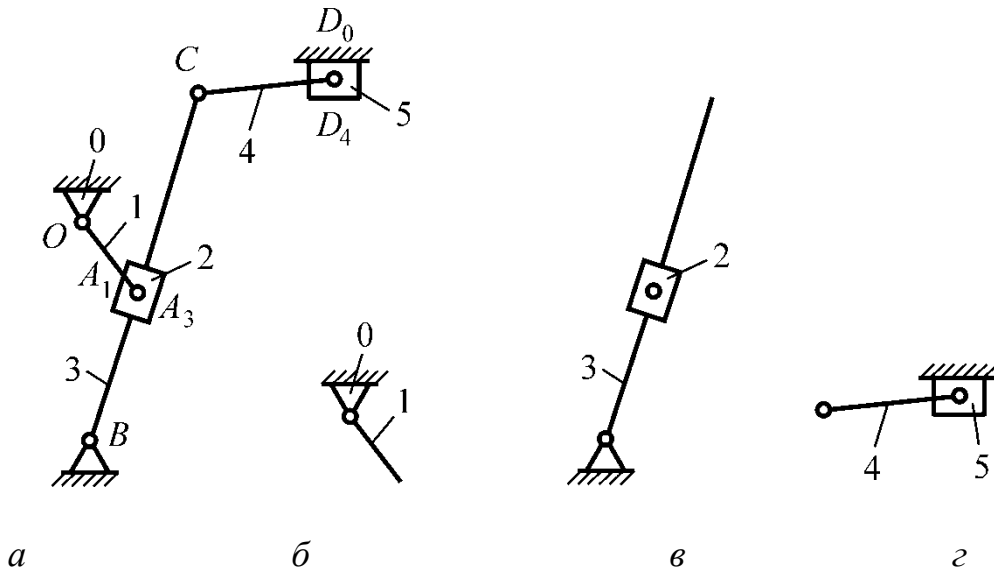


Рис. 2.49

Розв'язання.

Нумеруємо ланки та позначаємо кінематичні пари в найкоротшому напрямі від механізму I класу до стояка.

Механізм складається із стояка 0, кривошипа 1, кулісного каменя 2, куліси 3, шатуна 4, повзуна 5.

Позначаємо кінематичні пари. Ланка 2 утворює пари з ланками 1 і 3. Вони позначаються відповідно A_1 та A_3 . Ланка 5 утворює пари з ланками 4 і 0, які позначаються D_4 та D_0 .

Механізм складається із п'ятьох рухомих ланок ($n = 4$) і сімох кінематичних пар V класу ($p_1 = 7$).

Число ступенів рухомості

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1.$$

Виділяємо механізм I класу (рис. 4.49, б), потім виділяємо першу приєднану групу Ассура II класу 3-го виду (рис. 4.49, в) – (ланки 2, 3), а потім другу приєднану групу Ассура II класу 2-го виду (рис. 4.49, з) – (ланки 4, 5).

Формула будови даного механізму

I кл. (0,1) ← II кл. 3 в. (2,3) ← II кл. 2 в. (4,5).

За визначенням цей механізм II класу.

Приклад (рис. 4.50, а). Виконати структурний аналіз плоского важільного механізму.

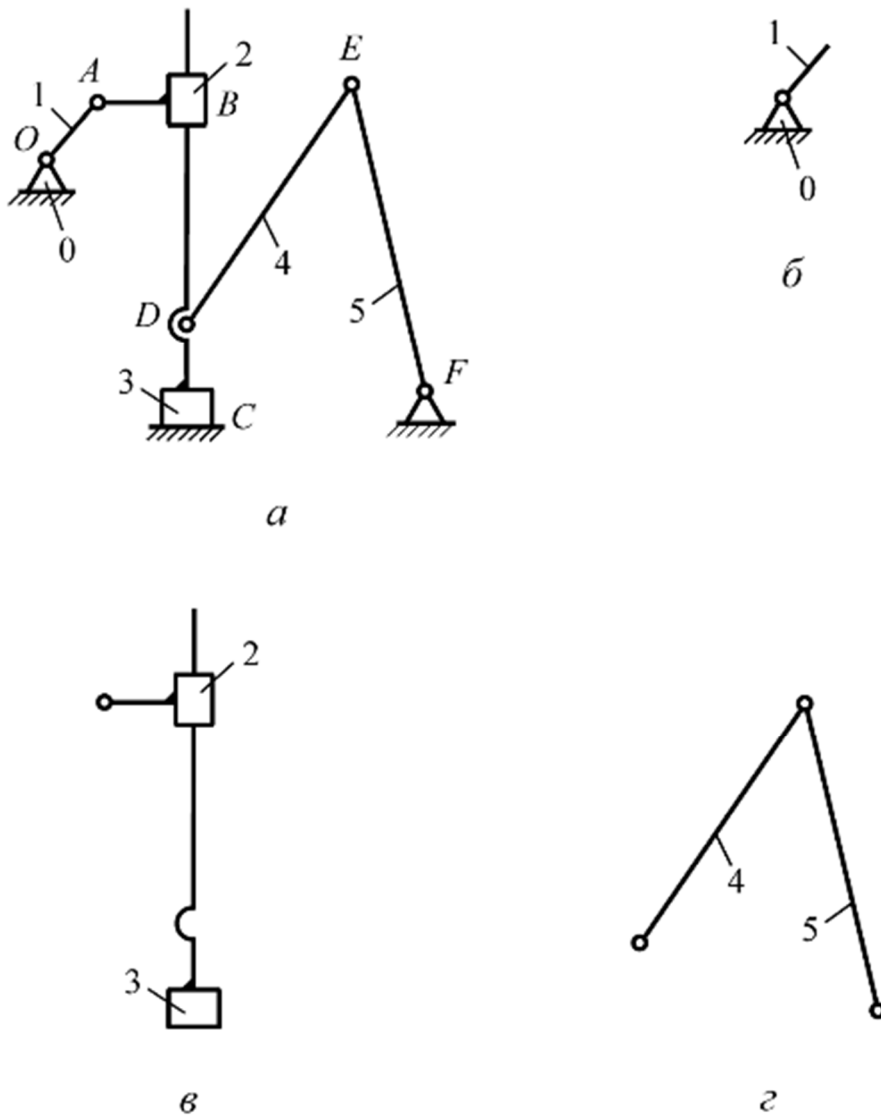


Рис. 4.50

Розв'язання.

Нумеруємо ланки та позначаємо кінематичні пари в найкоротшому напрямі від механізму I класу до стояка.

Даний механізм складається зі стояка 0, кривошипа 1, повзунів 2 і 3,

шатуна 4 та коромисла 5.

Тут повзун 3 має поводок, по якому рухається інший повзун 2, який також має поводок.

Позначаємо кінематичні пари. Ланки 2 і 3 утворюють дві, поступальні пари. Одна – з повідком ланки 3 (пара B), друга – з ланкою 0 (пара C).

Механізм складається із п'ятьох рухомих ланок ($n=4$) і сімох кінематичних пар V класу ($p_1=7$).

Число ступенів рухомості механізму

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 - 0 = 1.$$

Виділяємо механізм I класу (рис. 4.50, б), потім виділяємо першу приєднану групу Ассура II класу 5-го виду (рис. 4.50, в) – (ланки 2, 3), а потім другу приєднану групу Ассура II класу 1-го виду (рис. 4.50, з) – (ланки 4, 5).

Формула будови механізму

$$\text{I кл. (0,1)} \leftarrow \text{II кл. 5 в. (2,3)} \leftarrow \text{II кл. 1 в. (4,5)}.$$

Отже маємо механізм II класу.

Приклад (рис. 4.51, а). Виконати структурний аналіз механізму коливального конвеєра.

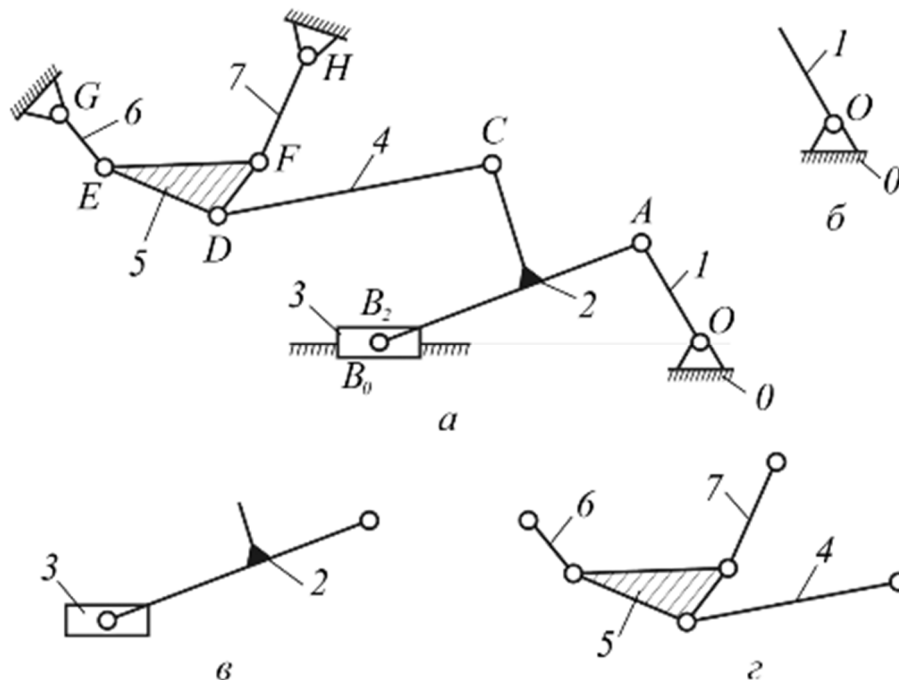


Рис. 4.51

Розв'язання.

Нумеруємо ланки та позначаємо кінематичні пари в найкоротшому напрямі від механізму I класу до стояка.

Даний механізм складається із семи рухомих ланок ($n = 7$) та десяти кінематичних пар V класу ($p_1 = 10$).

Шатун 3 має поводок, який із ланкою 4 утворює обертальну пару C. Ланка 3 утворює пари з ланками 2 і 0, які позначаються B_2 та B_0 . Ланка 5 є жорсткою фігурою з контуром III класу.

Число ступенів рухомості механізму

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 - 0 = 1.$$

Виділяємо механізм I класу (рис. 2.44, б), потім виділяємо першу приєднану групу Ассура II класу 2-го виду (рис. 4.51, в) – (ланки 2, 3), а потім другу приєднану групу Ассура III класу 3-го порядку (рис. 4.51, г) – (ланки 5, 6, 7).

Формула будови такого механізму буде:

I кл. (0,1) ← II кл. 2 в. (2,3) ← III кл. 3 пор. (4, 5, 6, 7).

Цей механізм відноситься до механізму III класу.

Запитання та завдання для самоконтролю

1. Що називають елементом кінематичної пари?
2. Дайте визначення структурної схеми механізму.
3. В чому полягають задачі структурного аналізу і структурного синтезу?
4. Наведіть класифікацію кінематичних пар механізмів
5. Як класифікують кінематичні ланцюги?
6. Чим кінематичне з'єднання відрізняється від кінематичної пари?
7. Наведіть приклади структурних схем механізмів з нижчими і вищими кінематичними парами.
8. Вкажіть фізичний зміст числа ступені рухомості механізмів.
9. Як визначити ступінь рухомості просторових механізмів?
10. Як визначити ступінь рухомості плоских механізмів?
11. У якому випадку механізм буде мати зайві ступені рухомості?
12. Які механізми вважаються раціональними?
13. Яким чином можна отримати еквівалентний або замінюючий механізм?
14. Які механізми називаються початковими?
15. Дайте визначення групи Ассура.
16. Що визначає клас і порядок структурної групи Ассура?
17. Що визначає формула будови механізму?
18. Як визначити клас механізму?

КІНЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ

Загальна задача кінематичного аналізу механізмів зводиться до визначення кінематичних характеристик їх руху, коли структура механізмів і геометричні розміри вже відомі.

Кінематичними характеристиками механізму являються його функції положення по часу та її похідні.

Як відомо, першою похідною цієї функції є швидкість (лінійна v або кутова ω), другою похідною є прискорення (лінійне a або кутове ε).

Отже основними задачами кінематичного дослідження (кінематичного аналізу) механізмів є визначення положень, переміщень, траєкторій, швидкостей та прискорень точок і ланок механізмів.

При кінематичному дослідженні механізмів рух ланок аналізується тільки з геометричної точки зору без урахування сил, які діють на них.

Кінематичне дослідження проводиться, як правило, за заданим законом руху початкової (вхідної) ланки та кінематичною схемою механізму. Закон руху початкової ланки, якщо вона виконує обертальний рух, в загальному випадку задають у вигляді рівняння $\varphi = \varphi(t)$, яке виражає залежність кута її повороту (узагальненої координати) від часу.

При поступальному русі початкової ланки цей закон може бути заданий у вигляді рівняння $s = s(t)$, яке виражає залежність лінійного переміщення вхідної ланки від часу.

Функції переміщення $\varphi = \varphi(t)$, $s = s(t)$ можуть бути також задані графічно. У деяких інженерних задачах закон руху може бути заданий у вигляді функцій кутової чи лінійної швидкості $\omega = \omega(t)$, $v = v(t)$ або функцій прискорення $\varepsilon = \varepsilon(t)$.

Послідовність проведення кінематичного аналізу механізму визначається його структурною формулою і проводиться, починаючи з механізму I класу в порядку приєднання груп Ассура. Тобто, спочатку розглядається перша приєднана структурна група, тоді друга і т.д. до останньої.

У цілому існують наступні методи кінематичного аналізу механізмів: графічний, графоаналітичний, аналітичний та експериментальний.

Графічний метод базується на законах нарисної, проектної та диференціальної геометрії. Він дає прості і наочні рішення при дослідженні ланок, що здійснюють поступальний або обертальний (коливальний) рух.

Якщо ж ланки механізму здійснюють складний рух, то графічний метод стає неефективним.

Графоаналітичний метод (або метод планів) є досить наглядним і простим. Він дає можливість за допомогою досить нескладних графічних побудов і без використання графічного диференціювання визначити величини швидкостей та прискорень точок і ланок механізму.

Аналітичний метод використовується тоді, коли необхідно отримати загальний розв'язок задачі. Це досить трудомісткий метод, який передбачає використання складного математичного апарату і вміння оперувати досить громіздкими математичними виразами. Аналітичний метод набуває широкого поширення в наш час, коли з'явилися ЕОМ, які дають можливість здійснювати багато варіантів дослідження механізмів і тим самим вибрати такі схеми механізмів і розміри їх ланок, що забезпечують найкращі умови роботи, тобто є можливість здійснити оптимальний синтез механізмів.

Експериментальний метод кінематичного аналізу потребує наявності реального готового механізму або його моделі та спеціального вимірювального обладнання. Він використовується для визначення реальних кінематичних параметрів, які отримані експериментально при лабораторних та польових дослідженнях механізмів і машин, для перевірки їх відповідності експлуатаційним вимогам.

Зрозуміло, що найдостовірніші результати може дати експериментальний метод кінематичного дослідження механізмів. Це пояснюється тим, що для аналітичних і графічних методів розв'язання задач кінематики механізмів доводиться приймати ряд суттєвих припущень (ланки вважаються абсолютно жорсткими тілами, в кінематичних парах відсутні зазори, усі ланки виготовлені абсолютно точно, головний вал машини обертається з постійною швидкістю і т.п.).

Теоретичні функціональні залежності таких ідеальних механізмів можуть суттєво відрізнятись від реальних. Крім цього, в сучасних машинах досить часто використовують механізми з пружними, гідравлічними, пневматичними в'язями, теоретичні розрахунки яких потребують експериментальної перевірки.

Отже, експериментальні дослідження сучасних машин можуть дати можливість отримати реальні параметри машин в умовах їх експлуатації.

Вибір та використання того чи іншого методу залежить як від цільового призначення кінематичного дослідження, так і від необхідної точності поставленої задачі. Графічний та графоаналітичний методи дають меншу точність, але вони більш наочні та відносно прості.

Таким чином, визначення кінематичних параметрів необхідне для аналізу і оцінки роботи існуючих машин або ж для практичного використання при конструюванні нових.

Наприклад, траєкторії руху окремих точок механізму потрібні для

визначення ходу ланок, для з'ясування можливого їх зіткнення з іншими ланками, окреслення габаритів машин.

Крім цього при виконанні силових розрахунків механізмів необхідно визначати сили інерції, тертя, опору середовища та інші силові фактори, для чого повинні бути відомі швидкості ланок та їх прискорення.

За кінематичними параметрами конструктор робить висновок про те, наскільки успішно виконана одна з основних задач проектування механізму – вибрана його кінематична схема.

Далі розглянемо більш докладно кожен з вищевказаних методів кінематичного аналізу на прикладі важільних механізмів.

РОЗДІЛ 17. ГРАФІЧНІ І ГРАФОАНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ АНАЛІЗУ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ

17.1. Графічні методи кінематичного дослідження плоских важільних механізмів

Розглянемо спочатку графічні методи кінематичного дослідження плоских механізмів.

Такі методи дозволяють визначати, положення ланок і окремих точок механізму, їх переміщення, а також швидкість і прискорення за допомогою графічних побудов.

В теорії механізмів і машин при кінематичному аналізі застосовують наступні графічні методи: метод побудови плану положень механізму (метод планів), а також метод побудови кінематичних діаграм переміщення, швидкості і прискорення (метод діаграм).

Обидва методи дають за точністю приблизно однаковий результат. Але метод діаграм в основному застосовується для визначення закону руху і кінематичних параметрів характерних точок вихідних ланок механізму, а метод планів дозволяє знайти кінематичні параметри будь яких точок на ланках механізму.

Треба відмітити, що графічні методи мають практичне застосування не тільки в кінематиці механізмів, але і в їх динаміці. Перевагою таких методів є їх простота і наочність, недоліком – невисока точність.

У цілому особливістю графічних методів є те, що такий спосіб розв'язання задач потребує зображення різноманітних фізичних величин (переміщень, довжин ланок, швидкостей, прискорень, сил і т. ін.) у вигляді ліній тієї чи іншої довжини. Для цього використовують масштабний коефіцієнт.

Масштабний коефіцієнт (масштаб) – це відношення дійсного

значення зображеної величини до довжини відрізка, який цю величину зображує на кресленні.

Масштабний коефіцієнт позначається як μ_i з нижнім індексом того параметра, який зображується графічно.

Отже одиниці вимірювання масштабного коефіцієнта можуть бути визначені як

$$\mu_i = \frac{i}{l_i}, \quad (4.11)$$

де i – деяка фізична величина, яку зображають графічно; l_i – довжина відрізка, який зображає дану фізичну величину на кресленні.

Розглянемо нижче особливості застосування графічних методів при кінематичному аналізі плоских важільних механізмів.

17.2 План положень механізму

Задачу визначення положень ланок і характерних точок рухомого механізму у певні моменти часу можна розв'язати за допомогою креслень у вибраному масштабі кінематичної схеми механізму, положення якої відповідає даному моменту часу. Такий графічний метод кінематичного дослідження механізмів носить назву метода планів положень або просто – метода планів.

Відповідно до цього зображення кінематичної схеми механізму у вибраному масштабі довжини і відповідному положенні називається *планом положень механізму або планом механізму*.

Звичайно, що плани механізму в процесі його руху постійно змінюються, але в кожен момент часу взаємне розташування ланок може бути цілком визначеним, якщо задано закон руху вхідної ланки механізму і довжини його ланок на кінематичній схемі.

Слід зазначити, що у русі більшості досліджуваних нами механізмів спостерігається циклічність, тобто усі кінематичні параметри механізмів змінюються періодично. Тому кінематичний аналіз таких механізмів виконують тільки для одного періоду їх роботи. При цьому у межах цього одного періоду роботи механізму будують ряд послідовних положень механізму для моментів часу, які слідує один за одним.

Такий ряд послідовно побудованих планів дозволяє у повній мірі провести графічний аналіз, з'ясувати особливості розташування ланок в процесі руху механізму, визначити їх характерні положення та побудувати траєкторії руху окремих їх точок.

Побудову плану механізму починають звичайно із графічного

зображення у вибраному масштабі ведучої (вхідної) ланки механізму, закон руху якої і положення є заданими.

Якщо ця ланка являється кривошипом OA (рис. 4.52), то коло, що описує її точка (траєкторія руху точки A), можна розділити на будь-яку кількість рівних або нерівних частин.

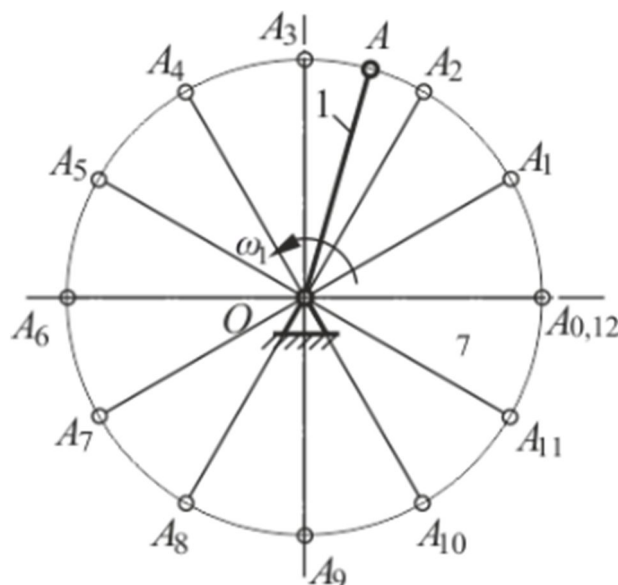


Рис. 4.52

При рівномірному обертанні кривошипа коло ділять на рівні частини, частіше всього на: 6, 12 або 24, а при нерівномірному обертанні – це коло доцільно розділити на частини, які точка A проходить за однакові проміжки часу.

Але треба зазначити, що в технічних задачах при кінематичному дослідженні механізмів закон руху $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ початкової ланки беруть, як правило, лінійним. Тобто вважають, що кривошип обертається рівномірно із сталою кутовою швидкістю $\omega_1 = const$, яка дорівнює запроєктованій середній кутовій швидкості, хоча в дійсності кривошип може обертатися нерівномірно і навіть із зупинками. Отже приймається, що за рівні проміжки часу кривошип повертається на рівні кути.

У відповідності до цього траєкторію руху точка A кривошипа ділять на рівні частини, а кожне положення цієї точки A позначають певним номером, який у подальшому відноситься до плану всього механізму.

При цьому нумерацію планів положень механізму бажано починати від його крайніх положень, тобто таких положень, в яких вихідна ланка механізму, або характерна її точка займе крайнє положення її можливого переміщення.

Слід нагадати, що при графічній побудові планів механізму дуже важливо дотримуватись вибраного масштабу довжини його ланок. Від цього залежить точність отримуваних результатів.

Розмірність масштабного коефіцієнту довжини встановлюється як відношення натурального розміру початкової ланки (в метрах) до довжини відрізка, який зображує цю ланку на кресленні – плані механізму (в міліметрах):

$$\mu_l = \frac{l_{OA}}{OA}, \frac{м}{мм}, \quad (4.12)$$

де l_{OA} – справжній розмір початкової ланки; OA – масштабний розмір ланки на кресленні.

При виборі масштабного коефіцієнта рекомендується дотримуватись стандартних креслярських масштабів, а також міркувань зручності підрахунків та наочності зображення.

Наприклад, масштабу $M1:1$ відповідає масштабний коефіцієнт $\mu_l = 0,001, \frac{м}{мм}$, масштабу $M1:2$ відповідає $\mu_l = 0,002, \frac{м}{мм}$ і т.ін.

У цілому загальна послідовність побудови планів механізму має бути наступною:

- за заданою довжиною початкової ланки вибирають масштабний коефіцієнт μ_l плану положень;

- знаходять довжини відрізків, якими на кресленні будуть зображені ланки інші ланки механізму, наприклад

$$AB = \frac{l_{AB}}{\mu_l}, \text{ мм}, \quad BC = \frac{l_{BC}}{\mu_l}, \text{ мм}, \quad CD = \frac{l_{CD}}{\mu_l}, \text{ мм і т.д.}$$

- на креслення наносять положення нерухомих ланок (нерухомі точки механізму), а також при наявності і нерухомі напрямні;

- креслять задане положення початкової ланки, а якщо будується n планів механізму, то знаходять початкові (крайні) положення механізму і, відповідно, початкової ланки;

- у вибраному масштабі μ_l креслять групи Ассур в порядку їх приєднання згідно з формулою будови механізму.

Як вже було зазначено вище, при побудові плану доцільно за початкове положення механізму (кривошипа) вибрати те, яке відповідає одному з крайніх положень вихідної ланки (тобто ланки, що пов'язана із виконанням певної роботи, для якої призначений механізм і до якої прикладені зовнішні сили корисного опору, або рушійні сили).

Так, наприклад, в кривошипно-повзунному механізмі вихідна ланка

може перебувати у двох крайніх положеннях, коли кривошип накладатиметься на шатун, або витягуватиметься в одну з ним лінію. У кулісному механізмі вихідна ланка також може перебувати у двох крайніх положеннях.

У цих випадках із двох крайніх положень механізму за початкове вибирають те, що відповідає початку його робочого ходу. Оскільки в більшості машин робочий хід здійснюється повільніше (більш рівномірно) ніж холостий, то він відповідає руху кривошипа з одного крайнього положення до іншого через більший з центральних кутів. Більший з центральних кутів, що описує кривошип при русі механізму з одного крайнього положення до іншого, називається *кутом робочого ходу*.

При знаходженні взаємного розташування ланок під час графічної побудови планів положень механізму, як правило, використовують метод засічок.

Метод засічок базується на припущенні, що ланки важільних механізмів є жорсткими тілами і в процесі свого руху у складі механізму не змінюють свої розміри і форму, а в кінематичних парах, що з'єднують ці ланки відсутні зазори. Отже точку перетину двох суміжних ланок у будь-який момент руху механізму можна знайти графічно на перетині їх траєкторій. Цей перетин траєкторій двох суміжних ланок і називається засічкою, яка відповідає розташуванню кінематичної пари в шуканому положенні механізму.

Зробивши послідовно ряд таких засічок, починаючи від траєкторії руху кривошипа, і рухаючись за формулою будови механізму, встановлюють взаємне розташування усіх його ланок у шуканому положенні механізму.

Розглянемо приклад побудови плану положень аксіального (незміщеного) кривошипно-повзунного механізму, в якому горизонтальна вісь руху повзуна знаходиться на одній прямій з віссю обертання кривошипа l (рис. 4.53).

Виберемо масштабний коефіцієнт для побудови плану положень за довжиною кривошипа механізму:

$$\mu_l = l_{OA} / OA, \text{ м/мм},$$

де l_{OA} , $м$, – довжина кривошипа; OA , $мм$, – довжина відповідного відрізка на кресленні.

Відповідно до визначеного масштабного коефіцієнта μ_l знайдемо довжину відрізка AB , яким на плані буде зображено шатун механізму:

$$AB = l_{AB} / \mu_l, \text{ мм}.$$

Накреслимо траєкторію точки A кривошипа і знайдемо крайні

положення механізму, у яких кривошип і шатун буде знаходитись на одній лінії (горизонтальній прямій $x-x$). Позначимо крайні положення кривошипа через θ і θ' . При цьому початкове або нульове положення θ буде відповідати початку робочого ходу всього механізму.

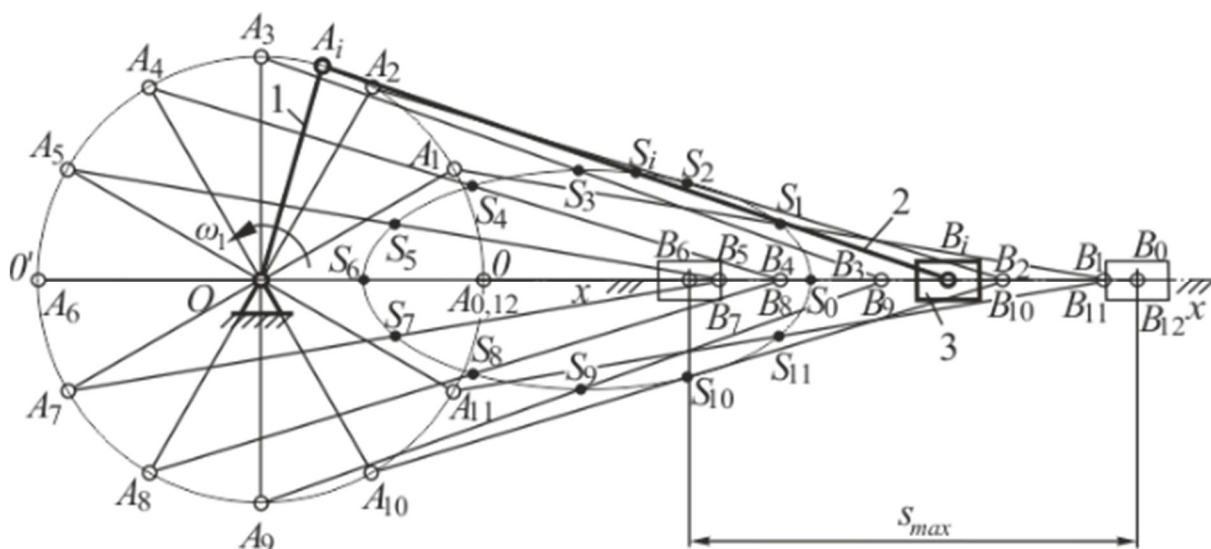


Рис. 4.53

Вважаючи рух кривошипа рівномірним, траєкторію точки A розділимо на довільне число рівних частин, починаючи з нульового, наприклад, на 12, як це показано на рис. 3.2.

Пронумеруємо точки поділу $\theta, 1, \dots, 12$ у напрямі обертання кривошипа. У даному випадку крайні положення кривошипа θ і θ' відповідають розташуванню точок A_0 і A_6 на плані.

Максимальний робочий хід повзуна (максимальне зміщення) при його переході від крайнього положення θ до θ' складатиме $\theta\theta' = S_{max}$.

При цьому перехід із одного поточного положення кривошипа у наступне буде здійснюватись за час

$$t = \frac{T}{12}, \quad c, \quad (4.13)$$

де T – період обертання кривошипа.

Положення точки B знайдемо *методом засічок*, враховуючи, що довжина шатуна AB протягом руху механізму буде незмінною.

У кожному з 12 положень точки A , починаючи з крайнього положення A_0 , і закінчуючи положенням A_{12} , яке збігається з A_0 , тобто в положеннях $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}$, радіусом AB робимо дугові засічки на траєкторії точки B (на горизонтальній прямій xx).

В результаті отримуємо точки перетину, починаючи з точки B_0 – $B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8, B_9, B_{10}, B_{11}$.

Сполучимо ці точки з відповідними точками $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}$ і отримуємо план із 12 положень ланок механізму, де останнє дванадцять положення знову стане нульовим.

На плані положень також можна знайти траєкторію руху точки S , яка знаходиться на шатуні AB і відповідає розташуванню центра мас шатуна (рис. 4.53).

Для цього у відповідних положеннях шатуна треба зробити дугові засічки радіусом AS . Послідовно з'єднавши плавною кривою точки $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8, S_9, S_{10}, S_{11}$ кожного положення механізму, одержимо траєкторію точки S центру мас шатуна.

Траєкторії точок, що лежать на шатуні називаються *шатунними кривими*. Треба відмітити, що шатунні криві широко використовуються при проектуванні важільних механізмів.

План положень для шарнірного чотириланкового механізму (рис. 4.54) будуються аналогічно згідно з наведеною вище послідовністю побудови планів.

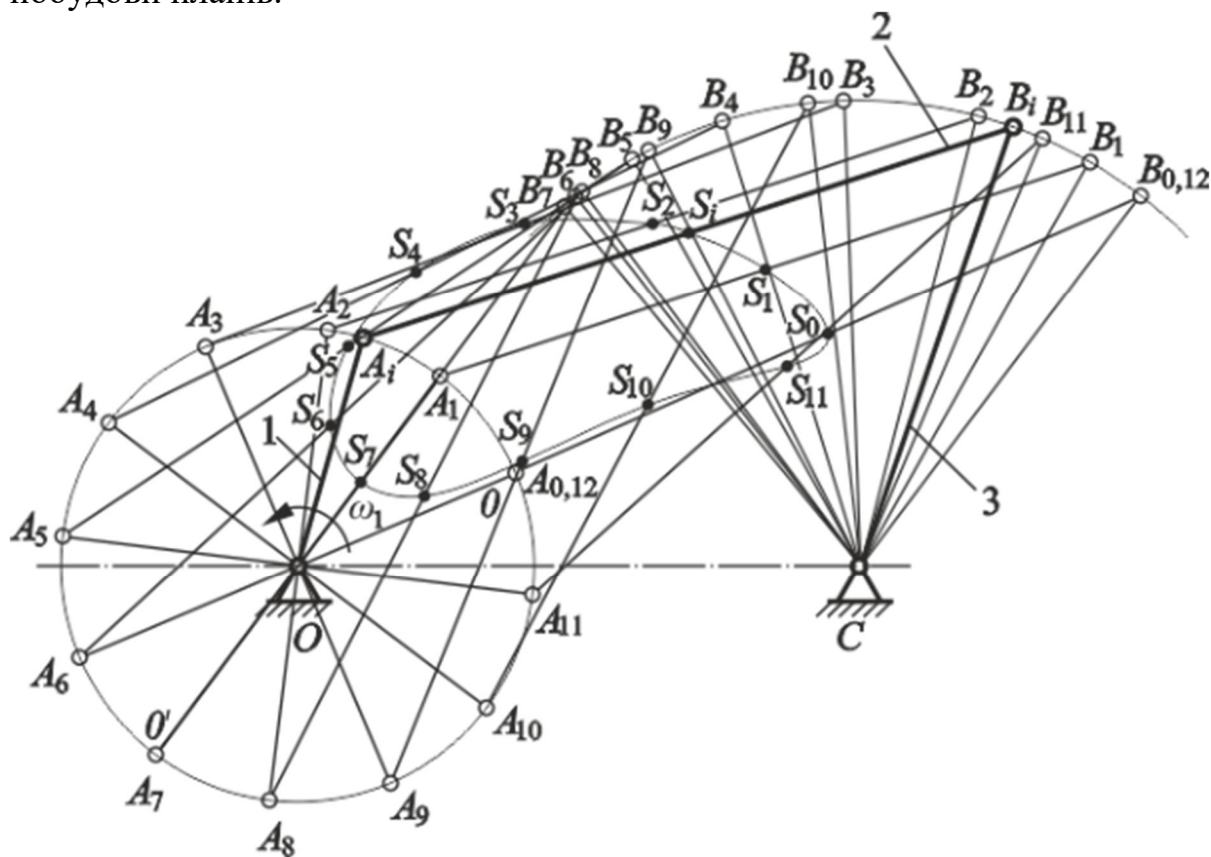


Рис. 4.54

Після визначення масштабного коефіцієнту і визначення довжин

відрізків AB і BC , якими буде зображено шатун 2 і коромисло 3 на плані положень механізму, радіусом OA проводимо коло з центром у точці O , яке є геометричним місцем миттєвих положень точки A кривошипа 1.

Для побудови 12 планів механізму треба розділити траєкторію руху точки A кривошипа відповідно на 12 рівних частин, починаючи з початкового (крайнього) положення механізму.

Для знаходження цього початкового положення із центра обертання кривошипа O робимо засічки радіусами $R=AB-OA$ і $R=OA+AB$ на траєкторії руху точки B , – дузі шатуна 3 радіусом $R=BC$.

В результаті отримаємо два крайніх положення механізму θ і θ' , у яких кривошип OA накладатиметься на шатун AB або витягуватиметься з ним в одну лінію. За початкове положення точки A виберемо точку A_0 , яка відповідає крайньому положенню θ і є початком робочого ходу коромисла 3 при заданому напрямі обертання кривошипа. Тоді кінцевому положенню θ' кривошипа буде відповідати на плані точка A_6 .

Треба зауважити, що у деяких випадках внаслідок геометричних особливостей даних механізмів і в залежності від співвідношення розмірів рухомих ланок крайня точка кінцевого положення θ' може не співпасти із її положенням A_i на плані, яке отримано при поділі траєкторії на рівні частини. В цьому випадку це положення можна підкоректувати, змістивши на певний кут або розглядати крайні положення механізму як додаткові. У цілому, чим на більше частин буде розділена траєкторія руху точки A , тим ця різниця буде меншою.

Для визначення положення ланок 2 і 3 достатньо встановити положення кінематичної пари B , що шарнірно з'єднує ці ланки між собою.

Для цього умовно роз'єднуємо шарнір у точці B і розглядаємо можливі рухи цієї точки.

Оскільки нерухомий центр обертання C займає цілком певне положення, то точка B , яка знаходиться на сталій відстані від точки C , може описати тільки дугу кола радіуса CB . З іншого боку, внаслідок незмінності довжини шатуна AB точка B може описати навколо точки A тільки дугу радіуса AB .

Таким чином, геометричним місцем можливих положень центра шарніра B є дві дуги кіл радіусів AB та BC . Точка перетину цих дуг і дасть дійсне положення точки B для конкретного положення кривошипа.

Отже, якщо потрібно побудувати, наприклад, 3-є положення механізму, то із точки A_3 радіусом $R=AB$ треба зробити засічку на дузі, по якій рухається точка B коромисла 3. Точка перетину цих дуг і дасть шукане положення точки B_3 .

Для знаходження положень ланок 2 і 3 достатньо з'єднати відповідні

точки (центри кінематичних пар A та B , B та C) відповідними відрізками.

Аналогічно будуються і всі інші положення даного механізму.

Якщо до складу механізму входять декілька груп Ассура, то їх плани положень будуються так само.

У разі необхідності на плані положень можна побудувати також траєкторії деяких окремих точок ланок механізму – наприклад шатунних кривих, які будуть мати складну різноманітну форму, оскільки шатун здійснює плоскопаралельний рух.

Так, на рис. 4.54. показано послідовні положення точки S шатуна 2, які утворюють його шатунну криву. Точність таких побудованих траєкторій звичайно залежить від вибраного числа положень механізму і масштабу μ_1 .

Треба зазначити, що в подібних чотириланкових механізмах у залежності від вибору розташування певних точок на шатуні (наприклад точок B , D , E , F , G , H шатуна) можна отримати різні шатунні криві (рис. 4.55).

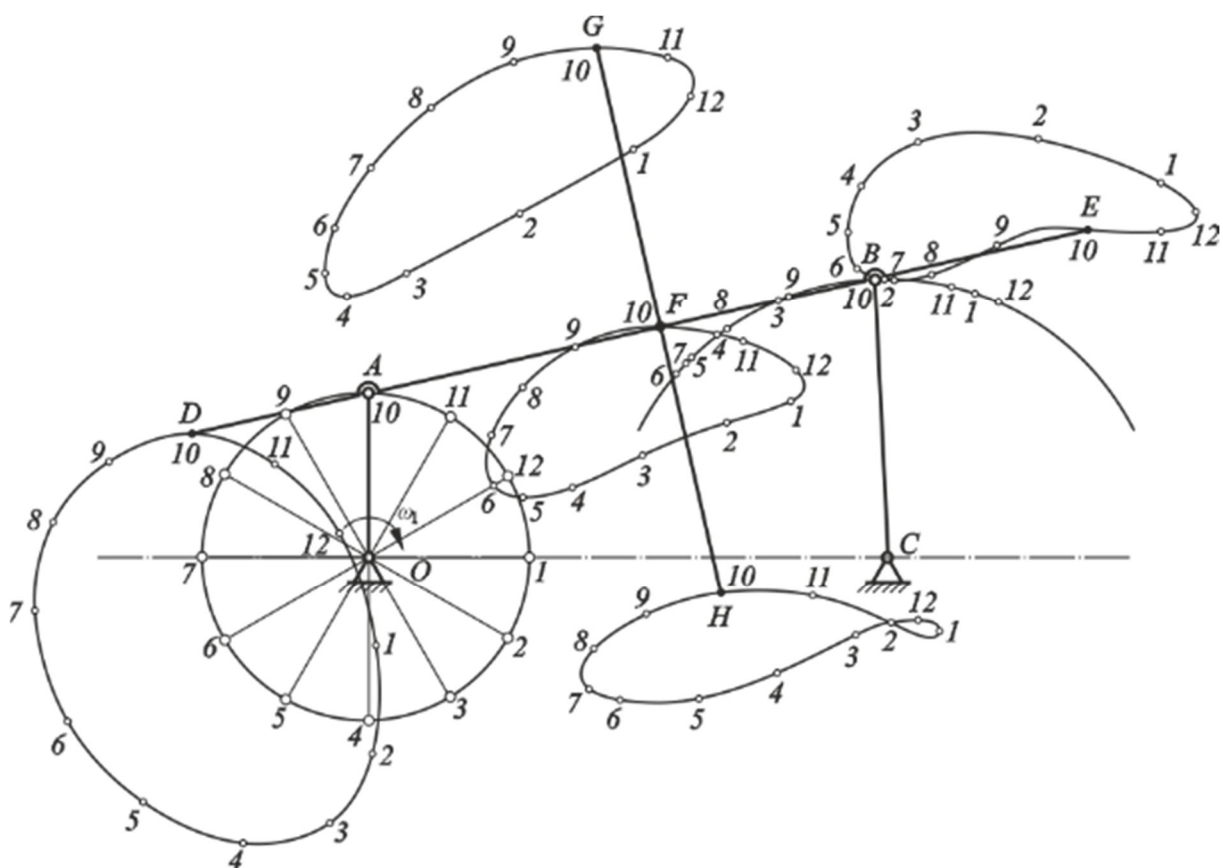


Рис. 4.55

Окремі ділянки деяких таких шатунних кривих можуть мало

відрізнятись від прямих ліній або дуг кіл. Ці властивості шатунних кривих можна використати для побудови спрямляючих механізмів або механізмів переривчастого руху.

Відмітимо, що шатунні криві можуть бути знайдені не тільки графічно. Вони можуть бути також описані аналітичними співвідношеннями, але у цьому випадку задача значно ускладнюється. Наприклад, для шарнірного чотириланкового механізму траєкторія точки S описується кривою шостого порядку.

Шатунні криві в сучасній техніці широко використовуються для відтворення заданих рухів робочих органів різноманітних машин і механізмів. Наприклад, у механізмах сіноворушилок, в тістомісильних машинах і т.ін.

Аналогічними графічними побудовами також можна отримати плани положень і для інших важільних механізмів, які мають у своєму складі декілька груп Ассура.

Наприклад, рис. рис. 4.56 показано механізм горизонтальної подачі супорта, який має у своєму складі кулісу 3 і горизонтальну рейку ланки 5.

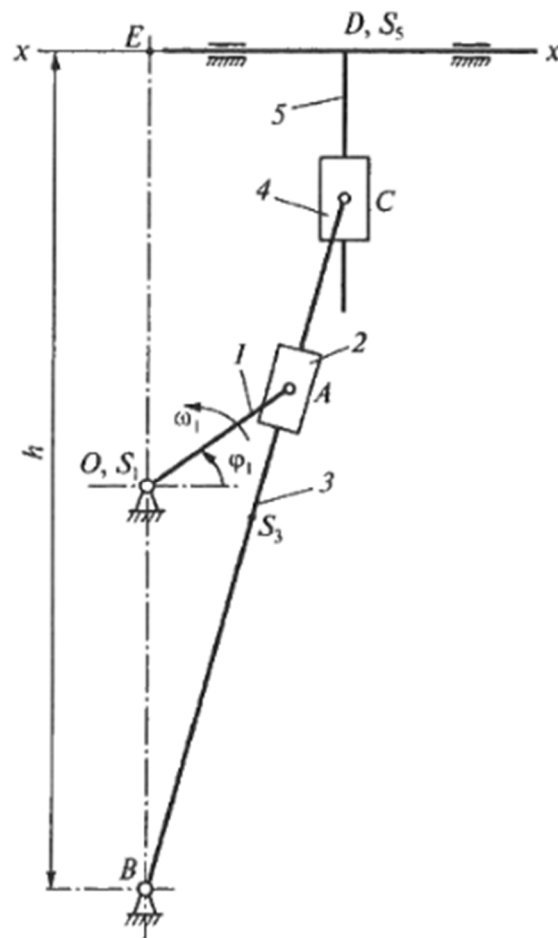


Рис. 4.56

План положень для даного плоского важільного механізму II класу представлений на рис. 4.57.

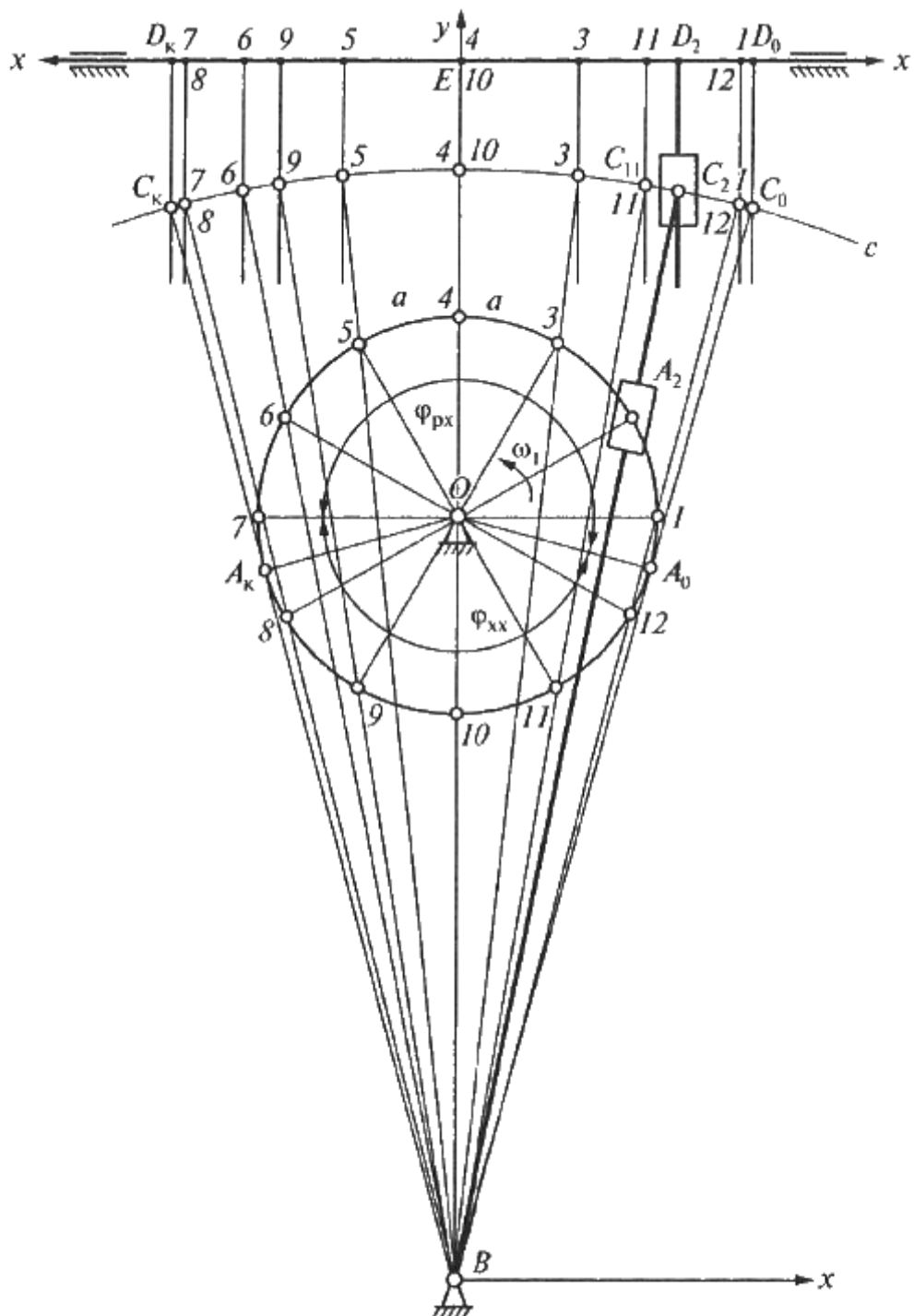


Рис. 4.57

Тут точкою A_0 і позначено крайнє праве, а точкою A_K – крайнє лівє положення кривошипа. Відповідно крайніми положеннями точок C і D будуть точки C_0, C_K і D_0, D_K . В цих крайніх положеннях куліса 3 і повзун 5 повзун механізму будуть нерухомими.

За початкове положення кривошипа тут прийнято положення OA_0 , тому що робочий хід механізму має бути більше його холостого або зворотного ходу ($\varphi_{px} > \varphi_{xx}$). У противному випадку ефективність даного механізму буде меншою.

При цьому, як видно з рис. 4.57, крайні точки кривошипа A_0 і A_K є проміжними між двома послідовними положеннями точки A . Точка A_0 знаходиться між A_1 і A_{12} , а точка A_K – між A_7 і A_8 .

Отже початкове і кінцеве положення механізму тут будуть додатковими.

На рис. 4.58 також представлений механізм поршневого компресора, у якому куліса 3 шарнірно з'єднана із шатуном 4.

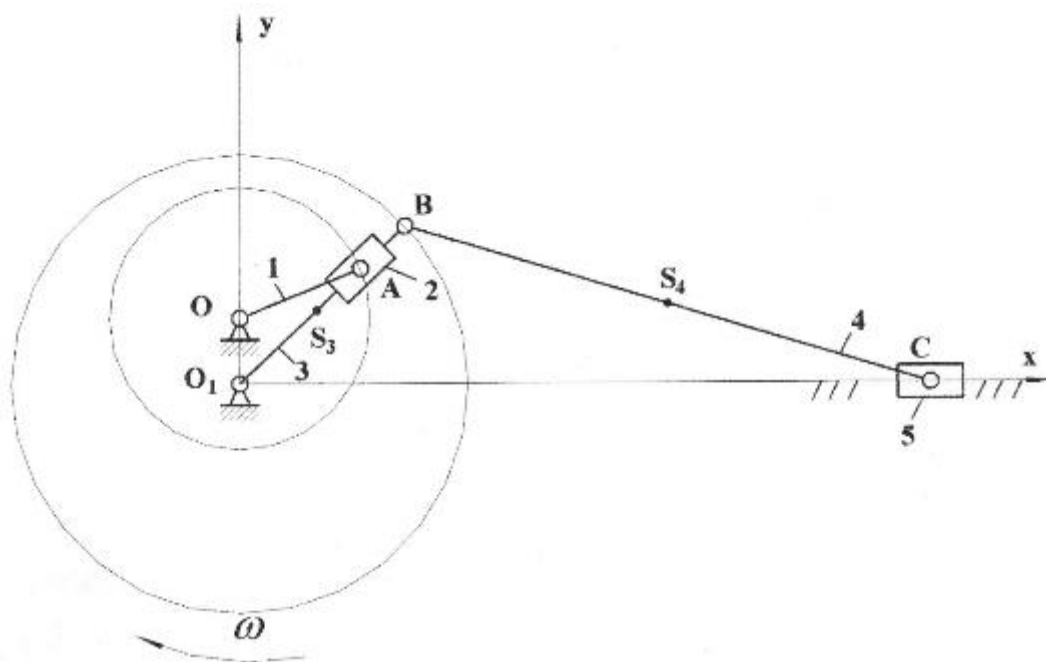


Рис. 4.58

План положень для даного механізму і його шатунна крива представлені на рис. 4.59.

Крайні положення поршня (повзуна 5), куліси 3 і кривошипа 1 тут відповідно позначені як C_1 і C'_6 , B_1 і B'_6 , A_1 і A'_6 .

Максимальний робочий хід поршня (повзуна 5) тут складає S_{max} при переміщенні точки C із початкового положення C_1 в положення C'_6 .

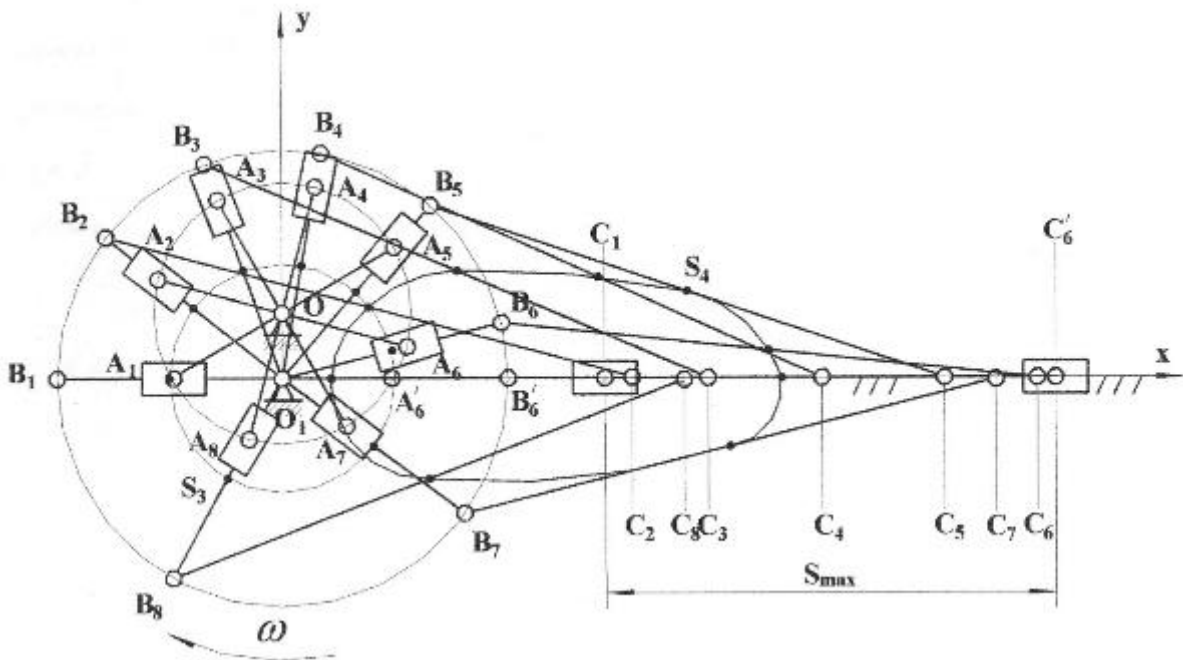


Рис. 4.59

При цьому треба зауважити, що метод засічок не є єдиним методом побудови планів положень. Існують також і інші методи, такі як метод шаблонів і геометричних місць (фіктивних шаблонів)

Наприклад, при побудові планів механізмів, що мають триповодкові групи, може бути використаний метод перетину двох траєкторій відносного руху. Такий спосіб для розглядаемого випадку ще називають методом удаваних (фіктивних положень) або геометричних місць. Оскільки даний метод є досить трудомістким, часто при побудові планів користуються шаблоном, який має форму базисної ланки. Відповідно цей спосіб побудови планів механізмів носить назву метода шаблонів. Більш докладно подібні методи розглянуті, наприклад, в [1].

На останнє треба зазначити, що при графічних кінематичних дослідженнях механізмів часто недостатньо знайти тільки форму траєкторії руху ланки або її точки. Бажано ще знати характер зміни переміщення залежно від часу або кута повороту кривошипа (його узагальненої координати).

З цією метою треба побудувати також діаграму лінійних при поступальному русі або кутових переміщень, якщо ланка здійснює коливальний рух. При наявності планів положень механізму побудувати таку діаграму і отримати графічну функцію положень ланок механізму нескладно. Після цього можна також графічно отримати відповідні діаграми швидкостей та прискорень. Методику побудови даних кінематичних діаграм розглянемо нижче.

17.3. Кінематичні діаграми механізму

Для кінематичного дослідження закономірностей зміни переміщень, швидкостей і прискорень за повний цикл (період T) руху досліджуваного механізму використовують кінематичні діаграми (графіки руху) механізму.

Кінематична діаграма – це графічне зображення зміни одного з кінематичних параметрів ланки чи її точки: переміщення, швидкості або прискорення як функції від часу t або від переміщення φ_1 початкової ланки механізму (як функції від узагальненої координати).

Кінематичні діаграми дають можливість наглядно дослідити зміну лінійних $s = s(t)$ або кутових $\varphi = \varphi(t)$ переміщень, якщо ланка здійснює коливальний рух, лінійних $v = v(t)$ або кутових $\omega = \omega(t)$ швидкостей і лінійних $a = a(t)$ або кутових $\varepsilon = \varepsilon(t)$ прискорень ланок або їх точок на протязі всього циклу руху механізму.

Як правило, кінематичні діаграми будують для вихідної ланки механізму чи точки, до якої умовно прикладені зовнішні сили.

Вхідними параметрами для побудови кінематичних діаграм є план положень механізму, на основі якого будують діаграму лінійних або, при коливальному русі ланки, кутових переміщень вихідної ланки.

На основі отриманих графічних залежностей переміщення виду $s = s(t)$ або $\varphi = \varphi(t)$ далі методом графічного диференціювання можна побудувати відповідні графічні залежності для швидкостей $v = v(t)$, $\omega = \omega(t)$ та прискорень $a = a(t)$, $\varepsilon = \varepsilon(t)$:

$$v = \frac{ds}{dt}; \quad a = \frac{dv}{dt},$$

або

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Наприклад, у випадку кривошипно-повзунного механізму для точки B повзуна (рис. 4.53) кінематичними діаграмами будуть графічні залежності виду $s_B = s_B(t)$, $v_B = v_B(t)$, $a_B = a_B(t)$ або виду $s_B = s_B(\varphi_1)$, $v_B = v_B(\varphi_1)$, $a_B = a_B(\varphi_1)$ за один період T руху механізму.

Якщо ж кінематичному дослідженню підлягає вихідна ланка механізму, яка здійснює коливальний рух, наприклад куліса 3 шарнірного чотириланкового механізму (рис. 4.54), то для неї можна побудувати діаграми виду $\varphi_3 = \varphi_3(t)$, $\omega_3 = \omega_3(t)$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(t)$ або виду $\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_1)$, $\omega_3 = \omega_3(\varphi_1)$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(\varphi_1)$.

Діаграма переміщення

Розглянемо приклад побудови діаграми переміщення $s_B = s_B(t)$ точки B повзуна кривошипно-повзунного механізму, план із 12 положень якого вже побудовано раніше (рис. 4.53).

Розташуємо цей план таким чином, щоб було зручно будувати діаграму переміщень (рис. 4.60).

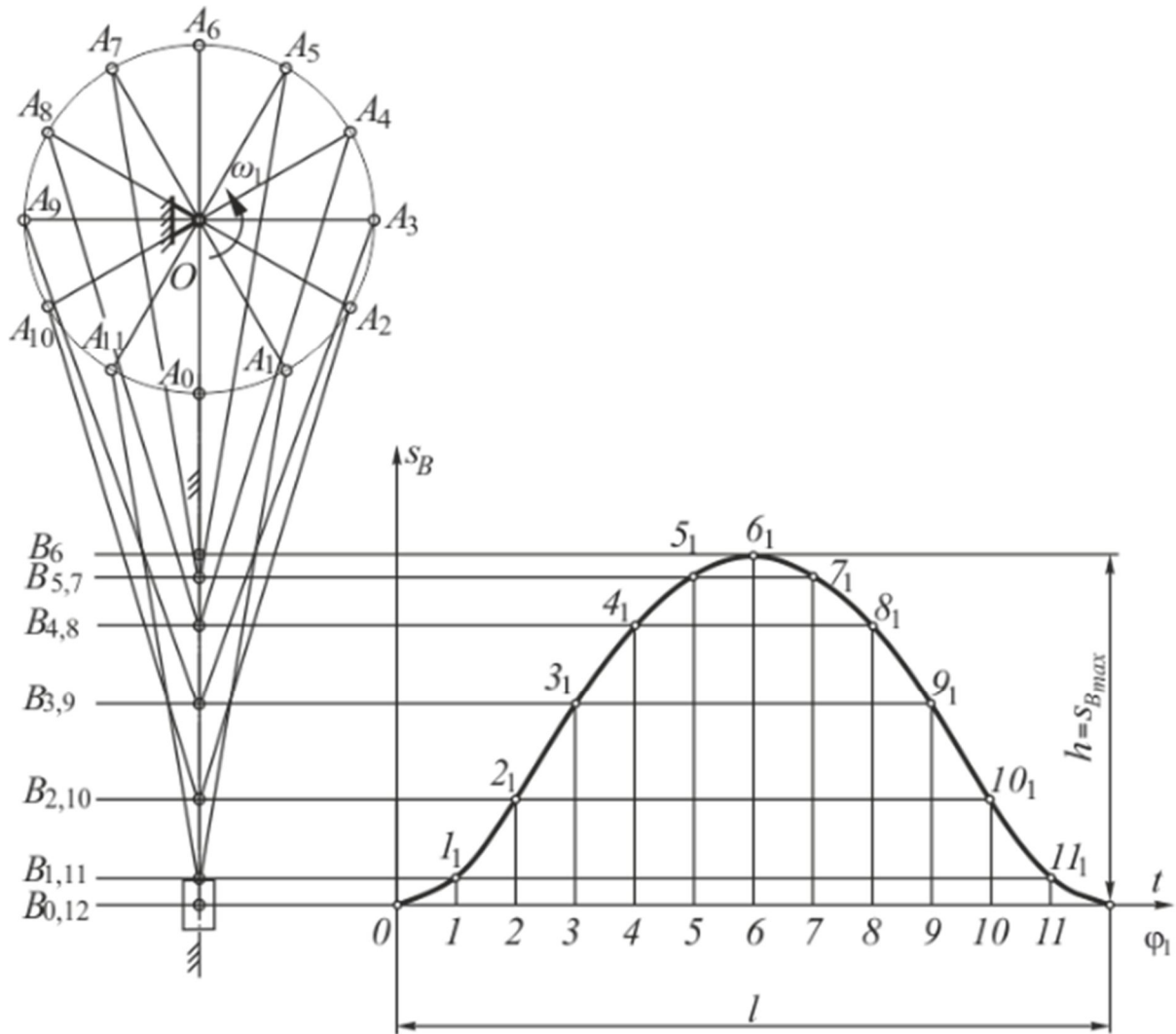


Рис. 4.60

За початок відліку діаграми приймемо крайнє положення повзуна, звідки проведемо прямокутну систему координат.

На осі абсцис відкладемо відрізок l , який у масштабі часу μ_t буде відповідати періоду одного оберту кривошипа:

$$\mu_t = \frac{T}{l} = \frac{2\pi}{\omega_1 \cdot l}, \quad \frac{с}{мм}, \quad (4.14)$$

де $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$, c – період кінематичної діаграми, що відповідає періоду

одного оберту кривошипа; ω_1 , c^{-1} – кутова швидкість кривошипа.

Горизонтальний відрізок l на діаграмі розділимо на 12 рівних частин. Номери точок поділу $0, 1, 2, 3, \dots, 11$ діаграми будуть відповідати номерам положення механізму, починаючи від його початкового положення.

Далі від відповідних точок поділу $1, 2, 3, \dots, 11$ діаграми відкладемо по осі ординат лінійні відрізки $1-1_1, 2-2_1, 3-3_1, \dots, 11-11_1$, які у вибраному масштабі μ_s відображають переміщення повзуна (точки B).

При цьому, якщо переміщення береться безпосередньо з планів механізму (рис. 4.60), то масштабний коефіцієнт переміщень повзуна μ_s і масштабний коефіцієнт планів механізму μ_l будуть співпадати:

$$\mu_s = \mu_l.$$

В загальному ж випадку можна прийняти:

$$\mu_s = \frac{2l_{OA}}{h}, \frac{m}{mm}, \quad (4.15)$$

де l_{OA} , m – довжина кривошипа; h , mm – довжина вертикального відрізка на діаграмі, що відображає максимальний хід повзуна.

Отримані точки $0, 1_1, 2_1, 3_1, \dots, 11_1$ сполучаємо плавною кривою, яка і буде діаграмою переміщення повзуна $s_B = s_B(t)$.

Треба зазначити, що оскільки в задачах кінематики рух кривошипа вважається рівномірним і за однакові проміжки часу він повертається на однакові кути, то можна вважати, що по осі абсцис діаграми відкладено як час t , так і кут повороту кривошипа φ_1 .

Отже графічна залежність переміщень $s_B = s_B(t)$ від часу t одночасно є графічною залежністю переміщень $s_B = s_B(\varphi_1)$ від кута повороту кривошипа φ_1 , яка є функцією положення механізму.

Масштаб μ_{φ_1} такої графічної залежності $s_B = s_B(\varphi_1)$ (масштаб кута повороту кривошипа) при цьому можна визначити як

$$\mu_{\varphi_1} = \frac{2\pi}{l}, \frac{1}{mm}. \quad (4.16)$$

Аналогічно будуються діаграми переміщень точок або ланок інших механізмів.

Але треба мати на увазі, якщо ланка здійснює коливальний рух, то будують звичайно діаграму не лінійних, а кутових переміщень.

Методи графічного диференціювання

Побудова діаграм швидкостей і прискорень важільних механізмів базується на графічних методах диференціювання або інтегрування відомих чи знайдених графіків функцій переміщень $s = s(t)$ або $\varphi = \varphi(t)$, швидкостей $v = v(t)$, $\omega = \omega(t)$ та прискорень $a = a(t)$, $\varepsilon = \varepsilon(t)$.

Треба зазначити, що до способів графічного диференціювання та інтегрування інколи звертаються навіть у тих випадках, коли кінематична функція задана аналітично, але не має достатньо простих формул для визначення похідної чи інтеграла.

Розглянемо спочатку методи графічного диференціювання, які звичайно використовують, коли є графік функції, а потрібно отримати графік її похідної. Так, наприклад, коли побудовано графік переміщення повзуна кривошипно-повзунного механізму (рис. 4.60), а необхідно побудувати графіки швидкості, прискорення.

Існує два основних метода графічного диференціювання – *метод дотичних* і *метод хорд*.

Теорія графічного диференціювання деякої функції $f = f(t)$ базується на тому, що з геометричної точки зору похідна цієї функції $f'(t)$ визначається тангенсом кута α нахилу дотичної, проведеної до функції у точці, абсциса якої є точкою диференціювання:

$$f'(t) = \operatorname{tg} \alpha . \quad (4.17)$$

Отже для того, щоб, наприклад, побудувати діаграму швидкостей $v(t) = \frac{ds}{dt}$, необхідно через ряд точок на діаграмі переміщень $s = s(t)$ провести дотичні, знайти кути нахилу дотичних, їх тангенси і на підставі отриманих значень побудувати діаграму швидкостей у деякому масштабі μ_v . Даний метод графічного диференціювання і є методом дотичних.

На відміну від методу дотичних в методі хорд дотичні замінюються хордами – прямолінійними відрізками, які з'єднують сусідні точки графіку функції.

Незважаючи на те, що похідна функції все ж таки є тангенсом кута нахилу саме дотичної до даної точки кривої, метод хорд вважаються кращим, тому що з практичної точки зору побудова хорд зручніша, а результуюча похибка менша, ніж в методі дотичних.

Розглянемо більш докладно методу графічного диференціювання деякої функції $f = f(t)$ обома способами.

Диференціювання методом дотичних проводять наступним чином (рис. 4.61).

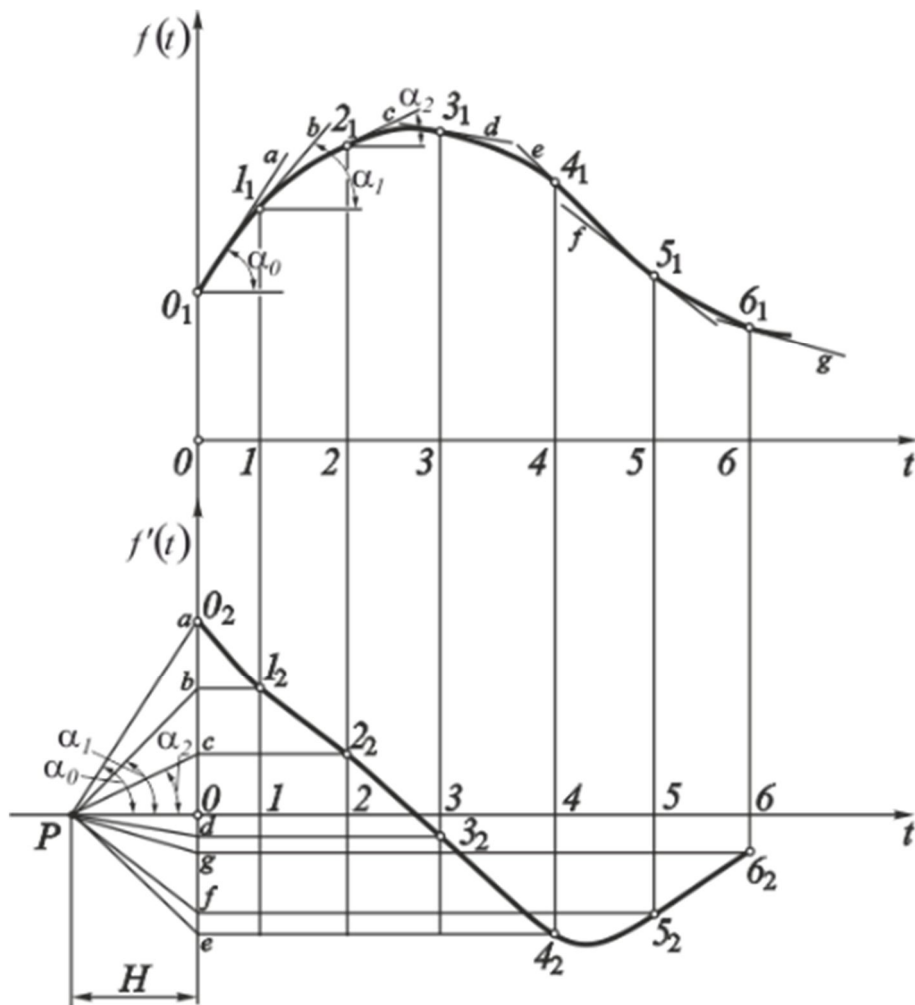


Рис. 4.61

На кривій $f = f(t)$, яку будемо диференціювати, у прямокутній системі координат відмітимо ряд точок $0_1, 1_1, 2_1, 3_1, \dots$, які відповідають значенням функції $f(t)$ при $t = 0, 1, 2, 3, \dots, c$.

У відповідних точках $0_1, 1_1, 2_1, 3_1, \dots$ проведемо дотичні a, b, c, d, \dots до графіка функції $f(t)$ під кутами нахилу $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ до осі абсцис.

Далі під графіком функцій $f = f(t)$ намалюємо нову систему координат і відкладемо на осі абсцис вліво від її початку відрізок PO – полюсну відстань, що відповідає одиниці масштабу.

Із полюса P проведемо промені Pa, Pb, Pc, Pd, \dots під відповідними кутами $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ паралельно дотичним до точок перетину з віссю ординат. Далі від цих отриманих точок паралельно осі Ox проведемо прямі до їх перетину із ординатами $0_1, 1_1, 2_1, 3_1, \dots$ кривої $f(t)$ і знаходимо точки $0_2, 1_2, 2_2, 3_2, \dots$.

В результаті довжини відрізків по осі ординат $00_2, 11_2, 22_2, 33_2, \dots$ будуть виражати значення похідної $f'(t)$ при $t = 0, 1, 2, 3, \dots, c$:

$$00_2 = PO \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 = 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 = f'(t_0);$$

$$11_2 = PO \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = f'(t_1);$$

$$22_2 = PO \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = f'(t_2);$$

.....;

$$nn_2 = PO \cdot \operatorname{tg} \alpha_n = 1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_n = f'(t_n),$$

де n – номер точки; α_n – кут нахилу дотичної у відповідній точці; t_n – час.

Отже ординати точок $0_2, 1_2, 2_2, 3_2, \dots$ будуть точками шуканої диференціальної кривої. З'єднавши ці точки плавною кривою, дістанемо графік функції $f'(t)$.

При диференціюванні кривої $f = f(t)$ методом хорд отримані результати будуть мати більш високу точність (рис. 4.62).

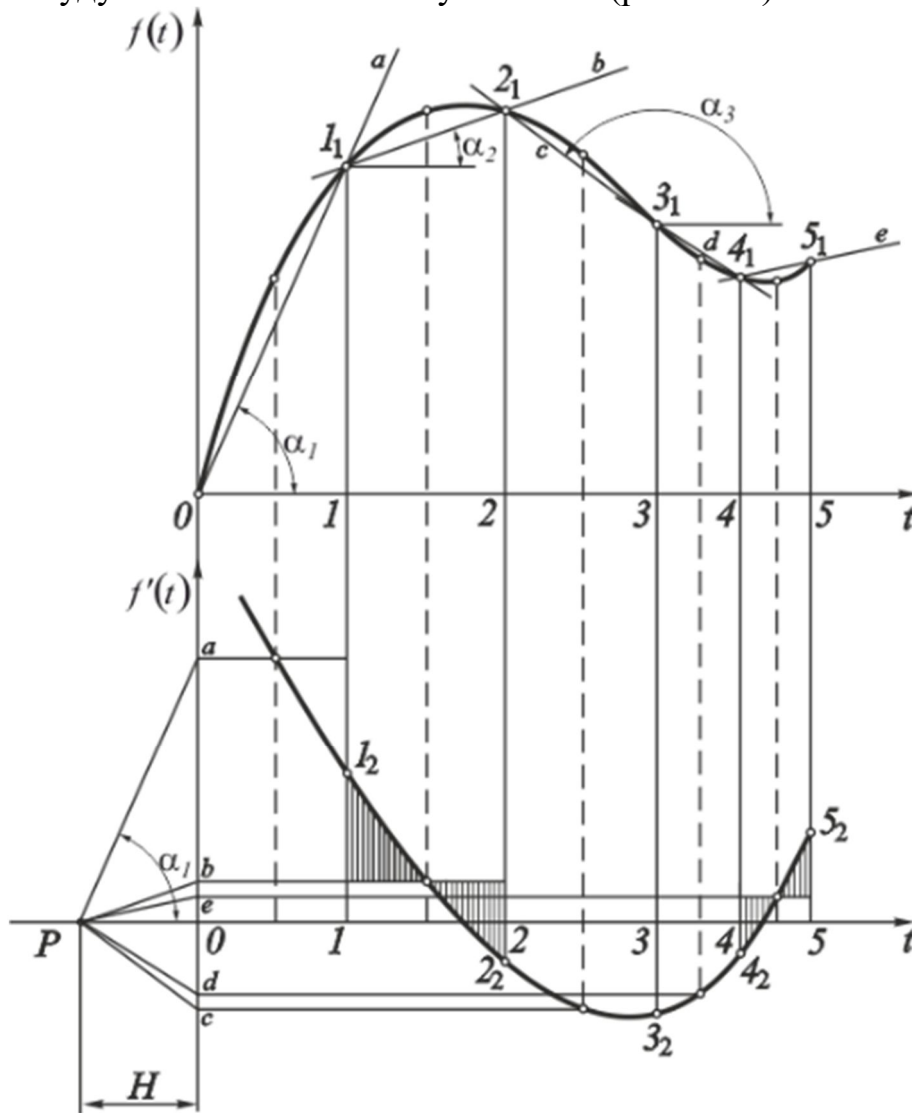


Рис. 4.62

На кривій $f = f(t)$ відмітимо ряд точок $1_1, 2_1, 3_1, \dots$, які з'єднаємо хордами a, b, c, d, \dots із кутами нахилу $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ до осі абсцис. Тобто замінимо задану криву $f(t)$ ломаною лінією із відповідних хорд.

При цьому приймемо наступне припущення: кут нахилу дотичних в точках, які розташовані посередині кожної ділянки кривої, дорівнює куту нахилу відповідної хорди. Це припущення дає деяку похибку, але вона відноситься тільки до даної точки. Отже похибки не накопичуються, що забезпечує прийнятну точність даного методу.

Інші побудови будуть аналогічними раніше описаним при графічному диференціюванні методом дотичних.

Під графіком функції $f(t)$ в новій системі координат виберемо відрізок PO , проведемо під кутами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ промені Pa, Pb, Pc, Pd, \dots до їх перетину з віссю ординат. Перенесемо ці точки перетину на ординати, що проведені посередині кожного з інтервалів $01, 12, 23, \dots$.

В результаті отримаємо точки $1_2, 2_2, 3_2, \dots$, диференціальної кривої $f'(t)$, які треба з'єднати плавною кривою (рис. 4.62).

Для досягнення більшої точності результатів отриману лінію диференціальної кривої $f'(t)$ можна скоректувати і провести трохи вище або нижче так, щоб площі криволінійних трикутників (позначені штриховкою) над та під горизонталлями відповідних ділянок $01, 12, 23, \dots$ були приблизно однаковими.

Знайдена таким чином крива і буде шуканим графіком функції $f'(t)$.

Треба зазначити, що графік похідної $f'(t)$ буде більш точним при застосуванні більшої кількості частин поділу кривої. Інтервали не обов'язково повинні бути рівними між собою; їх розмір вибирається з урахуванням того, щоб відповідні частини кривої менше відхилялись від прямої. Особливу увагу треба звернути на ділянки, де крива, яку диференціюють, має екстремуми. Отже ділянки, у яких лінія значно звивається, слід розбивати на більше число частин.

У цілому при графічній побудові диференціальних кривих треба враховувати їх наступні загальні закономірності:

- зростанню ординат кривої, що диференціюється, відповідають додатні значення ординат диференціальної кривої, а зменшенню – від'ємні значення;

- у точках максимальних значень кривої, що диференціюється, диференціальна крива проходить через нуль від додатних значень ординат до від'ємних, а у точках мінімальних значень – від від'ємних значень ординат до додатних;

- точці перегину кривої, що диференціюється, відповідають максимальні або мінімальні значення диференціальної кривої.

Масштаби при графічному диференціюванні

Припустимо, що задана крива виду $f(t)$ (рис. 4.62) є діаграмою переміщень, $s = s(t)$ і має поточні значення по осі абсцис $t_i = x_i, мм$, а по осі ординат $s_i = y_i, мм$.

Тоді для будь-якої довільної точки цієї кривої, знаючи масштаб переміщень μ_s та масштаб часу μ_t , реальні переміщення в реальному часі можна визначити як

$$s_i = y_i \cdot \mu_s, \text{ м},$$

$$t_i = x_i \cdot \mu_t, \text{ с}.$$

Значення швидкості при цьому відповідно буде дорівнювати

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \frac{dy_i}{dx_i} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \cdot \operatorname{tg} \alpha_i, \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Підставимо в останній вираз

$$v(t_i) = y'_i \cdot \mu_v,$$

та

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{y'_i}{H},$$

де $y'_i, мм$ – відрізки $11_2, 22_2, 33_2, \dots$, які зображають в масштабі μ_v швидкості у відповідних положеннях механізму; H – полюсна відстань PO .

В результаті масштабний коефіцієнт діаграми швидкості μ_v можна визначити як

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{\mu_t \cdot H}, \frac{\text{м} \cdot \text{с}^{-1}}{\text{мм}},$$

Отже у загальному випадку масштабний коефіцієнт диференціальної кривої $y'(x)$ буде

$$\mu_{y'} = \frac{\mu_y}{\mu_x \cdot H}. \quad (4.18)$$

Аналогічно можна знайти масштабний коефіцієнт і діаграми прискорень як диференціальної кривої від функції швидкості.

Методи графічного інтегрування

У випадках, коли диференціальна крива вже встановлена тим чи іншим чином (наприклад експериментально), а треба графічно побудувати

криву, що диференціюється, використовують дію, яка зворотна до графічного диференціювання, тобто застосовують графічне інтегрування.

За допомогою графічного інтегрування можна, наприклад, за даними графіками швидкостей встановити графіки переміщень або за даними графіками прискорень – графіки швидкостей.

Існує декілька способів графічної побудови інтегральних кривих, але найпростішим, як і в методах графічного диференціювання, є метод хорд.

Згідно з цим методом задану криву $f' = f'(t)$, яку будемо інтегрувати, ділимо на інтервали і отримуємо точки $1, 2, 3, \dots$ на осі абсцис (рис. 4.63).

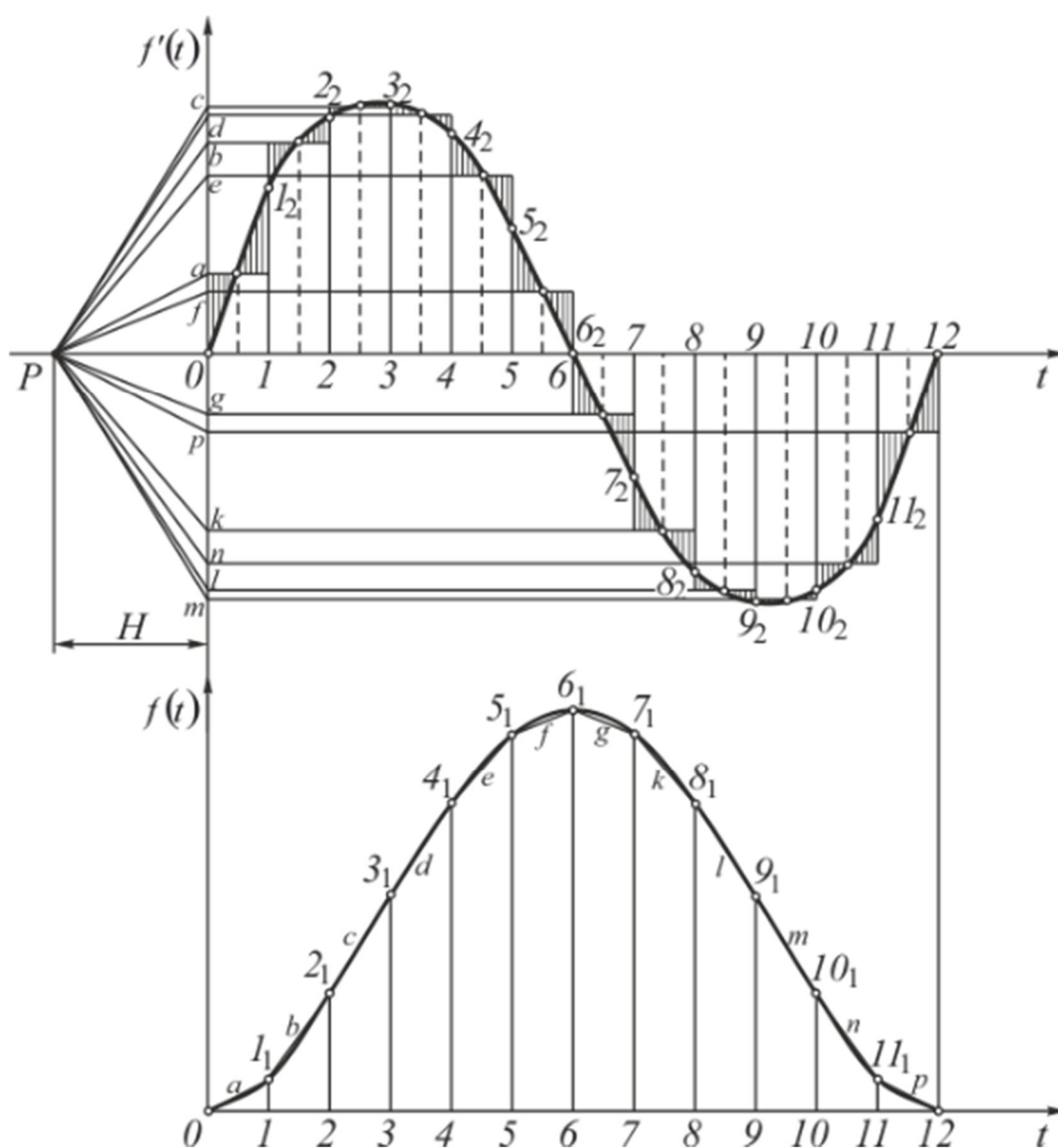


Рис. 4.63

Кожну ділянку осі абсцис $01, 12, 23, \dots$ ділимо навпіл і коректуємо це ділення, провівши горизонталі так, щоб площі криволінійних трикутників (заштриховані) між горизонталями та графіком $f' = f'(t)$ були приблизно однаковими. Знаходимо точки перетину горизонталей з віссю ординат, у даному випадку – це точки a, b, c, d, \dots .

Проводимо полюсну відстань PO , з'єднуємо точки a, b, c, d, \dots із полюсом P і отримуємо проміні Pa, Pb, Pc, Pd, \dots .

Під даною діаграмою будуємо нову систему координат і ділимо вісь абсцис на такі ж інтервали, як і на попередньому графіку.

З початку нової системи координат проводимо у першому інтервалі лінію 01_1 паралельно до променя Pa , з кінця відрізка 01_1 проводимо у другому інтервалі відрізок 1_12_1 паралельно променю Pb , з кінця відрізка 1_12_1 проводимо у третьому інтервалі відрізок 2_13_1 паралельно променю Pc , і т.д. для усіх інтервалів. Отриману ламану лінію $abcd\dots$ замінюємо плавною лінією і одержуємо графік $f(t)$ інтегральної кривої.

Формули, що встановлюють залежності між масштабними коефіцієнтами отриманих діаграм, аналогічні формулам, які встановлені при графічному диференціюванні, адже розглянутий спосіб графічного інтегрування являє собою побудову, яка зворотна графічному диференціюванню.

Треба відмітити, що методи графічного інтегрування можуть використовуватись не тільки у кінематичному аналізі механізмів при визначенні швидкостей і переміщень. Їх також можна застосувати у динамічних дослідженнях, які будуть розглянуті пізніше.

Діаграми швидкостей і прискорень

Побудову діаграм швидкостей і прискорень за допомогою графічного диференціювання функції переміщення методом хорд розглянемо на прикладі кривошипно-повзунного механізму.

Використаємо для цього вже знайдену діаграму переміщення $s_B = s_B(t)$ точки B повзуна (рис. 4.60).

Вісь абсцис діаграм швидкостей і прискорень розмістимо під діаграмою переміщення в тому ж самому масштабі μ_t .

По осі ординат на діаграмі швидкостей будемо відкладати швидкості v_B повзуна у його положеннях $0, 1, 2, 3, \dots, 11$, а на діаграмі прискорень – прискорення a_B у цих самих положеннях.

Для знаходження швидкостей спочатку графічно продиференціюємо діаграму переміщення.

На осі абсцис діаграми швидкостей виберемо полюс P і полюсну відстань H_1 , мм (рис. 4.64).

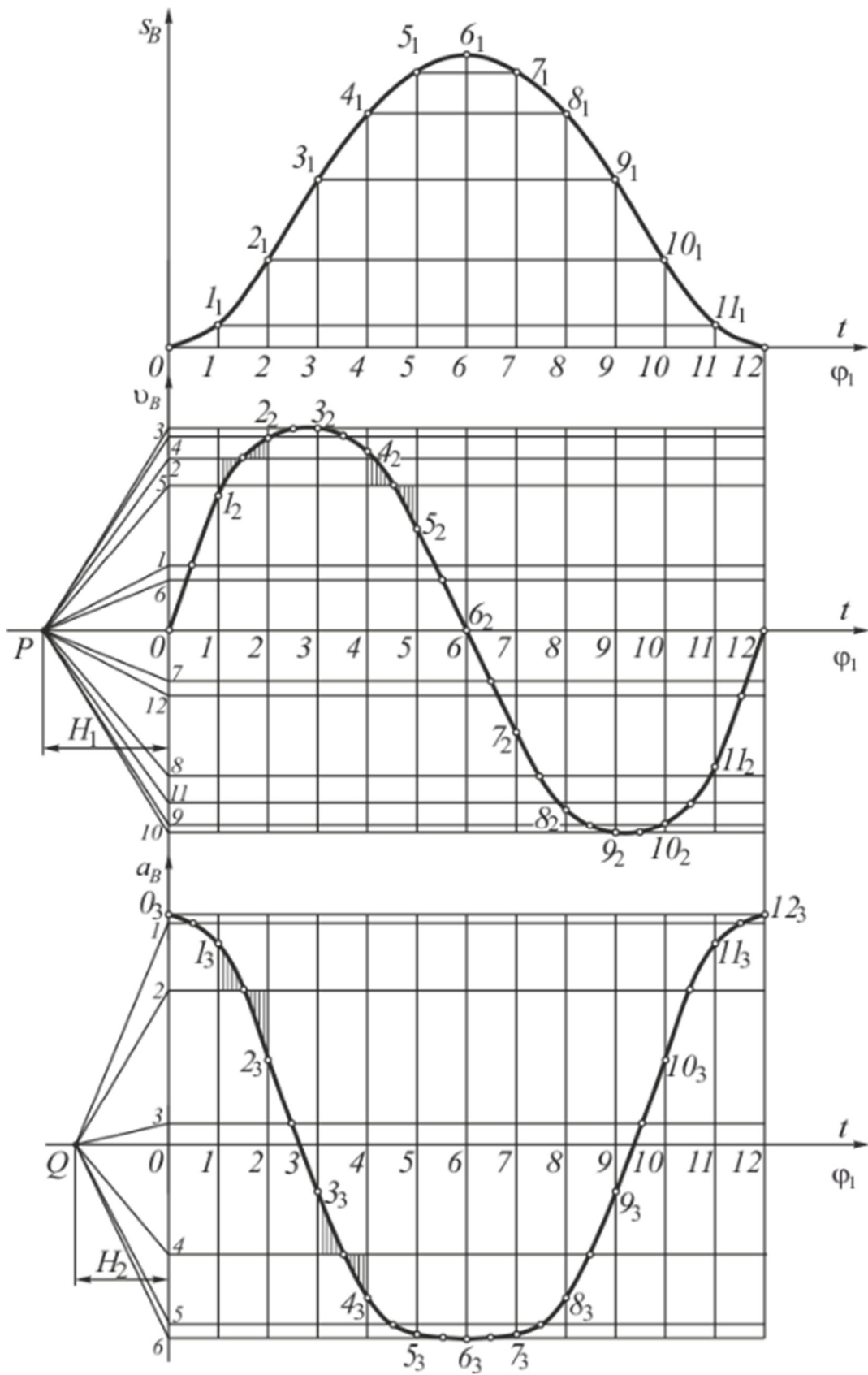


Рис. 4.64

Із полюса P проведемо промінь, який паралельний хорді 0_1I_1 , до його перетину з віссю ординат. Із отриманої точки перетину проведемо горизонталь до ділянки 01 . Потім із полюса P знову проведемо промінь, який паралельний хорді I_1I_2 , до його перетину з віссю ординат. Із точки перетину знову проведемо горизонталь до ділянки I_2 і т.д.

Ці горизонталі на ділянках $01, I_2, I_3, \dots$ поділимо навпіл. Точки поділу сполучимо плавною тонкою лінією.

Далі отриману лінію диференціальної кривої скоректуємо і проведемо трохи вище або нижче так, щоб площі криволінійних трикутників (позначені на рис. 4.64 штриховкою) над та під горизонталлями відповідних ділянок $01, I_2, I_3, \dots$ були приблизно однаковими.

Отримана остаточно крива і буде діаграмою швидкості повзуна $v = v_B(t)$, а її точки перетину $1_2, 2_2, 3_2, \dots$ – значеннями швидкості повзуна у його відповідних положеннях.

Масштаб діаграми швидкостей буде

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{\mu_t \cdot H_1}, \quad \frac{m \cdot c^{-1}}{mm}, \quad (4.19)$$

де H_1, mm – полюсна відстань на діаграмі швидкостей.

Діаграму прискорень будують аналогічно, але вже графічним диференціюванням діаграми швидкостей.

На осі абсцис діаграми вибирають полюс Q і полюсну відстань H_2, mm (рис. 4.64). Із полюса Q проводять промені, які паралельні хордам $0_2I_2, I_2I_3, \dots$, і т.д.

Масштаб діаграми прискорень

$$\mu_a = \frac{\mu_v}{\mu_t \cdot H_2}, \quad \frac{m \cdot c^{-2}}{mm}, \quad (4.20)$$

де H_2, mm – полюсна відстань на діаграмі прискорень.

Таким чином, отримані кінематичні діаграми дають повну картину зміни кінематичних параметрів (переміщення, швидкості і прискорення) однієї досліджуваної точки або ланки механізму. Для того, щоб провести кінематичний аналіз іншої точки або ланки даного механізму треба знову побудувати для них свої діаграми переміщення, швидкості і прискорення. В цьому полягає незручність даного методу. Крім цього, як це вже було відмічено раніше, графічні побудови передбачають деякі похибки таких розрахунків. Але треба зауважити, що на сьогоднішній день із розвитком сучасної електронно-обчислювальної техніки і методів обрахунків існують методи побудови кінематичних діаграм аналітичним шляхом, які будуть розглянуті у наступному розділі.

17.4. Графоаналітичний метод кінематичного дослідження плоских важільних механізмів

Графоаналітичним методом кінематичного дослідження плоских механізмів є метод побудови планів швидкостей та прискорень. Цей метод ґрунтується на графічному зображенні на площині векторів швидкостей і прискорень окремих точок механізмів у заданому масштабі та використовує векторні рівняння руху.

На відміну від методу кінематичних діаграм, метод планів швидкостей і прискорень дає можливість визначити швидкість і прискорення усіх ланок і точок досліджуваного механізму, але тільки в одному його положенні. В іншому положенні механізму плани швидкостей і прискорень будуть іншими. Отже у кількох положеннях треба дослідити механізм, стільки планів швидкостей і прискорень треба побудувати.

Теоретичні основи побудови планів швидкостей і прискорень розглядаються в курсі теоретичної механіки. За основу цього методу взята можливість розкласти складний рух точки або ланки на прості рухи шляхом введення додаткової (рухомої) системи відліку. Залежності між кінематичними характеристиками абсолютного, переносного та відносного рухів точки (ланки) записуються у векторній формі та представляються у вигляді планів швидкостей та прискорень. Плани викреслюються у відповідних масштабах, що дозволяє отримати числові значення кінематичних характеристик.

Планом швидкостей (прискорень) механізму називають креслення, на якому зображені у вигляді відрізків вектори, які у масштабі визначають модуль та напрям швидкостей (прискорень) різних точок ланок для даного положення механізму.

План швидкостей (прискорень) механізму є сукупністю планів швидкостей (прискорень) окремих ланок, що побудовані з одного полюса (точки, де абсолютна швидкість або прискорення дорівнюють нулю), спільного для всі ланок.

Кінематичний аналіз механізму методом планів швидкостей і прискорень проводиться у наступній послідовності:

- спочатку визначаються кінематичні параметри початкової ланки;
- далі виконується кінематичне дослідження окремих структурних груп Ассур в послідовності їх приєднання до початкової ланки при утворенні механізму.

При цьому для ланок, що здійснюють плоский рух потрібно знайти швидкість і прискорення щонайменше двох їх точок. Такими точками є центри шарнірів обертальних пар і однойменні точки елементів

поступальних кінематичних пар. При побудові планів за структурними групами в порядку їх приєднання в кожній такій групі будуть відомі швидкості та прискорення зовнішніх кінематичних пар, якими приєднується дана група. Отже дослідження кожної структурної групи повинно розпочинатись із визначення кінематичних параметрів внутрішньої пари, яка є спільною для ланок, що утворюють цю пару. Потім, за потреби, визначаються кінематичні параметри інших характерних точок групи та кутові швидкості і прискорення ланок.

Зрозуміло, що при такому кінематичному аналізі механізму спочатку будується план швидкостей, а потім план прискорень.

17.5. Плани швидкостей і прискорень початкової ланки

Як вже було зазначено вище, побудову планів швидкостей і прискорень починають із визначення і побудови вектора швидкості або прискорення точки з'єднання механізму I класу (кривошипа) з іншими ланками механізму (групами Ассура).

Нехай механізм I класу (кривошип) OA обертається навколо точки O із постійною кутовою швидкістю ω_1 (рис. 4.65, а).

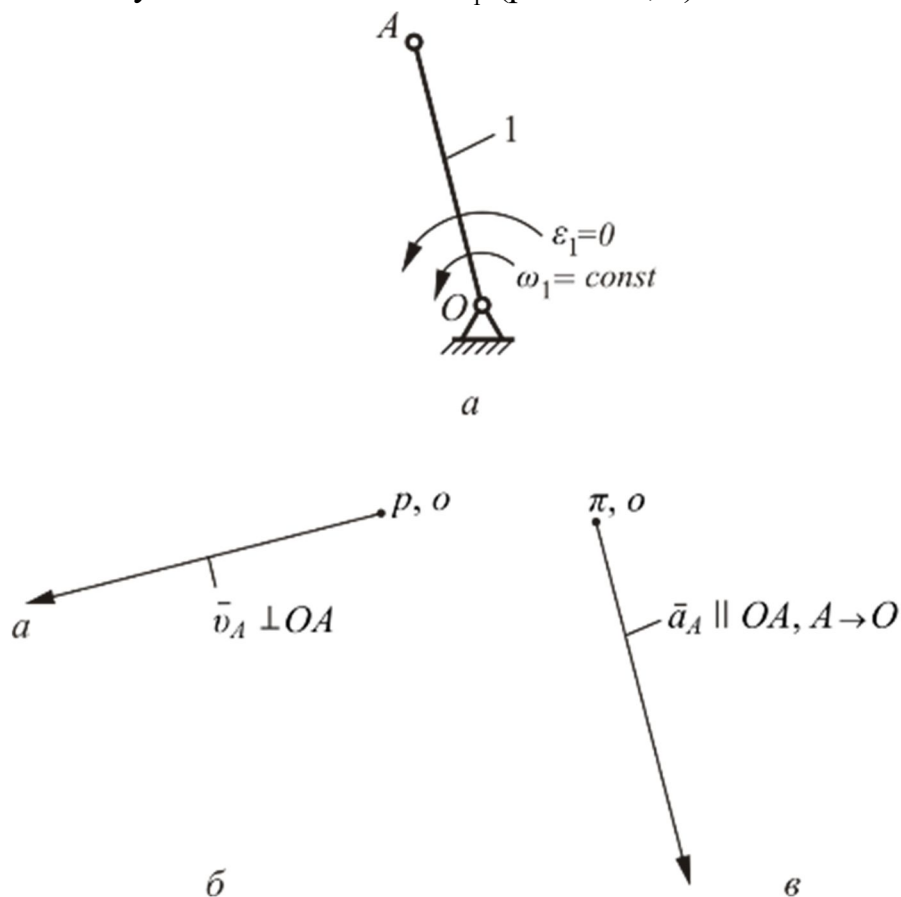


Рис. 4.65

Масштаб зображення кривошипа – μ_l . Відомі кутова швидкість кривошипа ω_1 ($\omega_1 = const$) і довжина його ланки l_{OA} . Необхідно визначити і побудувати вектори швидкості і прискорення точки A .

Побудуємо спочатку вектор швидкості точки A .

Величина швидкості точки A кривошипа визначається як

$$v_A = \omega_1 l_{OA}, \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Масштаб плану швидкостей механізму буде

$$\mu_v = v_A / \overline{pa}, \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} / \text{мм},$$

де \overline{pa} , мм, – довжина вектора \overline{pa} , який відображає в масштабі μ_v швидкість точки A кривошипа.

Відрізок \overline{pa} на плані, вибирається так, щоб розміри плану всього механізму були в заданих межах креслення.

На площині вибираємо довільну точку – полюс p , де швидкість дорівнює нулю (рис. 4.65, б).

Від полюса p відкладаємо перпендикулярно OA в бік обертання кривошипа вектор \overline{pa} . Швидкість точки O дорівнює нулю, тому відповідна точка o на плані співпадає з полюсом p .

Переходимо до побудови вектора прискорень точки A .

При рівномірному обертанні кривошипа OA величина прискорення точки A дорівнює тільки величині її нормальної складової (дотична складова при постійній кутовій швидкості кривошипа дорівнює нулю):

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 l_{OA}, \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Масштаб плану прискорень механізму буде

$$\mu_a = a_A / \overline{\pi a}, \text{ м} \cdot \text{с}^{-2} / \text{мм},$$

де $\overline{\pi a}$, мм, – довжина вектора $\overline{\pi a}$, який відображає в масштабі μ_a швидкість точки A кривошипа.

Відрізок $\overline{\pi a}$ на плані прискорень вибирається аналогічно відрізку \overline{pa} на плані швидкостей.

Тоді на площині вибираємо довільну точку – полюс π , де прискорення дорівнює нулю. Від полюса π відкладаємо паралельно OA , у напрямку від A до O вектор $\overline{\pi a}$ (рис. 4.65, в).

Оскільки прискорення точки O дорівнює нулю, то відповідна точка O співпадає з полюсом π .

17.6 Плани швидкостей і прискорень груп Ассура

Далі розглянемо методику побудови планів швидкостей і прискорень для інших ланок груп Ассура. При цьому треба пам'ятати, що будь-який складний рух твердого тіла (а в нашому випадку рух ланки механізму) можна розкласти на складові частини.

В результаті швидкість точки можна визначити як геометричну суму векторів швидкостей переносного \bar{v}^e і відносного \bar{v}^r рухів, а прискорення точки – як геометричну суму векторів прискорень переносного \bar{a}^e , коріолісового \bar{a}^K і відносного \bar{a}^r рухів:

$$\bar{v} = \bar{v}^e + \bar{v}^r,$$

$$\bar{a} = \bar{a}^e + \bar{a}^K + \bar{a}^r.$$

Треба зазначити, що переносний рух ланки механізму може бути як поступальним, так і обертальним.

Розглянемо окремо випадки побудови планів швидкостей і прискорень для груп Ассура II класу різних видів.

Група Ассура II класу 2 виду.

Нехай для групи Ассура II класу 2 виду (рис. 4.66, а) відомі довжина l_{AB} ланки AB , швидкість \bar{v}_A та прискорення \bar{a}_A точки A . Необхідно визначити швидкість і прискорення точки B методом побудови планів швидкостей та прискорень.

Спочатку побудуємо план швидкостей. Для цього відкладемо на площині від полюса p в заданому масштабі μ_v вектор \overline{pa} , який відображає швидкість \bar{v}_A .

Далі для визначення швидкості точки B скористаємось графічним розв'язком векторного рівняння. При цьому будемо виходити з наступного.

З одного боку точка B належить шатуну AB (ланці 2), що здійснює плоскопаралельний рух. Тому швидкість цієї точки можна визначити як суму векторів швидкості руху точки A і відносного обертального руху точки B навколо точки A :

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA},$$

де \bar{v}_{BA} – швидкість точки B у відносному обертанні навколо точки A .

За напрямком вектор \bar{v}_{BA} направлений перпендикулярно ланці AB ($\bar{v}_{BA} \perp AB$).

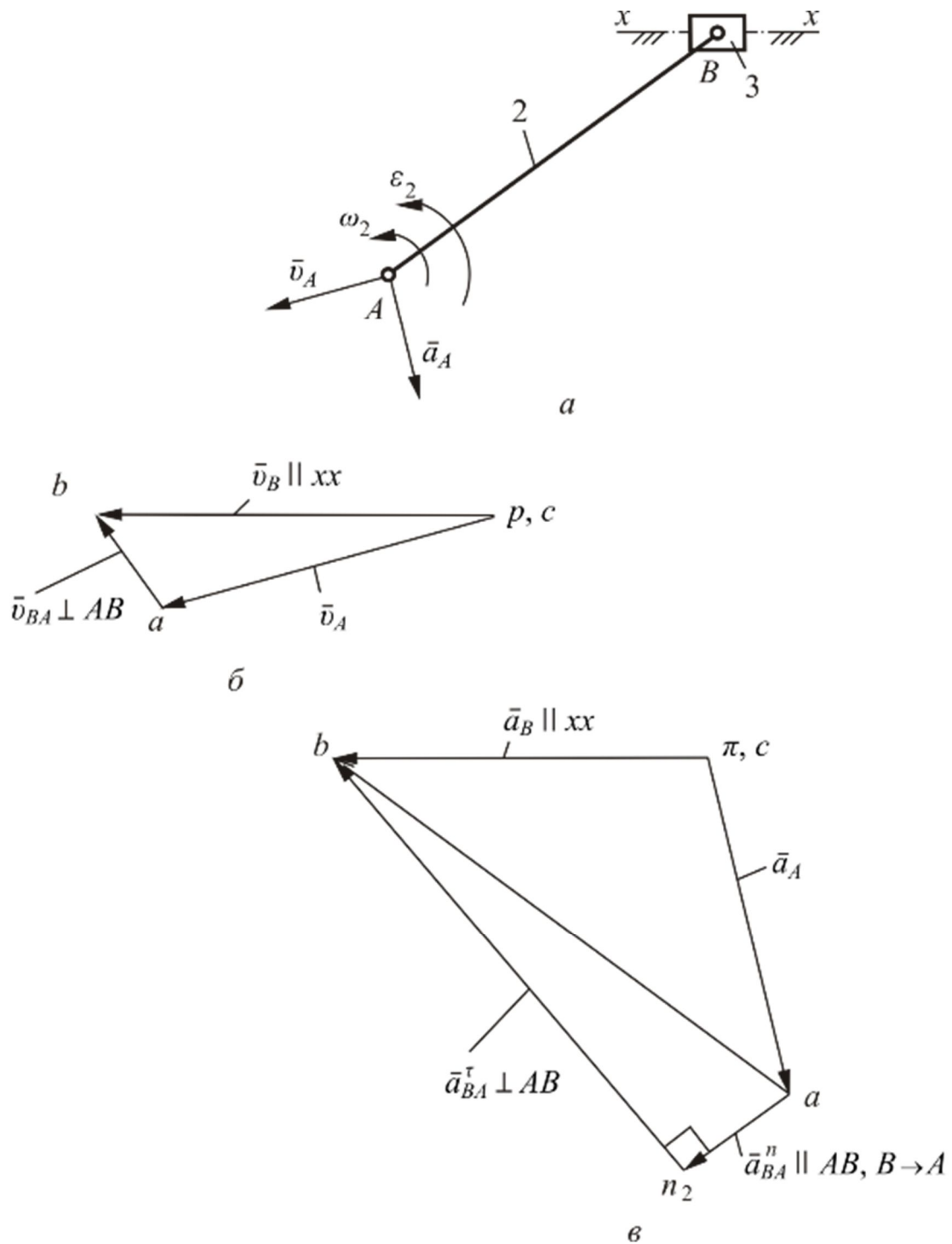


Рис. 4.66

З іншого боку точка B належить повзуну (ланці 3), що рухається поступально по горизонталі вздовж напрямної xx .

Тому вектор швидкості (як і прискорення) точки B буде

спрямований по горизонталі вздовж напрямної xx ($\bar{v}_B \parallel xx$).

Відповідно до цього на плані швидкостей через точку a проведемо лінію вектора \bar{v}_{BA} – перпендикуляр до ланки AB , а із полюса p проведемо лінію вектора \bar{v}_B – горизонталь.

В результаті отримаємо точку перетину b , що обмежує довжини невідомих векторів \overline{pb} та \overline{ab} і тим самим визначає величину і напрямок відповідних їм векторів швидкостей \bar{v}_B і \bar{v}_{BA} .

Таким чином, векторне рівняння (4.23) відповідає на плані швидкостей наступній векторній сумі:

$$\overline{pb} = \overline{pa} + \overline{ab}.$$

Величини швидкостей v_B і v_{BA} будуть дорівнювати:

$$v_B = pb \cdot \mu_v,$$

$$v_{BA} = ab \cdot \mu_v.$$

Перейдемо тепер до побудови плану прискорень. Спочатку відкладемо на площині від полюса π в заданому масштабі μ_a вектор $\overline{\pi a}$, що відображає прискорення \bar{a}_A .

При визначенні прискорення точки B скористаємось аналогічним розв'язком векторного рівняння, що і для швидкості. Але тут ще будемо мати нормальну і дотичну складові прискорення обертального руху.

Так, векторне рівняння прискорення точки B та відповідне рівняння на плані будуть наступними:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau,$$

$$\overline{\pi b} = \overline{\pi a} + \overline{an_2} + \overline{n_2 b},$$

де $\bar{a}_{BA}^n, \bar{a}_{BA}^\tau$ – нормальне і дотичне прискорення точки B , що належить шатуну 2, у відносному обертанні навколо точки A , \bar{a}_B – прискорення точки B , що належить повзуну 3, який рухається по горизонталі.

Вектор \bar{a}_{BA}^n направлений вздовж ланки AB від точки B до точки A ($\bar{a}_{BA}^n \parallel AB, B \rightarrow A$), вектор \bar{a}_{BA}^τ – перпендикулярно ланці AB ($\bar{a}_{BA}^\tau \perp AB$), а вектор \bar{a}_B направлений вздовж напрямної xx ($\bar{a}_B \parallel xx$).

Крім цього величина нормального прискорення \bar{a}_{BA}^n буде:

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 l_{AB},$$

що відповідає на плані вектору $\overline{an_2}$, довжиною:

$$an_2 = a_{BA}^n / \mu_a, \text{ мм.}$$

Тоді на плані від точки a відкладаємо паралельно AB у напрямі від B до A вектор $\overline{an_2}$ (рис. 4.66, в). Через точку n_2 проводимо лінію, перпендикулярну AB , а із полюса π – паралельну xx .

В результаті отримуємо точку перетину b , що обмежує довжини невідомих векторів $\overline{\pi b}$ та $\overline{n_2 b}$ і тим самим визначає величину і напрямом відповідних їм векторів прискорення $\overline{a_B}$ і $\overline{a_{BA}^\tau}$.

Величини прискорення a_B , a_{BA}^τ і a_{BA} будуть дорівнювати:

$$a_B = \pi b \cdot \mu_a,$$

$$a_{BA}^\tau = n_2 b \cdot \mu_a,$$

$$a_{BA} = ab \cdot \mu_a.$$

Група Ассура II класу I виду.

Застосуємо метод планів для визначення швидкості і прискорення точки B групи Ассура II класу I виду (рис. 4.67, а), якщо відома довжина l_{AB} ланки AB , швидкість $\overline{v_A}$ та прискорення $\overline{a_A}$ точки A .

Побудуємо план швидкостей. Для цього відкладемо на площині від полюса p в заданому масштабі μ_v вектор \overline{pa} , який відображає вектор швидкості $\overline{v_A}$.

Векторне рівняння для визначення швидкості точки B та відповідне рівняння на плані мають вигляд:

$$\overline{v_B} = \overline{v_A} + \overline{v_{BA}},$$

$$\overline{pb} = \overline{pa} + \overline{ab},$$

де $\overline{v_{BA}}$ – швидкість точки B , що належить шатуну 2, у відносному обертанні навколо точки A , $\overline{v_B}$ – швидкість точки B , що належить коромислу 3, в обертальному русі навколо точки C .

Вектор $\overline{v_{BA}}$ направлений перпендикулярно до ланки AB ($\overline{v_{BA}} \perp AB$), а вектор $\overline{v_B}$ – перпендикулярно до ланки BC ($\overline{v_B} \perp BC$).

На плані швидкостей через точку a проведемо перпендикуляр до ланки AB , а із полюса p – перпендикуляр до ланки BC . Їх точка перетину b обмежує довжини векторів \overline{pb} та \overline{ab} плану і визначає відповідні вектори швидкостей $\overline{v_B}$ і $\overline{v_{BA}}$.

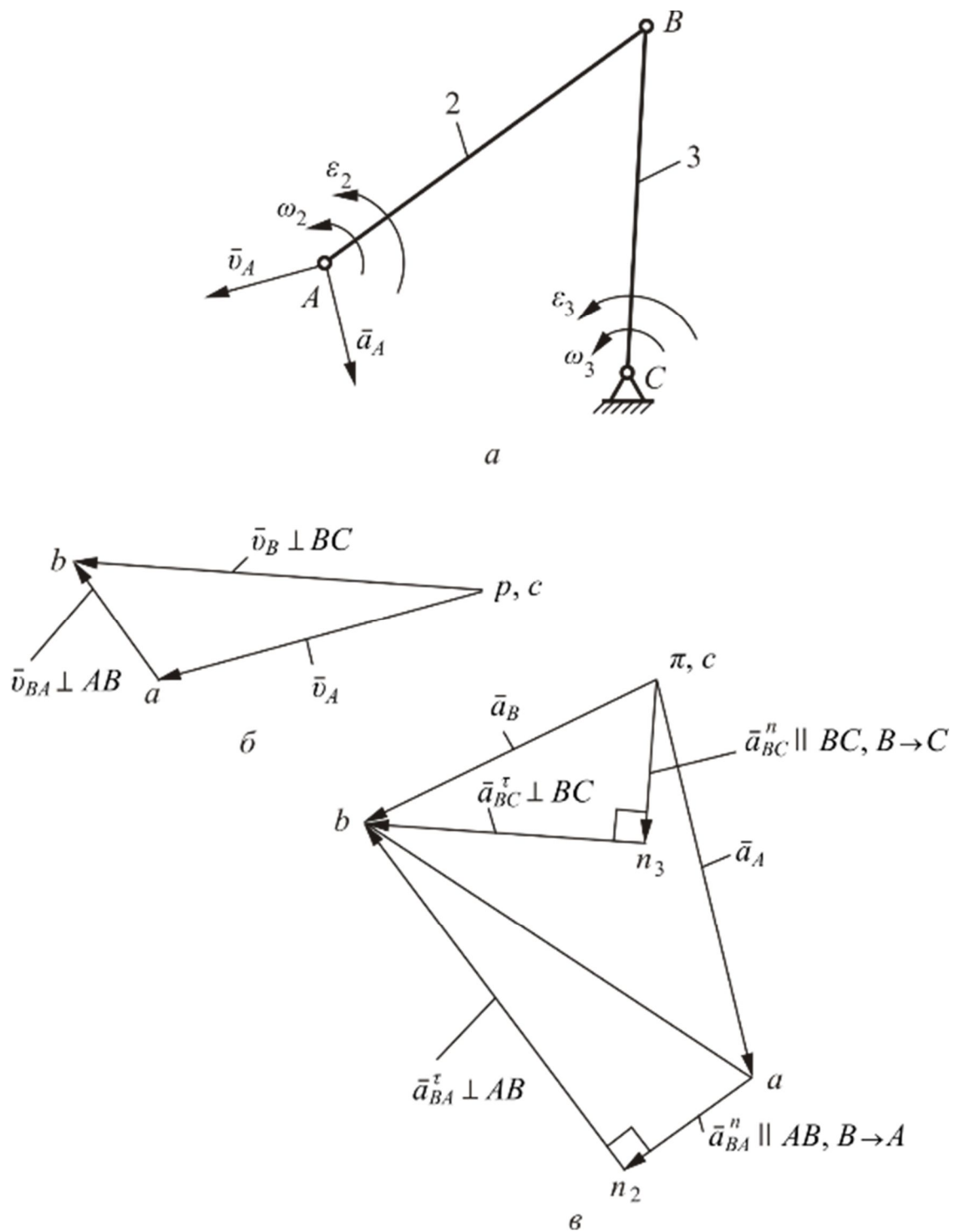


Рис. 4.67

Величини швидкостей v_B і v_{BA} відповідно будуть дорівнювати:

$$v_B = pb \cdot \mu_v,$$

$$v_{BA} = ab \cdot \mu_v.$$

Далі побудуємо план прискорень. Для цього відкладемо на площині від полюса π в заданому масштабі μ_a вектор $\overline{\pi a}$, який відображає вектор прискорення $\overline{a_A}$.

Прискорення точки B визначається системою векторних рівнянь:

$$\begin{cases} \overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{BA}^n} + \overline{a_{BA}^\tau}; \\ \overline{a_B} = \overline{a_{BC}^n} + \overline{a_{BC}^\tau}, \end{cases}$$

де $\overline{a_{BA}^n}, \overline{a_{BA}^\tau}$ та $\overline{a_{BC}^n}, \overline{a_{BC}^\tau}$ – нормальні і тангенціальні прискорення точки B , що належить або шатуну, або коромислу, в обертальному русі відносно відповідних точок A або C .

Вектор $\overline{a_{BA}^n}$ спрямований вздовж ланки AB від точки B до точки A ($\overline{a_{BA}^n} \parallel AB, B \rightarrow A$), вектор $\overline{a_{BA}^\tau}$ – перпендикулярно ланці AB ($\overline{a_{BA}^\tau} \perp AB$), вектор $\overline{a_{BC}^n}$ спрямований вздовж ланки BC від точки B до точки C ($\overline{a_{BC}^n} \parallel BC, B \rightarrow C$), а вектор $\overline{a_{BC}^\tau}$ – перпендикулярно ланці BC ($\overline{a_{BC}^\tau} \perp BC$).

Дана система векторних рівнянь відповідає на плані прискорень наступній системі векторних сум:

$$\begin{cases} \overline{\pi b} = \overline{\pi a} + \overline{an_2} + \overline{n_2 b}; \\ \overline{\pi b} = \overline{\pi n_3} + \overline{n_3 b}. \end{cases}$$

За величиною нормальні прискорення $\overline{a_{BA}^n}$ і $\overline{a_{BC}^n}$ будуть дорівнювати:

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 l_{AB},$$

$$a_{BC}^n = \omega_2^2 l_{BC}.$$

що відповідає на плані векторам $\overline{an_2}$ і $\overline{\pi n_3}$, які мають відповідну довжину:

$$an_2 = a_{BA}^n / \mu_a, \text{ мм},$$

$$\pi n_3 = a_{BC}^n / \mu_a, \text{ мм}.$$

На плані від точки a відкладаємо паралельно AB у напрямі від B до A вектор $\overline{an_2}$ (рис. 4.67, в).

Далі через точку n_2 проводимо лінію, перпендикулярну AB .

Потім із полюса π відкладаємо паралельно BC у напрямі від B до C

вектор $\overline{\pi n_3}$ і через точку n_3 проводимо лінію, перпендикулярну BC .

Точка перетину b обмежує довжини невідомих векторів $\overline{n_2 b}$ та $\overline{n_3 b}$ і тим самим визначає величину і напрямок відповідних їм векторів прискорення $\overline{a_{BA}^\tau}$ і $\overline{a_{BC}^\tau}$.

З'єднавши на плані прискорень точки π і b , отримаємо вектор $\overline{\pi b}$, що відображає вектор прискорення $\overline{a_B}$.

Так як прискорення точки C дорівнює нулю, то відповідна точка c на плані також знаходиться в полюсі π .

Величини невідомих векторів прискорення будуть дорівнювати:

$$a_{BA}^\tau = n_2 b \cdot \mu_a,$$

$$a_{BC}^\tau = n_3 b \cdot \mu_a,$$

$$a_{BA} = ab \cdot \mu_a,$$

$$a_B = \pi b \cdot \mu_a.$$

Група Ассура II класу 3 виду.

Розглянемо групу Ассура II класу 3 виду (рис. 4.68, а).

Тут точка A кривошипа в будь-якому із його положень співпадає з фізичною точкою A_3 куліси 3.

Отже розташування точки A_3 на кулісі залежить від положення механізму.

Застосуємо метод планів для визначення швидкості і прискорення точки A_3 даної групи Ассура, якщо відома довжина l_{AB} ланки AB , швидкість $\overline{v_A}$ та прискорення $\overline{a_A}$ точки A .

Побудуємо спочатку план швидкостей. Для цього відкладемо на площині від полюса p в заданому масштабі μ_v вектор \overline{pa} , який відображає швидкість $\overline{v_A}$.

Векторне рівняння для визначення швидкості точки A_3 та відповідне рівняння на плані мають вигляд:

$$\overline{v_{A_3}} = \overline{v_A} + \overline{v_{A_3A}},$$

$$\overline{pa_3} = \overline{pa} + \overline{aa_3},$$

де $\overline{v_{A_3A}}$ – швидкість точки A_3 , що належить кулісному каменю 2, у русі відносно точки A вздовж куліси 3, $\overline{v_{A_3}}$ – швидкість точки A_3 , що належить кулісі 3, в обертальному русі навколо точки B .

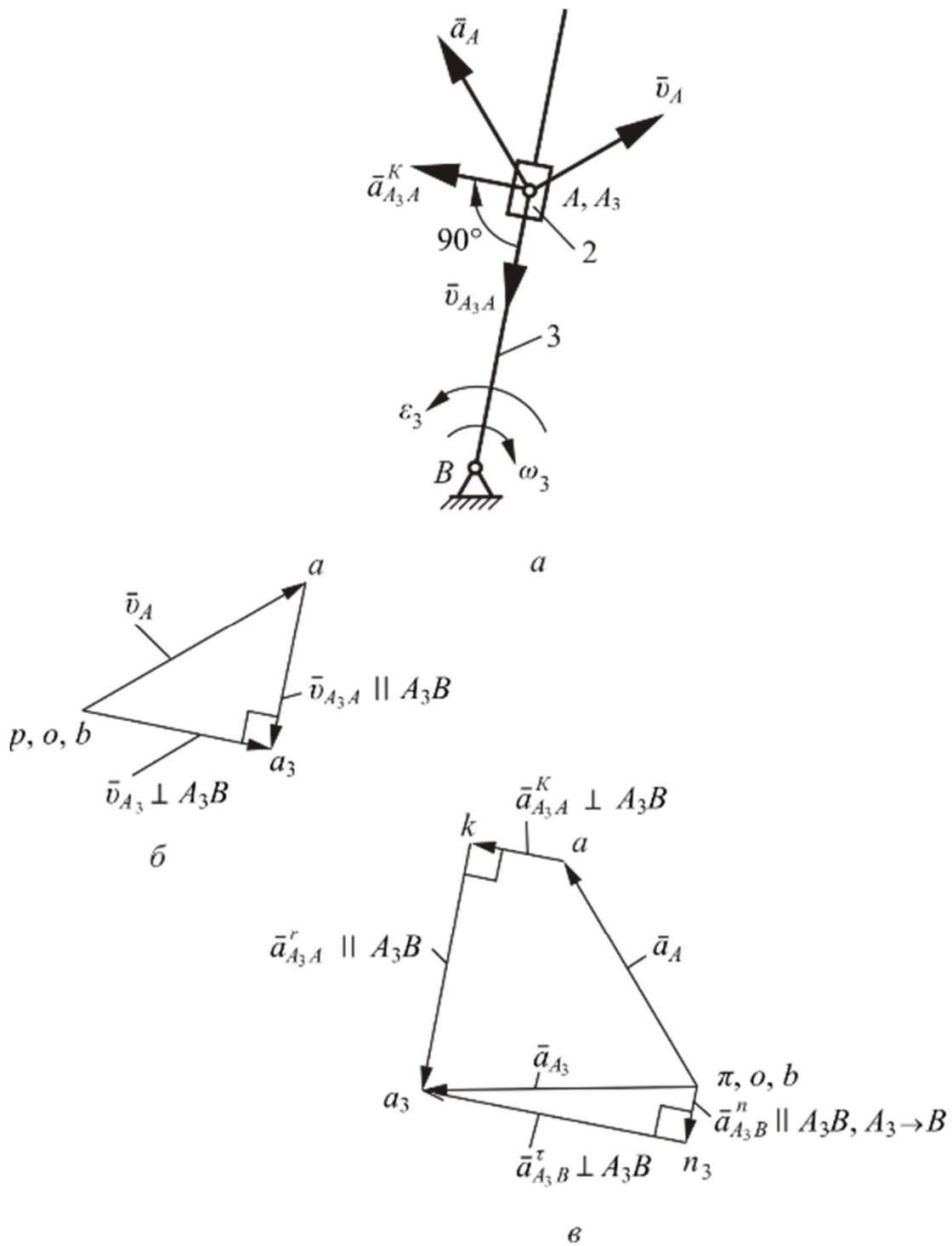


Рис. 4.68

Вектор \bar{v}_{A_3A} направлений вздовж A_3B ($\bar{v}_{A_3A} \parallel A_3B$), а вектор \bar{v}_B – перпендикулярно A_3B ($\bar{v}_{A_3} \perp A_3B$).

На плані швидкостей через точку a проведемо лінію, що паралельна

A_3B , а із полюса p – перпендикуляр до A_3B . Їх точка перетину b обмежує довжини векторів $\overline{pa_3}$ та $\overline{aa_3}$ плану і визначає відповідні вектори швидкостей $\overline{v_{A_3}}$ і $\overline{v_{A_3A}}$.

Величини швидкостей v_{A_3} і v_{A_3A} будуть дорівнювати:

$$v_{A_3} = pa_3 \cdot \mu_v,$$

$$v_{A_3A} = aa_3 \cdot \mu_v.$$

Далі побудуємо план прискорень. Для цього відкладемо на площині від полюса π в заданому масштабі μ_a вектор $\overline{\pi a}$, що відображає прискорення $\overline{a_A}$.

Прискорення точки A_3 визначається системою векторних рівнянь:

$$\begin{cases} \overline{a_{A_3}} = \overline{a_A} + \overline{a_{A_3A}^K} + \overline{a_{A_3A}^r}; \\ \overline{a_{A_3}} = \overline{a_{A_3B}^n} + \overline{a_{A_3B}^\tau}, \end{cases}$$

де $\overline{a_{A_3A}^K}, \overline{a_{A_3A}^r}$ – прискорення Кориоліса та прискорення точки A_3 , що належить кулісному каменю 2, у русі відносно точки A вздовж куліси 3; $\overline{a_{A_3B}^n}, \overline{a_{A_3B}^\tau}$ – нормальні і тангенціальні прискорення точки A_3 , що належить кулісі 3, в обертальному русі навколо точки B .

Напрямок вектора прискорення Кориоліса $\overline{a_{A_3A}^K}$ визначається поворотом вектора відносної швидкості $\overline{v_{A_3A}}$ на 90° у бік обертання куліси (рис. 4.68, в).

Вектор $\overline{a_{A_3A}^r}$ спрямований вздовж A_3B ($\overline{a_{A_3A}^r} \parallel A_3B$), вектор $\overline{a_{A_3B}^n}$ також спрямований вздовж A_3B від точки A_3 до точки B ($\overline{a_{A_3B}^n} \parallel A_3B, A_3 \rightarrow B$), а вектор $\overline{a_{A_3B}^\tau}$ – перпендикулярно до A_3B ($\overline{a_{A_3B}^\tau} \perp A_3B$).

Дана система векторних рівнянь відповідає на плані прискорень наступній системі векторних сум:

$$\begin{cases} \overline{\pi a_3} = \overline{\pi a} + \overline{a k} + \overline{k a_3}; \\ \overline{\pi a_3} = \overline{\pi n_3} + \overline{n_3 a_3}. \end{cases}$$

За величиною прискорення $\overline{a_{A_3A}^K}$ і $\overline{a_{A_3B}^n}$ будуть дорівнювати:

$$a_{A_3A}^K = 2\omega_3 v_{A_3A},$$

$$a_{A_3B}^n = \omega_3^2 l_{A_3B}.$$

що відповідає на плані векторам \overline{ak} і $\overline{\pi n_3}$, довжиною:

$$ak = a_{A_3A}^K / \mu_a, \text{ мм},$$

$$\pi n_3 = a_{A_3B}^n / \mu_a, \text{ мм}.$$

Від точки a на плані відкладаємо перпендикулярно A_3B у напрямку прискорення Коріоліса вектор \overline{ak} .

Далі через точку k проводимо лінію, паралельну A_3B .

Потім із полюса π відкладаємо паралельно A_3B у напрямку від A_3 до B вектор $\overline{\pi n_3}$ і через точку n_3 проводимо лінію, перпендикулярну A_3B .

Точка перетину b обмежує довжини невідомих векторів $\overline{ka_3}$ та $\overline{n_3 a_3}$ і тим самим визначає величину і напрямок відповідних їм векторів прискорення $\overline{a_{A_3A}^r}$ і $\overline{a_{A_3B}^r}$.

З'єднавши на плані прискорень точки π і a_3 , отримаємо вектор $\overline{\pi a_3}$, що відображає вектор прискорення $\overline{a_{A_3}}$.

Так як прискорення точки B дорівнює нулю, то відповідна точка b на плані також знаходиться в полюсі π .

Величини невідомих векторів прискорення будуть дорівнювати:

$$a_{A_3A}^r = ka_3 \cdot \mu_a,$$

$$a_{A_3B}^r = n_3 a_3 \cdot \mu_a,$$

$$a_{A_3} = \pi a_3 \cdot \mu_a.$$

17.7. Побудова планів швидкостей та прискорень механізмів II класу

Наведемо деякі приклади кінематичного дослідження плоских механізмів II класу методом побудови планів швидкостей та прискорень у деякому заданому їх положенні.

Приклад (рис. 4.69, а)

Розглянемо плоский механізм із сталим законом руху $\omega_1 = const$ кривошипа.

Розв'язання.

Побудову планів почнемо із початкової ланки l , потім перейдемо до групи Ассура 2 класу 1 виду, а потім – до групи Ассура 2 класу 2 виду.

Побудуємо спочатку план швидкостей (рис. 4.69, б).

Швидкість точки A кривошипа дорівнює:

$$v_A = \omega_1 l_{OA}, \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Масштаб плану швидкостей механізму:

$$\mu_v = v_A / pa, \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} / \text{мм},$$

де pa , мм, – довжина вектора \overline{pa} , який відображає в масштабі μ_v швидкість точки A кривошипа.

Від полюса p відкладаємо перпендикулярно OA в бік обертання кривошипа вектор \overline{pa} .

Швидкість точок O та C дорівнює нулю, тому відповідні точки o і c на плані співпадають із полюсом p .

Вважаємо, що центр мас S_1 кривошипа l знаходиться в точці O . Йому відповідає на плані точка s_1 , яка також співпадає з полюсом p .

Розглянемо групу Ассура 2 класу 1 виду і визначимо швидкість точки B .

Векторне рівняння для точки B та відповідне рівняння на плані:

$$\overline{v}_B = \overline{v}_A + \overline{v}_{BA},$$

$$\overline{pb} = \overline{pa} + \overline{ab},$$

де \overline{v}_{BA} – швидкість точки B , що належить шатуну 2, у відносному обертанні навколо точки A , \overline{v}_B – швидкість точки B , що належить коромислу 3, в обертальному русі навколо точки C .

Вектор \overline{v}_{BA} направлений перпендикулярно до ланки AB ($\overline{v}_{BA} \perp AB$), а вектор \overline{v}_B – перпендикулярно до ланки BC ($\overline{v}_B \perp BC$).

На плані швидкостей через точку a проведемо перпендикуляр до ланки AB , а із полюса p – перпендикуляр до ланки BC . Їх точка перетину b обмежує довжини векторів \overline{pb} та \overline{ab} плану і визначає відповідні вектори швидкостей \overline{v}_B і \overline{v}_{BA} .

Величини векторів швидкостей \overline{v}_B і \overline{v}_{BA} дорівнюють:

$$v_B = pb \cdot \mu_v,$$

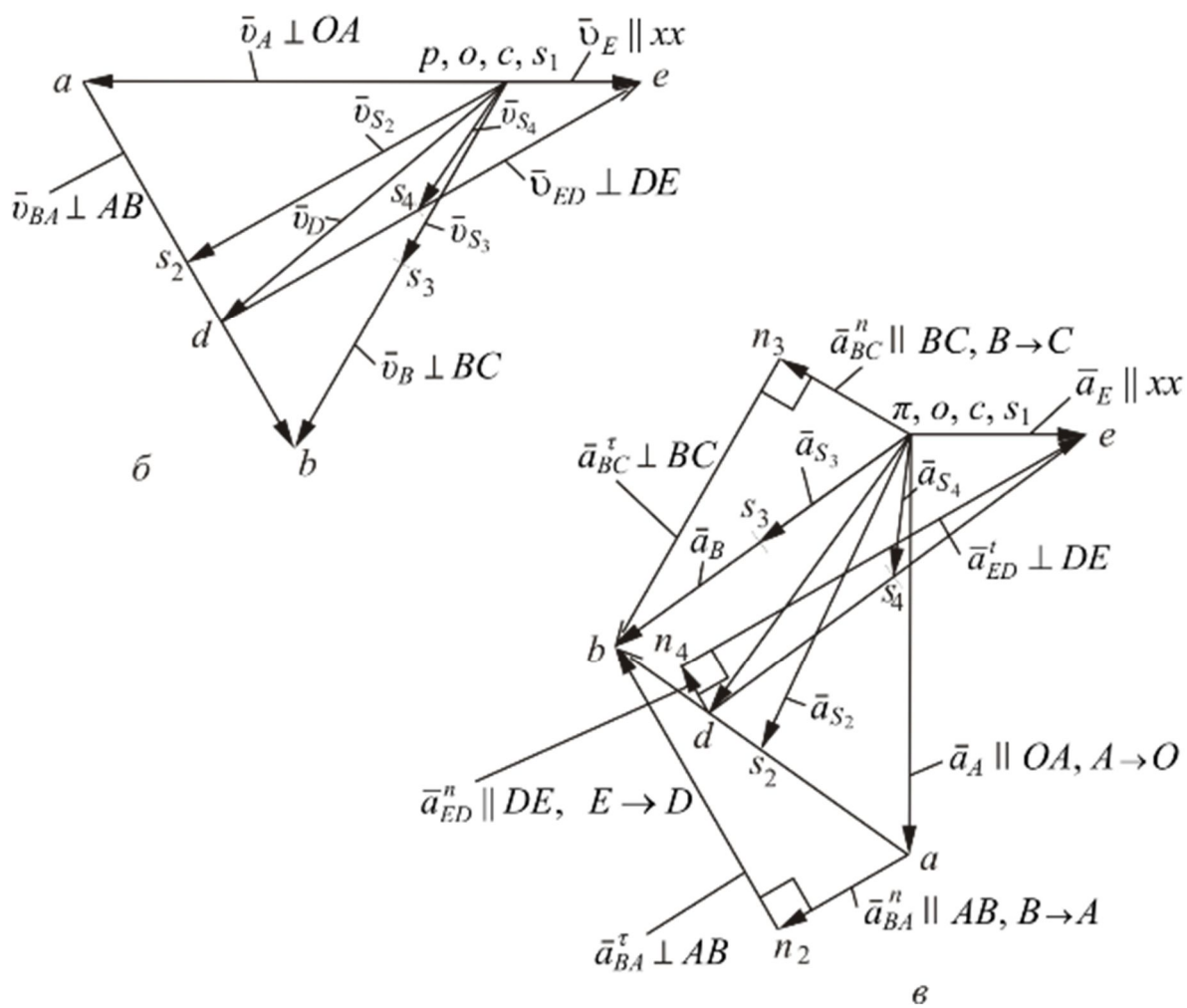
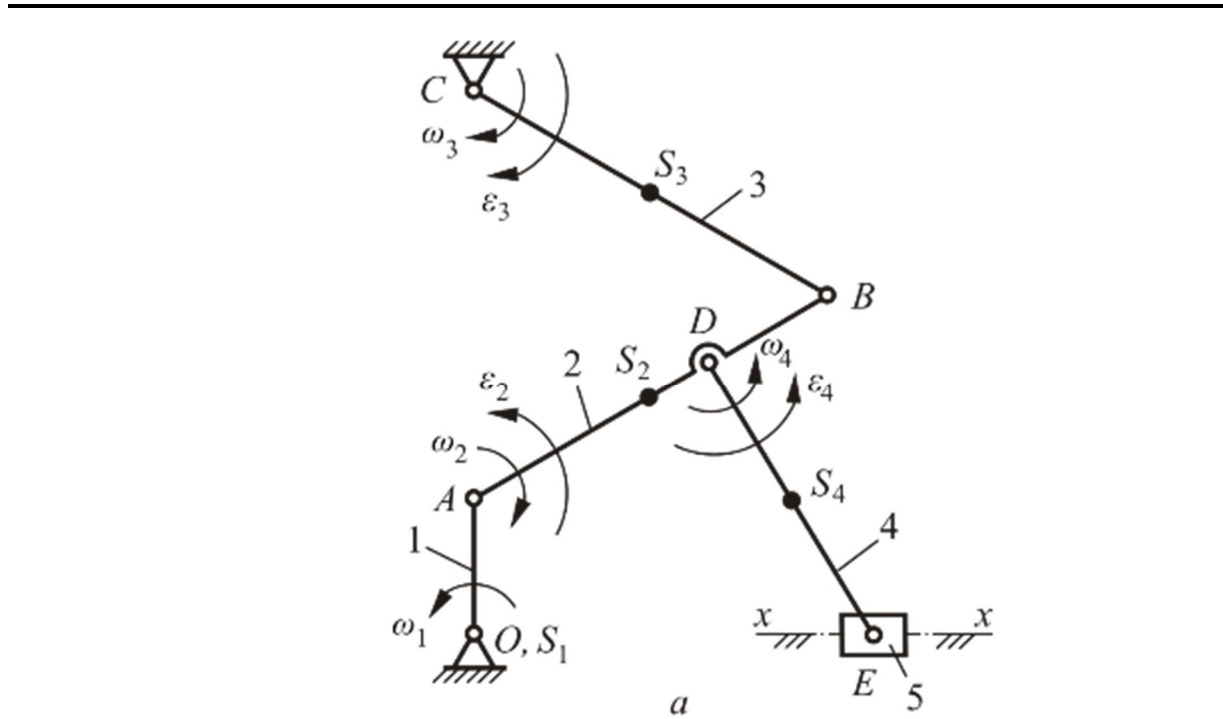


Рис. 4.69

$$v_{BA} = ab \cdot \mu_v.$$

Для визначення швидкості точки D і центра мас S_2 шатуна 2 та коромисла 3, застосуємо теорему подібності для планів швидкостей: *план швидкостей ланки подібний їй і повернутий відносно неї на 90° у бік миттєвого обертання.*

Згідно цієї теореми складемо пропорцію:

$$\frac{ad}{ab} = \frac{AD}{AB},$$

звідки

$$ad = ab \cdot AE / AB, \text{ мм.}$$

Аналогічно для центрів мас S_2 і S_3 шатуна 2 та коромисла 3:

$$as_2 = ab \cdot AS_2 / AB, \text{ мм.}$$

$$cs_3 = cb \cdot CS_3 / CB, \text{ мм.}$$

Сполучаємо полюс p на плані з точками d , s_2 і s_3 та отримуємо вектори \overline{pd} , $\overline{ps_2}$ і $\overline{ps_3}$ які відповідають векторам швидкостей \overline{v}_D , \overline{v}_{S_2} і \overline{v}_{S_3} , величиною:

$$v_D = pd \cdot \mu_v,$$

$$v_{S_2} = ps_2 \cdot \mu_v,$$

$$v_{S_3} = ps_3 \cdot \mu_v.$$

Розглянемо тепер групу Ассура 2 класу 2 виду і визначимо швидкість точки E .

Векторне рівняння для точки E та відповідне рівняння на плані буде:

$$\overline{v}_E = \overline{v}_D + \overline{v}_{ED},$$

$$\overline{pe} = \overline{pd} + \overline{de},$$

де \overline{v}_{ED} – швидкість точки E , що належить шатуна 4, у відносному обертанні навколо точки D , \overline{v}_E – швидкість точки E , що належить повзуну 5, у поступальному горизонтальному русі вздовж напрямної xx .

Вектор \overline{v}_{ED} спрямований перпендикулярно до ланки DE ($\overline{v}_{ED} \perp DE$), а вектор \overline{v}_E – вздовж напрямної xx ($\overline{v}_E \parallel xx$).

На плані швидкостей через точку d проведемо перпендикуляр до ланки DE , а із полюса p – горизонтальну лінію. Їх точка перетину b

обмежує довжини векторів \overline{pe} та \overline{de} плану і визначає відповідні вектори швидкостей \overline{v}_E і \overline{v}_{ED} .

Величини векторів швидкостей \overline{v}_E і \overline{v}_{ED} будуть дорівнювати:

$$v_E = pe \cdot \mu_v,$$

$$v_{ED} = de \cdot \mu_v.$$

Швидкість центра мас S_4 шатуна 4 буде:

$$v_{S_4} = ps_4 \cdot \mu_v,$$

де положення точки s_4 визначається за теоремою подібностей для планів швидкостей із співвідношення:

$$ds_4 = de \cdot DS_4 / DE, \text{ мм.}$$

Далі побудуємо план прискорень (рис. 4.69, в).

Прискорення точки A кривошипа, що обертається рівномірно ($\omega_1 = \text{const}$) буде дорівнювати:

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 l_{OA}, \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Масштаб плану прискорень механізму буде

$$\mu_a = a_A / \pi a, \text{ м} \cdot \text{с}^{-2} / \text{мм},$$

де πa , мм, – довжина вектора $\overline{\pi a}$, який відображає в масштабі μ_v швидкість точки A кривошипа.

Від полюса π відкладаємо паралельно OA , у напрямку від A до O вектор $\overline{\pi a}$ (рис. 4.69, в).

Прискорення точок O та C дорівнює нулю і відповідно точки o і c на плані співпадають з полюсом π .

Центр мас S_1 кривошипа 1 також знаходиться в точці O і відповідна точка s_1 на плані також співпадає з полюсом π .

Розглянемо групу Ассур 2 класу 1 виду і визначимо прискорення точки B .

Система векторних рівнянь для точки B та відповідні рівняння на плані мають вигляд:

$$\begin{cases} \overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau; \\ \overline{a}_B = \overline{a}_{BC}^n + \overline{a}_{BC}^\tau, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{\pi b} = \overline{\pi a} + \overline{a n_2} + \overline{n_2 b}; \\ \overline{\pi b} = \overline{\pi n_3} + \overline{n_3 b}, \end{cases}$$

де $\overline{a_{BA}^n}, \overline{a_{BA}^\tau}$ та $\overline{a_{BC}^n}, \overline{a_{BC}^\tau}$ – нормальні і тангенціальні прискорення точки B , що належить або шатуну 2, або коромислу 3, в обертальному русі відносно відповідних точок A або C .

Вектор $\overline{a_{BA}^n}$ спрямований вздовж ланки AB від точки B до точки A ($\overline{a_{BA}^n} \parallel AB, B \rightarrow A$), вектор $\overline{a_{BA}^\tau}$ – перпендикулярно ланці AB ($\overline{a_{BA}^\tau} \perp AB$), вектор $\overline{a_{BC}^n}$ спрямований вздовж ланки BC від точки B до точки C ($\overline{a_{BC}^n} \parallel BC, B \rightarrow C$), а вектор $\overline{a_{BC}^\tau}$ – перпендикулярно ланці BC ($\overline{a_{BC}^\tau} \perp BC$).

Величини нормальних прискорень $\overline{a_{BA}^n}$ і $\overline{a_{BC}^n}$:

$$a_{BA}^n = \omega_2^2 l_{AB},$$

$$a_{BC}^n = \omega_2^2 l_{BC}.$$

що відповідає на плані векторам $\overline{a n_2}$ і $\overline{\pi n_3}$, довжиною:

$$a n_2 = a_{BA}^n / \mu_a, \text{ мм},$$

$$\pi n_3 = a_{BC}^n / \mu_a, \text{ мм}.$$

На плані прискорень від точки a відкладаємо паралельно AB у напрямку від B до A вектор $\overline{a n_2}$ (рис. 4.69, в).

Далі через точку n_2 проводимо перпендикуляр до AB . Із полюса π відкладаємо паралельно BC у напрямку від B до C вектор $\overline{\pi n_3}$ і через точку n_3 проводимо лінію, перпендикулярну BC .

Точка перетину b , що обмежує довжини невідомих векторів $\overline{n_2 b}$ та $\overline{n_3 b}$, визначає величину і напрямок відповідних векторів прискорення $\overline{a_{BA}^\tau}$ і $\overline{a_{BC}^\tau}$.

З'єднавши на плані точки π і b , отримаємо вектор $\overline{\pi b}$, що і є прискоренням $\overline{a_B}$.

Так як прискорення точки C дорівнює нулю, то відповідна точка c на плані також знаходиться в полюсі π .

Величини невідомих векторів прискорення будуть дорівнювати:

$$a_{BA}^\tau = n_2 b \cdot \mu_a,$$

$$a_{BC}^\tau = n_3 b \cdot \mu_a,$$

$$a_{BA} = ab \cdot \mu_a,$$

$$a_B = \pi b \cdot \mu_a.$$

Для визначення прискорення точки D і центра мас S_2 шатуна 2 та коромисла 3, застосуємо теорему подібності для планів прискорень: *план прискорень ланки подібний їй і повернутий відносно неї*.

За цією теоремою знаходимо:

$$ad = ab \cdot AD / AB, \text{ мм.}$$

Аналогічно для центрів мас S_2 і S_3 шатуна 2 та коромисла 3:

$$as_2 = ab \cdot AS_2 / AB, \text{ мм.}$$

$$cs_3 = cb \cdot CS_3 / CB, \text{ мм.}$$

Сполучаємо полюс π на плані з точками d , s_2 і s_3 та отримуємо вектори $\overline{\pi d}$, $\overline{\pi s_2}$ і $\overline{\pi s_3}$ які відповідають векторам прискорень \bar{a}_D , \bar{a}_{S_2} і \bar{a}_{S_3} , величиною:

$$a_D = \pi d \cdot \mu_v,$$

$$a_{S_2} = \pi s_2 \cdot \mu_v,$$

$$a_{S_3} = \pi s_3 \cdot \mu_v.$$

Далі розглянемо групу Ассура 2 класу 2 виду і визначимо прискорення точки E .

Векторні рівняння для точки E та відповідні рівняння на плані будуть:

$$\bar{a}_E = \bar{a}_D + \bar{a}_{ED}^n + \bar{a}_{ED}^r,$$

$$\overline{\pi e} = \overline{\pi d} + \overline{d n_4} + \overline{n_4 e},$$

де $\bar{a}_{ED}^n, \bar{a}_{ED}^r$ – нормальне і дотичне прискорення точки E , що належить шатуну 4, у відносному обертанні навколо точки D , \bar{a}_E – прискорення точки E , що належить повзуну 5, у поступальному горизонтальному русі вздовж напрямної xx .

Вектор \bar{a}_{ED}^n спрямований вздовж ланки DE від точки E до точки D ($\bar{a}_{ED}^n \parallel DE, E \rightarrow D$), вектор \bar{a}_{ED}^r – перпендикулярно ланці DE ($\bar{a}_{ED}^r \perp DE$), а вектор \bar{a}_E спрямований вздовж напрямної xx ($\bar{a}_E \parallel xx$).

Крім цього величина нормального прискорення \bar{a}_{ED}^n буде:

$$a_{ED}^n = \omega_4^2 l_{DE},$$

що відповідає на плані вектору $\overline{dn_4}$, довжиною:

$$dn_4 = a_{ED}^n / \mu_a, \text{ мм.}$$

На плані прискорень від точки a відкладаємо паралельно DE у напрямі від E до D вектор $\overline{dn_4}$ (рис. 4.69, в).

Через точку n_4 проводимо перпендикуляр до DE , а із полюса π – горизонталь.

В результаті точка перетину b обмежить довжини невідомих векторів πe та $n_4 e$ і тим самим визначить величину і напрямки відповідних векторів прискорення $\overline{a_E}$ і $\overline{a_{ED}^\tau}$.

Величини прискорень $\overline{a_E}$, $\overline{a_{ED}^\tau}$ і $\overline{a_{ED}}$ будуть:

$$a_E = \pi e \cdot \mu_a,$$

$$a_{ED}^\tau = n_4 e \cdot \mu_a,$$

$$a_{ED} = de \cdot \mu_a.$$

Прискорення центра мас S_4 шатуна 4 буде дорівнювати:

$$a_{S_4} = \pi s_4 \cdot \mu_v,$$

де положення точки s_4 визначається за теоремою подібностей для планів прискорень із співвідношення:

$$ds_4 = de \cdot DS_4 / DE, \text{ мм.}$$

Приклад (рис. 4.70, а)

Розглянемо плоский важільний механізм кривошип якого обертається із сталою кутовою швидкістю $\omega_1 = \text{const}$.

Розв'язання.

Побудову планів тут почнемо з початкової ланки 1, потім перейдемо до групи Ассура 2 класу 3 виду, а потім – до групи Ассура 2 класу 2 виду.

Спочатку будуємо план швидкостей (рис. 4.70, б).

Швидкість точки A кривошипа:

$$v_A = \omega_1 l_{OA}, \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

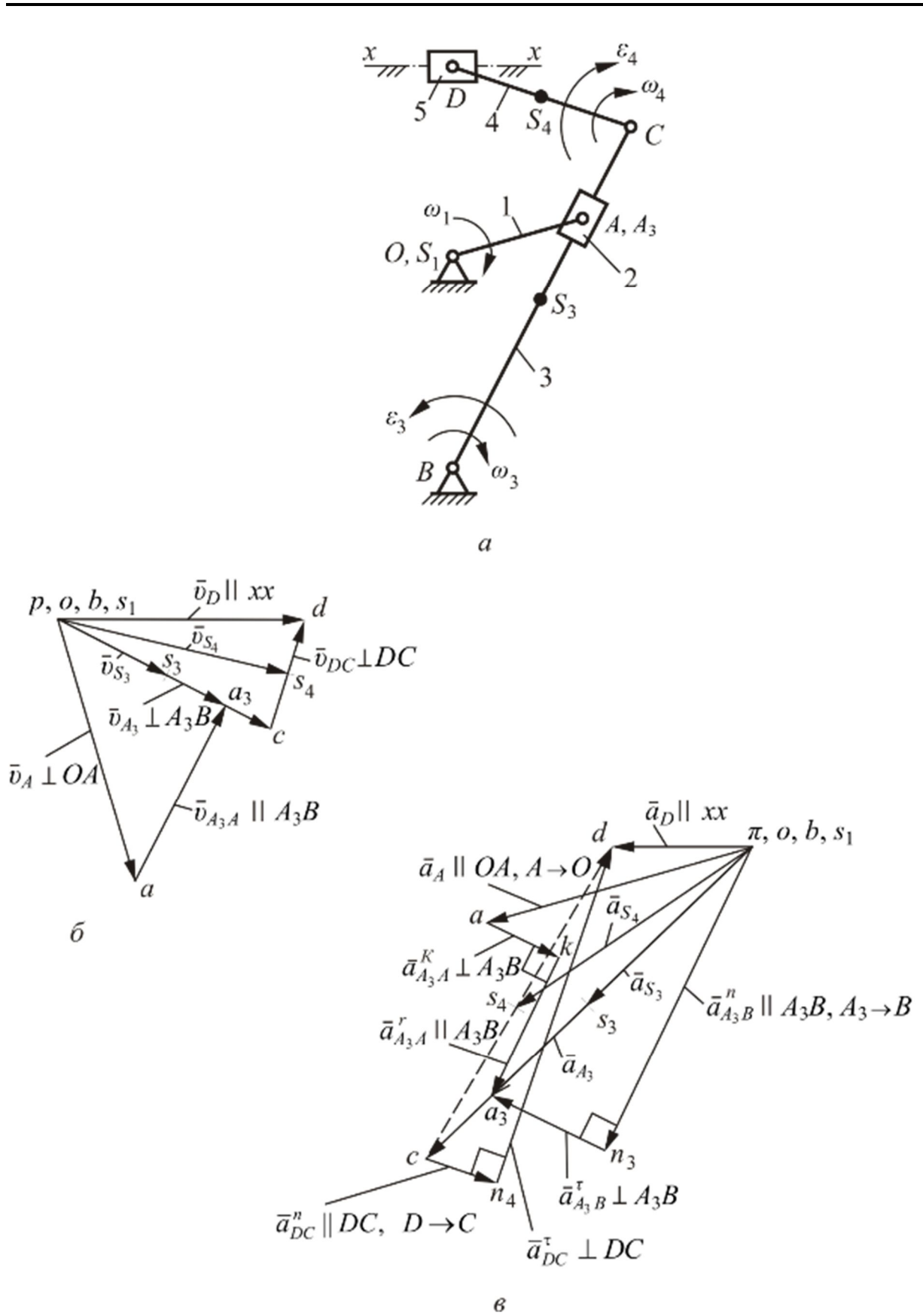


Рис. 4.70

Масштаб плану швидкостей механізму:

$$\mu_v = v_A / \overline{pa}, \text{ м} \cdot \text{с}^{-1} / \text{мм},$$

де \overline{pa} , мм, – довжина вектора \overline{pa} , що відображає в масштабі μ_v швидкість точки A кривошипа.

Від полюса p відкладаємо перпендикулярно OA в бік обертання кривошипа вектор \overline{pa} .

Швидкість точок O та B дорівнює нулю, тому відповідні точки o і b на плані співпадають із полюсом p .

Центр мас S_1 кривошипа 1 знаходиться в точці O . Йому відповідає на плані точка s_1 , яка також співпадає з полюсом p .

Розглянемо групу Ассура 2 класу 3 виду і визначимо швидкість точки A_3 на кулісі 3.

Векторне рівняння для точки A_3 та відповідне рівняння на плані будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} \overline{v}_{A_3} &= \overline{v}_A + \overline{v}_{A_3A}, \\ \overline{pa_3} &= \overline{pa} + \overline{aa_3}, \end{aligned}$$

де \overline{v}_{A_3A} – швидкість точки A_3 , що належить кулісному каменю 2, у русі відносно точки A вздовж куліси 3, \overline{v}_{A_3} – швидкість точки A_3 , що належить кулісі 3, в обертальному русі навколо точки B .

Вектор \overline{v}_{A_3A} спрямований вздовж A_3B ($\overline{v}_{A_3A} \parallel A_3B$), а вектор \overline{v}_B – перпендикулярно A_3B ($\overline{v}_B \perp A_3B$).

Тоді на плані швидкостей через точку a проведемо лінію, паралельну A_3B , а із полюса p – перпендикуляр до A_3B . Їх точка перетину b обмежить довжини векторів $\overline{pa_3}$ та $\overline{aa_3}$ плану і визначить відповідні вектори \overline{v}_{A_3} і \overline{v}_{A_3A} .

Величини векторів швидкостей \overline{v}_{A_3} і \overline{v}_{A_3A} будуть дорівнювати:

$$v_{A_3} = pa_3 \cdot \mu_v,$$

$$v_{A_3A} = aa_3 \cdot \mu_v.$$

Для визначення швидкості точки C і центра мас S_3 куліси 3 застосуємо теорему подібності для планів швидкостей.

За цією теоремою:

$$bc = ba_3 \cdot BC / BA_3, \text{ мм.}$$

$$bs_3 = ba_3 \cdot BS_3 / BA_3, \text{ мм.}$$

Сполучаємо полюс p на плані з точками c і s_3 та отримуємо вектори \overline{pc} і $\overline{ps_3}$ які відповідають векторам швидкостей \overline{v}_c і \overline{v}_{S_3} , величиною:

$$v_c = pc \cdot \mu_v,$$

$$v_{S_3} = ps_3 \cdot \mu_v.$$

Далі розглянемо групу Ассура 2 класу 2 виду і визначимо швидкість точки D .

Векторне рівняння для точки D та відповідне рівняння на плані буде:

$$\overline{v}_D = \overline{v}_C + \overline{v}_{DC},$$

$$\overline{pd} = \overline{pc} + \overline{cd},$$

де \overline{v}_{DC} – швидкість точки D , що належить шатуну 4, у відносному обертанні навколо точки C , \overline{v}_D – швидкість точки D , що належить повзуну 5, у поступальному горизонтальному русі вздовж напрямної xx .

Вектор \overline{v}_{DC} спрямований перпендикулярно до ланки DC ($\overline{v}_{DC} \perp DC$), а вектор \overline{v}_D – вздовж напрямної xx ($\overline{v}_D \parallel xx$).

На плані швидкостей через точку c проведемо перпендикуляр до ланки DC , а із полюса p – горизонтальну лінію. Їх точка перетину b обмежує довжини векторів \overline{pd} та \overline{cd} плану і визначає відповідні вектори швидкостей \overline{v}_D і \overline{v}_{DC} .

Величини векторів швидкостей \overline{v}_D і \overline{v}_{DC} будуть дорівнювати:

$$v_D = pd \cdot \mu_v,$$

$$v_{DC} = cd \cdot \mu_v.$$

Швидкість центра мас S_4 шатуна 4:

$$v_{S_4} = ps_4 \cdot \mu_v,$$

де положення точки S_4 за теоремою подібностей:

$$cs_4 = cd \cdot CS_4 / CD, \text{ мм.}$$

Побудуємо план прискорень (рис. 3.19, в).

Прискорення точки A кривошипа, який обертається рівномірно ($\omega_1 = \text{const}$) буде:

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 l_{OA}, \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$$

Масштаб плану прискорень механізму:

$$\mu_a = a_A / \overline{\pi a}, \text{ м} \cdot \text{с}^{-2} / \text{мм},$$

де $\overline{\pi a}$, мм, – довжина вектора $\overline{\pi a}$, який відображає в масштабі μ_a швидкість точки A кривошипа.

Від полюса π відкладаємо паралельно OA , у напрямку від A до O вектор $\overline{\pi a}$ (рис. 4.70, в).

Прискорення точок O та B дорівнює нулю і відповідно точки o і b на плані співпадають з полюсом π .

Центр мас S_1 кривошипа 1 також знаходиться в точці O і відповідна точка s_1 на плані співпадає з полюсом p .

Розглянемо групу Ассурі 2 класу 3 виду і визначимо прискорення точки A_3 куліси 3.

Система векторних рівнянь для точки A_3 та відповідні рівняння на плані мають вигляд:

$$\begin{cases} \overline{a}_{A_3} = \overline{a}_A + \overline{a}_{A_3A}^K + \overline{a}_{A_3A}^r; \\ \overline{a}_{A_3} = \overline{a}_{A_3B}^n + \overline{a}_{A_3B}^\tau, \\ \overline{\pi a_3} = \overline{\pi a} + \overline{a k} + \overline{k a_3}; \\ \overline{\pi a_3} = \overline{\pi n_3} + \overline{n_3 a_3}, \end{cases}$$

де $\overline{a}_{A_3A}^K, \overline{a}_{A_3A}^r$ – прискорення Коріоліса та прискорення точки A_3 , що належить кулісному каменю 2, у русі відносно точки A вздовж куліси 3; $\overline{a}_{A_3B}^n, \overline{a}_{A_3B}^\tau$ – нормальні і тангенціальні прискорення точки A_3 , що належить кулісі 3, в обертальному русі навколо точки B .

Напрямок вектора прискорення Коріоліса $\overline{a}_{A_3A}^K$ визначається поворотом вектора відносної швидкості \overline{v}_{A_3A} на 90° у бік обертання куліси. Вектор $\overline{a}_{A_3A}^r$ спрямований вздовж A_3B ($\overline{a}_{A_3A}^r \parallel A_3B$), вектор $\overline{a}_{A_3B}^n$ також спрямований вздовж A_3B від точки A_3 до точки B ($\overline{a}_{A_3B}^n \parallel A_3B, A_3 \rightarrow B$), а вектор $\overline{a}_{A_3B}^\tau$ – перпендикулярно до A_3B ($\overline{a}_{A_3B}^\tau \perp A_3B$).

За величиною прискорення $\overline{a}_{A_3A}^K$ і $\overline{a}_{A_3B}^n$ дорівнюють:

$$a_{A_3A}^K = 2\omega_3 v_{A_3A},$$

$$a_{A_3B}^n = \omega_3^2 l_{A_3B},$$

що відповідає на плані векторам \overline{an}_2 і $\overline{\pi n}_3$, довжиною:

$$ak = a_{A_3A}^K / \mu_a, \text{ мм},$$

$$\pi n_3 = a_{A_3B}^n / \mu_a, \text{ мм}.$$

На плані прискорень від точки a відкладаємо перпендикулярно A_3B у напрямку прискорення Коріоліса вектор \overline{ak} .

Далі через точку k проводимо лінію, паралельну A_3B .

Потім із полюса π відкладаємо паралельно A_3B у напрямку від A_3 до B вектор $\overline{\pi n}_3$, а через точку n_3 проводимо перпендикуляр до A_3B .

Точка перетину b обмежує довжини невідомих векторів \overline{ka}_3 та $\overline{n_3 a_3}$ і тим самим визначає величину і напрямок відповідних векторів прискорення $\overline{a}_{A_3A}^r$ і $\overline{a}_{A_3B}^r$.

З'єднавши на плані прискорень точки π і a_3 , отримаємо вектор $\overline{\pi a_3}$ – вектор прискоренню \overline{a}_{A_3} .

Величини отриманих векторів прискорення дорівнюють:

$$a_{A_3A}^r = ka_3 \cdot \mu_a,$$

$$a_{A_3B}^r = n_3 a_3 \cdot \mu_a,$$

$$a_{A_3} = \pi a_3 \cdot \mu_a.$$

Для визначення прискорення точки C і центра мас S_3 куліси 3 застосовуємо теорему подібності для планів прискорень.

Згідно теореми:

$$bc = ba_3 \cdot BC / BA_3, \text{ мм}.$$

$$bs_3 = ba_3 \cdot BS_3 / BA_3, \text{ мм}.$$

Сполучаємо полюс π на плані з точками c і s_3 та отримуємо вектори $\overline{\pi c}$ і $\overline{\pi s_3}$ які відповідають векторам прискорень \overline{a}_c і \overline{a}_{S_3} , величиною:

$$a_C = \pi c \cdot \mu_v, \quad a_{S_3} = \pi s_3 \cdot \mu_v$$

Далі розглянемо групу Ассура 2 класу 2 виду і визначимо прискорення точки D .

Векторне рівняння для точки D та відповідне рівняння на плані:

$$\begin{aligned} \bar{a}_D &= \bar{a}_C + \bar{a}_{DC}^n + \bar{a}_{DC}^\tau, \\ \overline{\pi d} &= \overline{\pi c} + \overline{cn_4} + \overline{n_4 d}, \end{aligned}$$

де $\bar{a}_{DC}^n, \bar{a}_{DC}^\tau$ – нормальне і дотичне прискорення точки D , що належить шатуну 4, у відносному обертанні навколо точки C , \bar{a}_D – прискорення точки D , що належить повзуну 5, у поступальному горизонтальному русі вздовж напрямної xx .

Вектор \bar{a}_{DC}^n спрямований вздовж ланки DC від точки D до точки C ($\bar{a}_{DC}^n \parallel DC, D \rightarrow C$), вектор \bar{a}_{DC}^τ буде перпендикулярний ланці DC ($\bar{a}_{DC}^\tau \perp DC$), а вектор \bar{a}_D спрямований вздовж напрямної xx ($\bar{a}_D \parallel xx$).

Крім цього величина нормального прискорення \bar{a}_{DC}^n буде:

$$a_{DC}^n = \omega_4^2 l_{DC},$$

що відповідає на плані вектору $\overline{cn_4}$, довжиною:

$$cn_4 = a_{DC}^n / \mu_a, \text{ мм.}$$

На плані прискорень від точки a відкладаємо паралельно DC у напрямі від D до C вектор $\overline{cn_4}$ (рис. 4.70, в). Через точку n_4 проводимо перпендикуляр до DC , а із полюса π – горизонталь.

В результаті точка перетину b обмежить довжини невідомих векторів $\overline{\pi d}$ та $\overline{n_4 d}$ і тим самим визначить величину і напрямки відповідних векторів прискорення \bar{a}_D і \bar{a}_{DC}^τ .

Величини прискорень $\bar{a}_D, \bar{a}_{DC}^\tau$ і \bar{a}_{DC} будуть:

$$a_D = \pi d \cdot \mu_a,$$

$$a_{DC}^\tau = n_4 d \cdot \mu_a,$$

$$a_{DC} = cd \cdot \mu_a.$$

Прискорення центра мас S_4 шатуна 4 буде дорівнювати:

$$a_{S_4} = \pi S_4 \cdot \mu_v,$$

де положення точки S_4 на плані прискорень визначається за теоремою подібностей:

$$cs_4 = cd \cdot CS_4 / CD, \text{ мм.}$$

17.8. Визначення кутових швидкостей і кутових прискорень ланок механізму

Кутові швидкості ω та кутові прискорення ε ланок є важливою складовою кінематичного розрахунку параметрів механізмів. Для їх визначення застосовують відомі з теоретичної механіки формули:

$$\omega = v / r,$$

$$\varepsilon = a^\tau / r,$$

де v , a^τ – лінійні швидкість та дотична складова прискорення точки, що рухається по коловій траєкторії радіусом r .

Напрямок кутової швидкості ω та кутового прискорення ε визначається напрямком відповідного лінійного вектора \bar{v} або \bar{a}^τ точки.

Розглянемо випадки визначення кутової швидкості і прискорення для груп Ассура II класу різних видів.

Група Ассура II класу 2 виду (рис. 4.66).

Для шатуна 2 цієї групи у відносному обертанні навколо точки A :

$$\omega_2 = v_{BA} / l_{AB}, \text{ с}^{-1},$$

$$\varepsilon_2 = a_{BA}^\tau / l_{AB}, \text{ с}^{-2},$$

де l_{AB} , m – довжина шатуна 2.

Напрямок ω_2 та ε_2 визначається напрямком відповідних їм векторів \bar{v}_{BA} і \bar{a}_{BA}^τ . В даному положенні групи (рис. 3.15, а) кутова швидкість ω_2 і кутове прискорення ε_2 спрямовані в один бік. Тому ланка 2 рухається прискорено.

Група Ассура II класу 1 виду (рис. 4.67).

Для шатуна 2 і коромисла 3 цієї групи в обертальному русі навколо відповідних точок A і C :

$$\omega_2 = v_{BA} / l_{AB}, \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_3 = v_B / l_{BC}, \quad c^{-1},$$

$$\varepsilon_2 = a_{BA}^\tau / l_{AB}, \quad c^{-2},$$

$$\varepsilon_3 = a_{BC}^\tau / l_{BC}, \quad c^{-2},$$

де l_{AB}, l_{BC} , m – довжина шатуна 2 і коромисла 3.

Напрямок ω_2 і ε_2 та ω_3 і ε_3 визначається напрямком відповідних векторів \bar{v}_{BA} і \bar{a}_{BA}^τ та \bar{v}_B і \bar{a}_{BC}^τ .

В даному положенні групи Ассура (рис. 3.16, а) ланки 2 і 3 рухаються прискорено.

Група Ассура II класу 3 виду (рис. 4.68).

Для куліси 3 цієї групи у відносному обертанні навколо точки B :

$$\omega_3 = v_{A_3} / l_{A_3B}, \quad c^{-1},$$

$$\varepsilon_3 = a_{A_3B}^\tau / l_{A_3B}, \quad c^{-2},$$

де l_{A_3B} , m – відстань між точками A_3 і B на кулісі 3.

Напрямок ω_3 та ε_3 визначається напрямком відповідних векторів \bar{v}_{A_3} і $\bar{a}_{A_3B}^\tau$.

В даному положенні групи Ассура (рис. 3.17, а) ланка 3 рухається сповільнено.

Визначимо також кутові швидкості і прискорення ланок механізмів II класу, які розглянуті у прикладах 3.1 та 3.2.

Приклад (рис. 4.69)

Для шатуна 2, коромисла 3 і шатуна 4 в обертальному русі навколо відповідних точок A , C і D заданого механізму:

$$\omega_2 = v_{BA} / l_{AB}, \quad c^{-1},$$

$$\omega_3 = v_B / l_{BC}, \quad c^{-1},$$

$$\omega_4 = v_{ED} / l_{DE}, \quad c^{-1},$$

$$\varepsilon_2 = a_{BA}^\tau / l_{AB}, \quad c^{-2},$$

$$\varepsilon_3 = a_{BC}^\tau / l_{BC}, \quad c^{-2},$$

$$\varepsilon_4 = a_{ED}^\tau / l_{DE}, \quad c^{-2},$$

де l_{AB}, l_{BC}, l_{ED} – довжина шатуна 2, коромисла 3 і шатуна 4 механізму.

Напрямок ω_2 і ε_2 , ω_3 і ε_3 та ω_4 і ε_4 визначається напрямком відповідних векторів \bar{v}_{BA} і \bar{a}_{BA}^r , \bar{v}_B і \bar{a}_{BC}^r та \bar{v}_{ED} і \bar{a}_{ED}^r .

Аналіз кутових швидкостей і прискорень ланок механізму показує, що в даному положенні (рис. 3.18, а) ланка 2 прискорюється, а ланка 3 і 4 рухається сповільнено.

Приклад (рис. 4.70)

Для куліси 3 і шатуна 4 в обертальному русі навколо відповідних точок B і C заданого механізму:

$$\omega_3 = v_{A_3} / l_{A_3B}, \quad c^{-1},$$

$$\omega_4 = v_{DC} / l_{DC}, \quad c^{-1},$$

$$\varepsilon_3 = a_{A_3B}^r / l_{A_3B}, \quad c^{-2},$$

$$\varepsilon_4 = a_{DC}^r / l_{DC}, \quad c^{-2},$$

де l_{A_3B} , m – відстань між точками A_3 і B на кулісі 3; l_{DC} , m – довжина шатуна 4 механізму.

Напрямок ω_3 і ε_3 та ω_4 і ε_4 визначається напрямком відповідних векторів \bar{v}_{A_3} і $\bar{a}_{A_3B}^r$ та \bar{v}_{DC} і \bar{a}_{DC}^r .

Видно, що в даному положенні механізму (рис. 3.19, а) ланка 3 сповільнюється, а ланка 4 рухається прискорено.

Запитання для самоконтролю

16. Назвіть основні задачі кінематичного аналізу механізмів.
17. У якій послідовності проводиться кінематичний аналіз механізмів?
18. Які методи кінематичного дослідження механізмів Ви знаєте?
19. Які існують графічні методи кінематичного аналізу?
20. Які переваги і недоліки графічних методів дослідження механізмів?
21. Дайте загальне визначення масштабного коефіцієнта.
22. Що називають планом положень механізму?
23. В чому полягає метод засічок?
24. Що таке шатунна крива?
25. Як визначити крайні положення механізмів?
26. Наведіть приклад побудови плану положень плоского важільного механізму.

-
27. Дайте визначення кінематичної діаграми.
 28. Які види кінематичних діаграм Ви знаєте?
 29. Назвіть методи графічного диференціювання, в чому полягає їх принцип?
 30. Як розрахувати масштаб при графічному диференціюванні?
 31. В чому полягає графічне інтегрування методом хорд?
 32. Як побудувати графічно функцію положення механізму і її похідні?
 33. В чому полягає графоаналітичний метод кінематичного дослідження механізмів? Які його переваги і недоліки?
 34. Що називають планом швидкостей і прискорень механізму?
 35. Як визначається масштаб плану швидкостей і плану прискорень?
 36. Запишіть векторні рівняння швидкості і прискорення точки для плоскопаралельного руху.
 37. Як визначити величину і напрямок коріолісового прискорення?
 38. Як визначити величину і напрямок швидкостей і прискорень з відповідних планів?
 39. Сформулюйте теорему подібностей для плану швидкостей і прискорень.
 40. Як визначити величину та напрямок кутових швидкостей і кутових прискорень ланок?

РОЗДІЛ 18. АНАЛІТИЧНІ І ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ МЕТОДИ КІНЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ

18.1. Аналітична кінематика важільних механізмів

Широке розповсюдження електронно-обчислювальної техніки і комп'ютеризація наукових і інженерних розрахунків сприяє все більшому застосуванню саме аналітичних методів кінематичного дослідження механізмів.

Якщо розглядати загальні методи аналітичних розрахунків для будь-яких механізмів, то із великої їх кількості можна, по-перше, безпосереднього використати відомі тригонометричні і кінематичні формули з теоретичної механіки, по-друге, застосувати метод замкнених векторних контурів або метод перетворення координат із використанням теорії матриць.

У першому випадку аналітичні розрахунки базуються на використанні теорем і законів руху ланок механізмів, як твердих тіл, відомих із теоретичної механіки. Для встановлення аналітичних кінематичних залежностей переміщень, швидкостей і прискорень тут використовують тригонометричні залежності положень ланок від кута їх повороту або зміщення від початкової точки та їх похідні як функції швидкостей і прискорень. Даний метод аналітичного дослідження механізмів громіздкий і для складних плоских механізмів, а особливо для просторових, не завжди може привести до потрібних результатів за точністю і зручністю розрахунків.

Інший метод – метод замкнених векторних контурів базується на застосуванні аналітичних кінематичних залежностей, які можна отримати, якщо представити кінематичну схему механізму у вигляді замкнених векторних контурів, які утворюють ланки механізму. Умова замкненості контуру дає достатню кількість рівнянь для визначення невідомих кінематичних параметрів. При цьому спочатку знаходять аналітичні залежності переміщень, а потім шляхом диференціювання – залежності швидкостей і прискорень.

Треба відмітити, що метод замкнених векторних контурів звичайно застосовують при дослідженнях плоских механізмів в силу того, що отримати аналітичні залежності для просторових контурів значно складніше.

Метод перетворення координат базується на використанні систем рівнянь визначення положень (координат) рухомих ланок механізму і характерних їх точок при переході від рухомої системи координат, в якій

знаходиться рухома ланка до нерухомої, яка зв'язана з нерухомою ланкою – стояком. Визначення швидкостей і прискорень тут проводиться також шляхом подальшого диференціювання знайдених рівнянь положень ланок і їх характерних точок. Зазначимо, що метод перетворення координат зручно використовувати при аналітичних дослідженнях кінематики, як плоских, так і просторових механізмів. Це пов'язано з тим, що даний метод дає можливість визначати кінематичні параметри звичайним алгебричним способом із застосуванням матричної форми запису рівнянь перетворення координат. При цьому перевагою застосування матриць є можливість застосування формул їх множення.

Треба зауважити, що при проведенні аналітичних досліджень механізмів будь-якими методами, мають бути встановлені аналітичні закони зміни положень, швидкостей і прискорень ланок і характерних їх точок механізму в залежності від закону руху його вхідної (початкової) ланки.

18.2. Функція положень та кінематичні передатні функції механізму

До числа кінематичних характеристик механізмів також відносяться ті, що не залежать від закону руху початкових ланок (часу), а визначаються лише будовою механізму, розмірами його ланок і, в загальному випадку, залежать від узагальнених координат механізму. Такими функціями являються функції положень та кінематичні передатні функції.

Досить часто при проектуванні механізмів дійсний закон руху початкової ланки вдається визначити лише на наступних стадіях проектування, після динамічного аналізу. У таких випадках вводять кінематичні передатні функції, що не залежать від часу. А кінематичне дослідження виконується в два етапи – спочатку встановлюються залежності кінематичних параметрів ланок від узагальненої координати, тобто визначаються відносні функції (це функції положення та кінематичні передатні функції механізму). І тільки після визначення закону руху початкової ланки знаходять залежності кінематичних параметрів вихідних і проміжних ланок від часу.

18.2.1. Функція положень механізму

Функцією положень будь-якої ланки механізму називають залежність координати, що відображає положення даної ланки, від узагальненої координати і геометричних параметрів механізму.

Функція положень вихідної ланки є функцією положення механізму. Тобто в загальному вигляді це залежність $\varphi_n = \varphi_n(\varphi_1)$ при обертальному русі n -ої ланки або при поступальному русі n -ої ланки – це залежність $s_n = s_n(\varphi_1)$.

Треба зазначити, що в загальному випадку механізму з декількома ступенями вільності функція положень механізму є функцією усіх узагальнених координат

$$\varphi_n = \varphi_n(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_S) \quad (4.21)$$

де $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_S$ – узагальнені координати механізму.

Отже, функція положень є геометричною характеристикою механізму, яка не залежить від закону руху початкової ланки (часу, абсолютних значень швидкостей ланок і т.ін.) і визначається лише структурною схемою механізму та розмірами його ланок.

Також зауважимо, що функція положень навіть для найпростіших важільних механізмів виражається складними рівняннями. Однак одержати її у графічній формі розміткою траєкторій неважко.

18.2.2. Перша та друга кінематичні передатні функції механізму

Нехай ми маємо функції положень механізму у вигляді $\varphi_n = \varphi_n(\varphi_1)$, $s_n = s_n(\varphi_1)$.

Продиференціюємо двічі ці функції положень по узагальненій координаті і отримаємо вирази

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_n(\varphi_1)}{d\varphi_1} &= \varphi'_n, & \frac{ds_n(s_1)}{d\varphi_1} &= s'_n, \\ \frac{d^2\varphi_n(\varphi_1)}{d\varphi_1^2} &= \varphi''_n, & \frac{d^2s_n(s_1)}{d\varphi_1^2} &= s''_n. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Отримані функції φ'_n , s'_n , φ''_n , s''_n є геометричними характеристиками n -ої ланки механізму і називаються, відповідно, *першою та другою передатними функціями механізму*.

Таким чином, s'_n – це кінематична передатна функція швидкості точки (аналог швидкості); φ'_n – це кінематична передатна функція кутової швидкості ланки (аналог кутової швидкості або передатне відношення); s''_n , φ''_n – це відповідно передатні функції лінійного або кутового прискорення (аналог прискорення точки або аналог прискорення ланки).

Встановимо зв'язок між вказаними геометричними та кінематичними характеристиками механізму з одним ступенем рухомості при обертальному русі n -ої ланки.

Для цього продиференціюємо функцію положення за часом

$$\omega_n = \frac{d\varphi_n(\varphi_1)}{dt} = \frac{d\varphi_n(\varphi_1)}{d\varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} = \varphi'_n \cdot \omega_1,$$

тобто,

$$\omega_n = \omega_1 \cdot \varphi'_n = \omega_1 \cdot u_{n1}, \quad (4.23)$$

де ω_1 , ω_n – кутові швидкості відповідно ланок 1 та n ; $u_{n1} = \frac{\omega_n}{\omega_1}$ – відношення кутових швидкостей ланок 1 та n .

Як бачимо, функція $\varphi'_n = \frac{d\varphi_n(\varphi_1)}{d\varphi_1} = \frac{d\varphi_n(\varphi_1)}{d\varphi_1} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{\omega_n}{\omega_1}$ є відношенням миттєвих швидкостей ланок; в загальному випадку її називають передатною функцією.

Відношення кутових швидкостей ланок 1 та n : $u_{n1} = \frac{\omega_n}{\omega_1}$ називається

передатним відношенням. Звичайно передатне відношення, позначається як u_{n1} , з цифровими індексами, що відповідають номерам розглядуваних ланок. Передатне відношення є величиною безрозмірною. Це одна з основних характеристик механізмів передач.

За допомогою другої похідної функції положення за часом визначимо кутові прискорення ланок механізму

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \frac{d^2\varphi_n(\varphi_1)}{dt^2} = \frac{d\omega_n}{d\varphi_1} = \frac{d}{dt}(\omega_1 \cdot \varphi'_n) = \\ &= \omega_1 \frac{\varphi'_n}{d\varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} + \varphi'_n \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = \omega_1^2 \cdot \varphi''_n + \varphi'_n \cdot \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (4.24)$$

При цьому, якщо кутова швидкість початкової ланки є стала величина: $\omega_1 = const$, то $\varepsilon_1 = 0$, а $\varepsilon_n = \varphi''_n \cdot \omega_1^2$.

Таким чином, дійсна кутова швидкість n -ої ланки механізму дорівнює добутку кутової швидкості ω_1 початкової ланки на першу передатну функцію (передатне відношення u_{n1}); помноживши другу передатну функцію на ω_1^2 при $\omega_1 = const$, отримаємо, відповідно, прискорення n -ої ланки.

Фізичний зміст передатних функцій наступний: перша передатна функція $\varphi'_n = u_{1n}$ та друга φ''_n являють собою відповідно швидкість $\omega_n = \varphi'_n \cdot 1$ та прискорення $\varepsilon_n = \varphi''_n \cdot 1^2$ n -ої ланки механізму за умови, що $\omega_1 = 1$. Тому зазначені передатні функції називають ще *аналогами швидкостей та прискорень*.

При поступальному русі ланки співвідношення будуть аналогічними:

$$v_n = \frac{ds_n(\varphi_1)}{dt} = \frac{ds_n(\varphi_1)}{d\varphi_1} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} = s'_n \cdot \omega_1, \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{dv_n}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega_1 \cdot s'_n) = \\ &= \omega_1 \frac{ds'_n}{dt} \cdot \frac{d\varphi_1}{d\varphi_1} + s'_n \cdot \frac{d\omega_1}{dt} = s''_n \cdot \omega_1^2 + \varepsilon_1 \cdot s'_n. \end{aligned} \quad (4.26)$$

У випадку, коли $\omega_1 = const$, $\varepsilon_1 = 0$, то $a_n = s''_n \cdot \omega_1^2$.

Передатні функції швидкості та прискорення мають розмірність довжини, кутові передатні функції є безрозмірними величинами.

Оскільки для даної кінематичної схеми механізму передатні функції залежать лише від узагальненої координати і не залежать від закону руху початкової ланки, то кінематичне дослідження можна виконувати суто геометричними методами. Передатні функції дозволяють легко порівнювати закони руху ланок, а отже і знаходити оптимальні параметри механізму за заданими умовами роботи. Кінематичне дослідження за допомогою передатних функцій є ефективним у випадку кількох можливих рухів початкової ланки.

Якщо при проектуванні чи дослідженні механізму задана чи визначена функція положення або одна з передатних функцій механізму, то інші залежності можуть бути встановлені диференціюванням чи інтегруванням як числовими, так і графічними способами.

18.3. Аналітична кінематика елементарних плоских важільних механізмів

Спочатку для аналітичного визначення кінематичних параметрів механізмів застосуємо кінематичні формули, які відомі з курсу теоретичної механіки і можуть бути отримані для ланок механізмів, як механічної системи твердих тіл.

Для цього розглянемо кінематичні схеми деяких плоских елементарних важільних механізмів.

Аксіальний кривошипно-повзунний механізм.

Визначимо кінематичні параметри аксіального (незміщеного) кривошипно-повзунного механізму, який обертається із кутовою швидкістю ω_1 (рис. 4.71).

При цьому будемо вважати заданими кут повороту φ_1 кривошипа 1 і лінійні розміри ланок l_1 і l_2 .

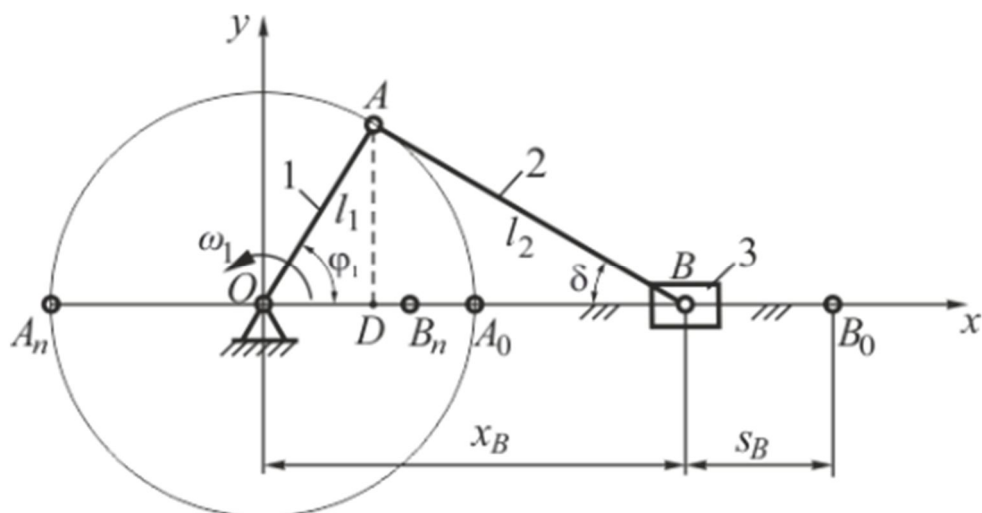


Рис. 4.71

Важливим кінематичними характеристиками даного механізму є закони зміни переміщення, швидкості і прискорення точки B повзуна 3, які ми і знайдемо.

Для знаходження цих кінематичних характеристик виберемо систему координатних осей O, x, y таким чином, щоб положення точки B можна було визначати за координатою s_B , яка відраховується від крайнього правого положення повзуна 3 (точки B_0) і знаходиться від осі обертання кривошипа O на відстані $x_B = (OA_0 + A_0B_0) - BB_0 = (l_1 + l_2) - s_B$ (рис. 4.71).

Таким чином

$$s_B = (l_1 + l_2) - x_B. \quad (4.27)$$

Спочатку визначимо аналітичний закон зміни s_B положення точки B повзуна 3 при його переміщенні його від крайнього правого положення B_0 до крайнього лівого положення B_n і навпаки. При цьому значення положення точки B повзуна буде змінюватись у межах від 0 до $(l_1 + l_2)$ і знову до 0.

Опустимо перпендикуляр із точки A на вісь x і запишемо довжину

x_B як

$$x_B = l_{OD} + l_{DB},$$

Тоді переміщення s_B визначається виразом

$$s_B = (l_1 + l_2) - (l_{OD} + l_{DB}) = (l_1 + l_2) - l_1 \cos \varphi_1 - l_2 \cos \delta, \quad (4.28)$$

де φ_1 – кут повороту кривошипа l ; δ – кут між миттєвим напрямом лінії AB і віссю x (кут нахилу шатуна).

Кут нахилу шатуна можна знайти із $\triangle OAB$:

$$\sin \delta = \frac{l_1 \sin \varphi_1}{l_2},$$

або

$$\sin \delta = \frac{1}{k} \sin \varphi_1, \quad (4.29)$$

де $k = \frac{l_2}{l_1}$ – коефіцієнт співвідношення між довжиною шатуна і кривошипа (для стаціонарних поршневих двигунів $k \approx 5$, в автомобільних двигунах $k \approx 4$).

Чим менше величина k , тим менші габарити і вага двигуна при однаковому значенні довжини кривошипа. З іншого боку, із зменшенням коефіцієнта k збільшується кут нахилу шатуна δ і збільшується тиск на стінки поршня циліндра. Тому зменшення величини k веде до більшого зносу двигуна і зниження його коефіцієнта корисної дії.

Отже кут нахилу шатуна δ у будь якому положенні даного механізму можна визначити як

$$\delta = \arcsin \frac{1}{k} \sin \varphi_1, \quad (4.30)$$

Представивши l_2 у вигляді прямопропорційної залежності

$$l_2 = k \cdot l_1,$$

із (4.8) отримаємо

$$s_B = l_1 (k + 1 - \cos \varphi_1 - k \cos \delta). \quad (4.31)$$

Для визначення швидкості v_B точки B повзуна продиференціюємо попередній вираз за часом:

$$v_B = \frac{ds}{dt} = l_1 \left(\omega_1 \sin \varphi_1 - k \sin \delta \frac{d\delta}{dt} \right). \quad (4.32)$$

Для визначення кутової швидкості ω_2 шатуна 2 продиференціюємо ліву і праву частини виразу (4.29):

$$\cos \delta \cdot \frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{k} \cos \varphi_1 \cdot \frac{d\varphi_1}{dt},$$

або

$$\cos \delta \cdot \frac{d\delta}{dt} = \frac{\omega_1}{k} \cos \varphi_1,$$

звідки

$$\omega_2 = \frac{d\delta}{dt} = \cos \delta = \frac{\omega_1 \cos \varphi_1}{k \cos \delta}, \quad (4.33)$$

Підставляючи цей вираз у (4.11), отримаємо

$$v_B = l_1 \cdot \omega_1 \left(\sin \varphi_1 + \sin \delta \frac{\cos \varphi_1}{\cos \delta} \right) = l_1 \cdot \omega_1 \left(\frac{\sin(\varphi_1 + \delta)}{\cos \delta} \right). \quad (4.34)$$

Для визначення прискорення a_B точки B повзуна, запишемо попередній вираз у вигляді:

$$v_B = l_1 \cdot \omega_1 (\sin \varphi_1 + \operatorname{tg} \delta \cos \varphi_1).$$

При умові, що $\omega_1 = \text{const}$, після диференціювання за часом знаходимо:

$$a_B = \frac{dv}{dt} = l_1 \cdot \omega_1 \left(\cos \varphi_1 \cdot \omega_1 - \operatorname{tg} \delta \sin \varphi_1 \cdot \omega_1 + \frac{\cos \varphi_1}{\cos^2 \delta} \cdot \frac{d\delta}{dt} \right),$$

або із врахуванням (4.12), маємо:

$$a_B = l_1 \cdot \omega_1^2 \frac{1}{\cos \delta} \left(\cos(\varphi_1 + \delta) + \frac{\cos^2 \varphi_1}{k \cos^2 \delta} \right), \quad (4.35)$$

Треба зазначити, що при підрахунках переміщень, швидкостей і прискорень точки B повзуна за формулами (4.31), (4.34) і (4.35) крім кута повороту кривошипа φ_1 необхідно також знайти кут нахилу шатуна δ згідно із виразом (4.30). Але величина δ теж залежить від величини φ_1 , а тому в кінцевому варіанті переміщення, швидкості і прискорення залежать тільки від кута повороту кривошипа.

У багатьох випадках положення, швидкість і прискорення точки B

повзуна зручно визначати за наближеними формулами.

Для отримання таких наближених формул знайдемо із (4.29):

$$\cos \delta = \sqrt{1 - \sin^2 \delta} = \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \varphi_1}. \quad (4.36)$$

Якщо підставити даний вираз у (4.31), отримаємо:

$$s_B = l_1 \left(k + 1 - \cos \varphi_1 - k \sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \varphi_1} \right). \quad (4.37)$$

Вираз кореня (4.36), що входить в (4.37), можна розкласти в ряд за формулою бінома Ньютона при $n = \frac{1}{2}$. В результаті будемо мати:

$$\cos \delta = \left(1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \varphi_1 \right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2k^2} \sin^2 \varphi_1 - \frac{1}{8k^4} \sin^4 \varphi_1 - \frac{1}{16k^2} \sin^6 \varphi_1 - \dots$$

Із врахуванням того, що

$$\sin^2 \varphi_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi_1;$$

$$\sin^4 \varphi_1 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi_1 + \frac{1}{8} \cos 4\varphi_1;$$

$$\sin^6 \varphi_1 = \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2\varphi_1 + \frac{3}{16} \cos 4\varphi_1 - \frac{1}{32} \cos 6\varphi_1;$$

.....

остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned} \cos \delta &= \left(1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \varphi_1 \right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{4k^2} + \frac{1}{4k^2} \cos 2\varphi_1 - \frac{3}{64k^4} + \frac{1}{16k^4} \cos 2\varphi_1 - \\ &- \frac{1}{64k^4} \cos 4\varphi_1 - \frac{5}{256k^6} + \frac{15}{512k^6} \cos 2\varphi_1 - \frac{3}{256k^6} \cos 4\varphi_1 + \\ &+ \frac{1}{512k^6} \cos 6\varphi_1 - \dots = \left(1 - \frac{1}{4k^2} - \frac{3}{64k^4} - \frac{5}{256k^6} - \dots \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{4k^2} + \frac{1}{16k^4} + \frac{15}{512k^6} + \dots \right) \cos 2\varphi_1 - \left(\frac{1}{64k^4} + \frac{3}{256k^6} + \dots \right) \cos 4\varphi_1 + \\ &+ \left(\frac{1}{512k^6} + \dots \right) \cos 6\varphi_1 - \dots \end{aligned}$$

Найдене наближене значення кореня (4.36) підставимо у формулу визначення переміщення точки B повзуна (4.37):

$$s_B = l_1 \left[\left(1 + \frac{1}{4k} + \frac{3}{64k^3} + \frac{5}{256k^5} + \dots \right) - \cos \varphi_1 - \left(\frac{1}{4k} + \frac{1}{16k^3} + \frac{15}{512k^5} + \dots \right) \cos 2\varphi + \left(\frac{1}{64k^3} + \frac{3}{256k^5} + \dots \right) \cos 4\varphi_1 - \left(\frac{1}{512k^5} + \dots \right) \cos 6\varphi_1 \dots \right].$$

Таким чином, переміщення координати точки B повзуна може бути представлена у вигляді нескінченного ряду:

$$s_B = l_1 (A_0 + A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos 2\varphi_1 + A_4 \cos 4\varphi_1 + A_6 \cos 6\varphi_1 + \dots), \quad (4.38)$$

в якому кожен член (окрім члена $A_1 = -1$) також являє собою нескінчений ряд:

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 + \frac{1}{4k} + \frac{3}{64k^3} + \frac{5}{256k^5} + \dots; \\ A_2 &= -\left(\frac{1}{4k} + \frac{1}{16k^3} + \frac{15}{512k^5} + \dots \right); \\ A_4 &= \frac{1}{64k^3} + \frac{3}{256k^5} + \dots; \\ A_6 &= -\left(\frac{1}{512k^5} + \dots \right); \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.39)$$

Як видно із останніх виразів, коефіцієнти із ряду A швидко зменшуються. Наприклад, якщо у формулі (4.38) відкинути член $A_6 \cos 6\varphi_1$ і всі інші, що йдуть за ним, то точність розрахунків буде до п'ятого знаку після коми.

Отже практичного значення, як правило, набуває наближена формула із трьома першими членами, яка надає достатню точність наближених розрахунків переміщення:

$$s_B = l_1 (A_0 + A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos 2\varphi_1). \quad (4.40)$$

При цьому і самі коефіцієнти A_0 і A_2 також розраховуються за старшими членами відповідних рядів.

Тобто

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 1 + \frac{1}{4k}; \\
 A_2 &= -\frac{1}{4k}.
 \end{aligned}
 \tag{4.41}$$

Тоді із врахуванням того, що $A_1 = -1$, остаточно будемо мати наступну формулу наближеного розрахунку переміщення координати точки B повзуна:

$$s_B = l_1 \left(1 + \frac{1}{4k} - \cos \varphi_1 - \frac{1}{4k} \cos 2\varphi_1 \right).
 \tag{4.42}$$

Диференціюючи за часом вираз (4.22) можна знайти формулу наближеного розрахунку швидкості точки B повзуна:

$$v_B = \frac{ds}{dt} = l_1 \omega_1 \left(\sin \varphi_1 + \frac{1}{2k} \sin 2\varphi_1 \right),
 \tag{4.43}$$

Аналогічно диференціюючи за часом вираз (4.43) можна знайти формулу наближеного розрахунку прискорення точки B повзуна:

$$a_B = \frac{dv}{dt} = l_1 \omega_1^2 \left(\cos \varphi_1 + \frac{1}{k} \cos 2\varphi_1 \right).
 \tag{4.44}$$

Треба зауважити, що точність наближених формул (4.43) і (4.44) внаслідок диференціювання значно менша точності формули (4.42).

Знаки плюс і мінус у цих формулах вказують на напрямки швидкості і прискорення.

Отримані формули наближеного розрахунку можна застосовувати, наприклад, при знаходженні максимальної швидкості повзуна. У цьому випадку похідна швидкості (тобто величина прискорення) дорівнює нулю і тоді із (4.44) отримаємо

$$\cos \varphi_1 + \frac{1}{k} \cos 2\varphi_1 = 0.$$

або

$$\frac{2}{k} \cos^2 \varphi_1 + \cos \varphi_1 - \frac{1}{k} = 0.$$

Розв'язком цього рівняння є значення кута повороту кривошипа φ_1 :

$$\cos \varphi_1 = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 8}}{4},$$

де перед коренем вибраний тільки додатній знак як дійсно можливий.

Підставивши отримане значення кута φ_1 у (4.43), можна знайти два максимальних значення швидкості v_B , які будуть відрізнятись тільки за знаком. Одне максимальне значення швидкості виникає на ділянці $\varphi_1 \in [0, \pi]$, друге – на ділянці $\varphi_1 \in [\pi, 2\pi]$.

При цьому швидкість буде максимальною у тому положенні механізму, коли кривошип і шатун утворюють між собою прямий кут і

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{l_2}{l_1} = k.$$

Максимальна швидкість повзуна даного механізму звичайно буде трохи перевищувати колову швидкість його кривошипа:

$$v_A = l_1 \cdot \omega_1.$$

Кривошипно-коромисловий механізм.

Визначимо тепер кінематичні параметри кривошипно-коромислового механізму, кривошип якого обертається із кутовою швидкістю ω_1 (рис. 4.72).

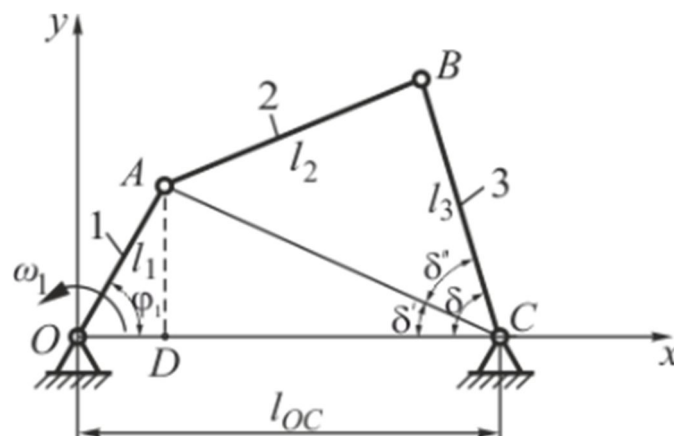


Рис. 4.72

Тут також будемо вважати заданими кут повороту φ_1 кривошипа 1 механізму, лінійні розміри його ланок l_1, l_2, l_3 , а також міжосьова відстань l_{OC} між центрами шарнірів в точках O і C .

Спочатку встановимо залежність між кутом повороту δ коромисла 3 і кутом повороту φ_1 кривошипа 1 даного механізму.

Для цього з'єднаємо точки A і C на кінематичній схемі механізму прямою, яка ділить кут δ на два складові кути δ' і δ'' .

При цьому

$$\delta = \delta' + \delta'' . \quad (4.45)$$

Далі опустимо із точки A на лінію центрів OC перпендикуляр і знайдемо

$$\operatorname{tg} \delta' = \frac{|AD|}{|CD|} = \frac{l_1 \sin \varphi_1}{l_{OC} - l_1 \cos \varphi_1} , \quad (4.46)$$

а також

$$l_{AC} = \sqrt{l_1^2 + l_{OC}^2 - 2l_{OC}l_1 \cos \varphi_1} . \quad (4.47)$$

З іншого боку, із $\triangle ABC$:

$$l_2^2 = l_3^2 + l_{AC}^2 - 2l_3l_{AC} \cos \delta'' ,$$

звідки

$$\cos \delta'' = \frac{l_3^2 - l_2^2 + l_{AC}^2}{2l_3l_{AC}} ,$$

Або із врахуванням (4.47) отримаємо

$$\cos \delta'' = \frac{l_3^2 - l_2^2 + l_1^2 + l_{OC}^2 - 2l_{OC}l_1 \cos \varphi_1}{2l_3 \sqrt{l_1^2 + l_{OC}^2 - 2l_{OC}l_1 \cos \varphi_1}} , \quad (4.48)$$

Тоді, враховуючи попередні вирази, кут повороту δ коромисла 3 можна представити у вигляді

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{l_1 \sin \varphi_1}{l_{OC} - l_1 \cos \varphi_1} + \arccos \frac{l_3^2 - l_2^2 + l_1^2 + l_{OC}^2 - 2l_{OC}l_1 \cos \varphi_1}{2l_3 \sqrt{l_1^2 + l_{OC}^2 - 2l_{OC}l_1 \cos \varphi_1}} . \quad (4.49)$$

Диференціюючи отриману залежність за часом t , знайдемо кутову швидкість коромисла 3 :

$$\omega_3 = \frac{d\delta}{dt} = \frac{l_1 \omega_1}{l_1^2 + l_{OC}^2 - 2l_{OC}l_1 \cos \varphi_1} \times \left(l_{OC} \cos \varphi_1 - l_1 - \frac{l_{OC} \sin \varphi_1 (l_3^2 - l_2^2 + l_1^2 + l_{OC}^2 - 2l_{OC}l_1 \cos \varphi_1)}{\sqrt{4l_3^2 l_2^2 - (l_1^2 + l_{OC}^2 - 2l_{OC}l_1 \cos \varphi_1 - l_3^2 - l_2^2)^2}} \right) . \quad (4.50)$$

Аналогічно можна знайти і кутове прискорення ε_3 коромисла 3 як похідну від функції кутової швидкості за часом $\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt}$.

Кулісний механізм.

Визначимо також аналітичні залежності переміщення, швидкості і прискорення куліси для аксіального кулісного механізму (рис. 4.73).

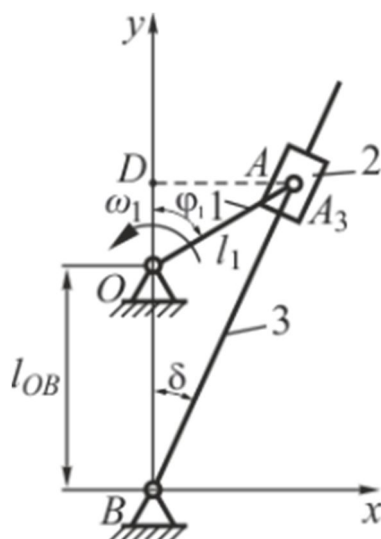


Рис. 4.73

Тут будемо вважати заданими кут повороту φ_1 кривошипа l , його лінійні розміри l_1 і міжосьова відстань l_{OB} між центрами шарнірів в точках O і B .

Опустивши із точки A перпендикуляр на лінію центрів OB , знайдемо залежність кута повороту куліси 3 від кута повороту кривошипа l :

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{l_1 \sin \varphi_1}{l_{OB} + l_1 \cos \varphi_1}. \quad (4.51)$$

Диференціюючи за часом t ліву і праву частини отриманої попередньої залежності, знайдемо кутову швидкість ω_3 куліси 3 :

$$\frac{1}{\cos^2 \delta} \cdot \frac{d\delta}{dt} = l_1 \frac{(l_{OB} + l_1 \cos \varphi_1) \cos \varphi_1 \omega_1 + \sin \varphi_1 l_1 \sin \varphi_1 \omega_1}{(l_{OB} + l_1 \cos \varphi_1)^2},$$

або

$$\omega_3 = \frac{d\delta}{dt} = \frac{l_1 \omega_1 (l_{OB} \cos \varphi_1 + l_1)}{(l_{OB} + l_1 \cos \varphi_1)^2} \cos^2 \delta, \quad (4.52)$$

Із (4.51) знаходимо також, що

$$\cos^2 \delta = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} = \frac{1}{1 + \frac{l_1^2 \sin^2 \varphi_1}{(l_{OB} + l_1 \cos \varphi_1)^2}} = \frac{(l_{OB} + l_1 \cos \varphi_1)^2}{l_{OB}^2 + l_1^2 + 2l_{OB}l_1 \cos \varphi_1}.$$

Підставивши останній вираз у (4.52), остаточно отримаємо

$$\omega_3 = \omega_1 \frac{l_1(l_{OB} \cos \varphi_1 + l_1)}{l_{OB}^2 + l_1^2 + 2l_{OB}l_1 \cos \varphi_1}, \quad (4.53)$$

Проаналізуємо отриману функціональну залежність.

Так, кутова швидкість куліси ω_3 буде дорівнювати нулю (тобто куліса зупиниться і стене у крайнє своє положення) при умові, якщо

$$l_{OB} \cos \varphi_1 + l_1 = 0,$$

або якщо

$$\cos \varphi_1 = -\frac{l_1}{l_{OB}}. \quad (4.54)$$

Остання умова можлива тільки, коли $l_1 < l_{OB}$. У цьому випадку куліса здійснює коливальний рух.

У випадку, коли $l_1 > l_{OB}$ куліса буде здійснювати обертальний рух тільки в одному напрямку.

При умові, коли $l_1 = l_{OB}$, то

$$\omega_3 = \omega_1 \frac{l_{OB}(l_{OB} \cos \varphi_1 + l_{OB})}{l_{OB}^2 + l_{OB}^2 + 2l_{OB}l_{OB} \cos \varphi_1} = \frac{\omega_1}{2},$$

тобто куліса буде обертатись із кутовою швидкістю, яка у два рази менша за швидкість кривошипа.

Вважаючи, що $\omega_1 = \text{const}$, диференціюємо за часом t вираз (4.53) і знаходимо кутове прискорення ε_3 куліси 3:

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = l_1 \omega_1 \frac{-\left(l_{OB}^2 + l_1^2 + 2l_{OB}l_1 \cos \varphi_1\right) l_{OB} \omega_1 \sin \varphi_1 + \left(l_{OB} \cos \varphi_1 + l_1\right) 2l_{OB}l_1 \omega_1 \sin \varphi_1}{\left(l_{OB}^2 + l_1^2 + 2l_{OB}l_1 \cos \varphi_1\right)^2}$$

,

або після перетворень

$$\varepsilon_3 = \omega_1^2 \frac{l_1 l_{OB} (l_1^2 - l_{OB}^2) \sin \varphi_1}{\left(l_{OB}^2 + l_1^2 + 2l_{OB}l_1 \cos \varphi_1\right)^2}. \quad (4.55)$$

Зрозуміло, що при $\varepsilon_3 = 0$ кутова швидкість куліси буде або

максимальною, або мінімальною.

Із останньої залежності бачимо, що умова $\varepsilon_3 = 0$ буде здійснюватись при $\varphi_1 = 0$ і при $\varphi_1 = \pi$ (без випадку $l_1 = l_{OB}$).

Підставляючи ці значення у вираз (4.53), отримаємо два екстремальних значення кутової швидкості:

$$\omega_3 = \omega_1 \frac{l_1}{l_1 + l_{OB}},$$

а також

$$\omega_3 = \omega_1 \frac{l_1}{l_1 - l_{OB}},$$

Для кулісного механізму з коливальною кулісою по першій із останніх двох формул знаходять $\omega_{3\max}$, а по другій – $\omega_{3\min}$.

У випадку механізму з тільки обертальною кулісою навпаки – по першій з двох формул знаходять $\omega_{3\min}$, а по другій – $\omega_{3\max}$.

Синусний механізм.

Треба відмітити, що найбільш просто даним способом визначити кінематичні параметри синусного механізму, який ще носить назву механізму подвійного повзуна (рис. 4.74).

Будемо вважати заданими кут повороту φ_1 кривошипа l і його лінійні розміри l_1 .

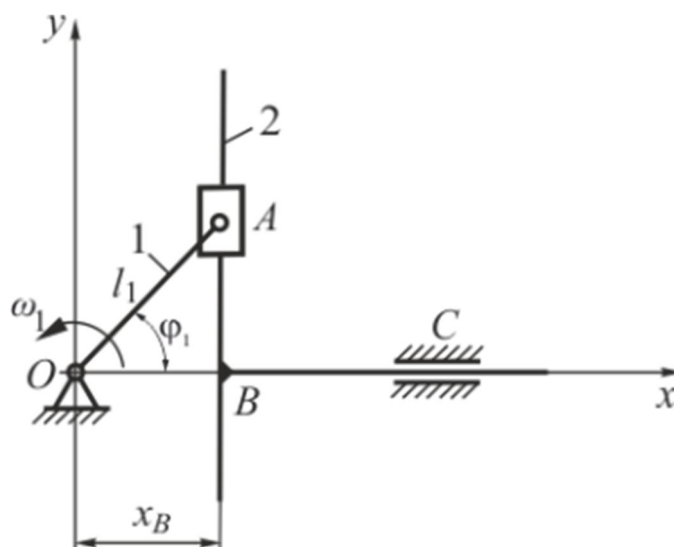


Рис. 4.74.

В цьому механізмі точка A кривошипа 1 рухається по коловій траєкторії радіуса l_1 , а усі точки ланки 2 рухаються по прямій паралельно осі x і мають такі самі швидкості і прискорення, як і точка B цієї ланки.

Положення точки B на координатній осі x , яке відраховується від центру шарніра O , як і будь-якої іншої точки ланки 2 , можна визначити за формулою

$$x_B = l_1 \sin \varphi_1. \quad (4.56)$$

Диференціюючи отриманий вираз за часом, знаходимо лінійну швидкість руху:

$$v_B = \frac{dx_B}{dt} = l_1 \cos \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} = l_1 \omega_1 \cos \varphi_1. \quad (4.57)$$

Диференціюючи останній вираз ще раз, знаходимо лінійне прискорення:

$$a_B = \frac{dv_B}{dt} = -l_1 \omega_1 \sin \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + l_1 \cos \varphi_1 \frac{d\omega_1}{dt},$$

або

$$a_B = -l_1 (\omega_1^2 \sin \varphi_1 - \varepsilon_1 \cos \varphi_1). \quad (4.58)$$

Отже отримані вирази дозволяють визначити положення, швидкість і прискорення точки B і будь-якої іншої точки ланки 2 у будь-який момент часу при заданій довжині кривошипа l_1 , якщо відомі залежності зміни його кута повороту φ_1 та першої і другої його похідних від часу

У випадку сталої кутової швидкості обертання кривошипа 1 $\omega_1 = \text{const}$ і $\varepsilon_1 = 0$.

В результаті лінійне прискорення точки B визначиться як

$$a_B = -l_1 \omega_1^2 \sin \varphi_1. \quad (4.59)$$

Я бачимо із наведених прикладів кінематичних розрахунків, визначення аналітичних кінематичних залежностей швидкостей і прискорень можуть бути пов'язані з певними труднощами диференціювання функцій переміщень і громіздкістю розрахунків. Тому тут можна скористатись введенням першої та другої передатних функцій механізму або аналогів швидкостей та прискорень.

Але у цілому такі розрахунки можуть бути рекомендовані лише для найпростіших механізмів.

18.4. Метод замкнених векторних контурів

Далі більш докладно розглянемо кінематичне дослідження механізмів методом замкнених векторних контурів.

При цьому кінематичні параметри механізму будемо визначати, представивши його кінематичну схему у вигляді одного або декількох замкнених векторних контурів, які можуть утворити його ланки.

Вихідними даними таких розрахунків будуть структурна схема механізму, розміри ланок та залежності узагальнених координат механізму від часу. Якщо останні не задано, то рівняння записуються у вигляді функції узагальнених координат, тобто визначаються кінематичні передатні функції. Якщо ж початковою ланкою механізму є кривошип, то такою узагальненою координатою буде кут його повороту φ_1 .

Отже суть застосування методу замкнених векторних контурів полягає у наступному:

- ланки механізму зображають у вигляді векторів, які створюють на схемі механізму один або декілька замкнених векторних контурів (відповідно до кількості груп Ассура);
- складають векторні рівняння замкненості кожного контуру;
- вибирають прямокутну систему координат та проектують рівняння замкнутості контурів на осі вибраної системи координат.

В результаті отримують аналітичні залежності положення ланок від узагальнених координат механізму та його розмірів, тобто функцію положень ланок механізму;

- диференціюють двічі за часом рівняння замкненості контурів у проєкціях на осі x , y та отримують, відповідно, систему рівнянь для визначення швидкостей та прискорень ланок механізму. Якщо диференціюють по узагальненій координаті – отримують, відповідно, рівняння для визначення аналогів швидкостей та прискорень.
- визначають координати, проєкції швидкостей та прискорень характерних точок механізму. Визначають модулі швидкостей та прискорень цих точок.

Наведемо деякі рекомендації щодо застосування методу замкнених векторних контурів:

- напрямок векторів слід вибирати так, щоб вони вказували послідовність побудови схеми механізму. Спочатку у вигляді вектора зображають початкову ланку механізму. Початок цього вектора – нерухома точка (центр шарніра). Вектори, що зображають ланки в групах Ассура, рекомендовано напрямляти до внутрішньої

кінематичної пари. Напрямок векторів на нерухомій ланці вибирають довільно;

- записуючи умови замкненості векторних контурів, треба обов'язково враховувати знаки векторів. Для цього користуються наступним *правилом обходу*: обходячи кожний векторний контур схеми у довільно вибраному напрямі, векторам, напрям яких збігається з напрямом обходу, присвоюють знак плюс і, навпаки, для векторів, що мають напрям проти напрямку обходу, присвоюють знак мінус;
- прямокутну систему координат зв'язують зі стояком. За початок відліку можна прийняти центр шарніру, що з'єднує початкову ланку зі стояком. Якщо у механізмі є нерухома напрямна повзуна, то одну з осей координат доцільно провести паралельно до цієї напрямної.

Зазначимо, що у випадку, коли механізм утворює декілька замкнених векторних контурів, то послідовність їх розглядання визначається послідовністю приєднання згідно із структурним аналізом механізму.

Розглянемо деякі приклади кінематичного аналізу плоских важільних механізмів методом замкнених векторних контурів.

Аксіальний кривошипно-повзунний механізм.

Отримаємо розрахункові залежності для аксіального кривошипно-повзунного механізму (рис. 4.75).

Вхідними параметрами тут є розміри ланок механізму та кутова швидкість ω_1 кривошипа 1. При цьому треба визначити усі кінематичні параметри його ланок та характерних точок.

При цьому треба визначити закони переміщення, швидкості та прискорення шатуну 2 та повзуна 3 (його точки B).

Представимо схему механізму у вигляді замкненого векторного контуру $OABO$. У цей контур входить структурна група Ассура другого класу 2-го виду: II кл. 2в. (2, 3).

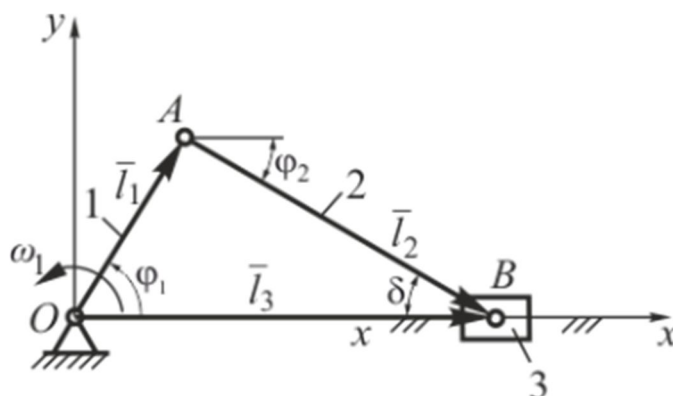


Рис. 4.75

Умова замкненості векторів $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \bar{l}_3$ цього контуру буде наступною:

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_2 = \bar{l}_3, \quad (4.60)$$

Виберемо прямокутну систему координат xOy , за початок відліку якої приймемо центр шарніра O , а вісь Ox спрямуємо вздовж напрямної повзунів. Спроектуємо векторне рівняння (4.40) на осі x та y і отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 &= l_3, \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.61)$$

де l_1, l_2 – відповідно довжини ланок 1 і 2; l_3 – відстань між центром шарніра O кривошипа та центром шарніра B повзуна; φ_1 – узагальнена координата механізму (кут повороту кривошипа 1); φ_2 – кут повороту ланки 2.

В системі тригонометричних рівнянь (4.61) знаки при складових визначаються знаками тригонометричних функцій. За додатний напрямок відліку кутів φ_1 і φ_2 приймемо напрямок проти руху годинникової стрілки (напрямок обертання кривошипа).

Так, наприклад, при куті $\varphi_1 = 40^\circ$ кут $\varphi_2 = -20^\circ$. У цьому випадку друге рівняння системи (4.41) буде мати вигляд:

$$l_1 \sin 40^\circ + l_2 \sin(-20^\circ) = 0,$$

або

$$l_1 \sin 40^\circ - l_2 \sin 20^\circ = 0.$$

Для того, щоб знайти зв'язок між лінійними і кутовими координатами, скористуємось геометричними співвідношеннями в кінематичній схемі даного механізму.

Із $\triangle OAB$ маємо:

$$\sin \delta = l_1 \sin \varphi_1,$$

звідки

$$\delta = \arcsin\left(\frac{l_1}{l_2} \sin \varphi_1\right), \quad (4.62)$$

Розв'язуючи рівняння (4.61) відносно невідомих φ_2 і l_3 , отримаємо аналітичні залежності положень ланок 2, 3 від узагальненої координати φ_1 , тобто функції положень ланок даного механізму.

Для контуру даного механізму $\varphi_2 = \delta$. В результаті із врахуванням

напрямку відліку кутів із другого рівняння системи (4.61) маємо:

$$\varphi_2 = \arcsin\left(-\frac{l_1}{l_2} \sin \varphi_1\right), \quad (4.63)$$

а із першого рівняння (4.61):

$$l_3 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2.$$

Враховуючи, що

$$\cos \varphi_2 = \sqrt{1 - \frac{l_1^2}{l_2^2} \sin^2 \varphi_1},$$

Закон зміни положення точки B повзуна 3 відносно центру шарніра O кривошипа може бути представлений у вигляді

$$s_B = l_3 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \sqrt{1 - \frac{l_1^2}{l_2^2} \sin^2 \varphi_1}. \quad (4.64)$$

Визначення аналітичних залежностей швидкостей ланок і окремих точок механізму зводиться до диференціювання системи тригонометричних рівнянь (4.61), як складених функцій, за часом t :

$$\left. \begin{aligned} -l_1 \sin \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} - l_2 \sin \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt} &= \frac{dl_3}{dt}, \\ l_1 \cos \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + l_2 \cos \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Із врахуванням того, що

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1; \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2; \quad \frac{dl_3}{dt} = v_3 = v_B,$$

отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} -l_1 \omega_1 \sin \varphi_1 - l_2 \omega_2 \cdot \sin \varphi_2 &= v_B, \\ l_1 \omega_1 \cos \varphi_1 + l_2 \omega_2 \cos \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.65)$$

Сумісне розв'язання двох рівнянь системи (4.65) дозволяють визначити кутову швидкість ω_2 шатуна 2 і лінійну швидкість v_B точки B повзуна 3.

Із другого рівняння системи (4.65) визначаємо кутову швидкість шатуна 2:

$$\omega_2 = -\frac{l_1 \omega_1 \cos \varphi_1}{l_2 \cos \varphi_2}, \quad (4.66)$$

а із першого рівняння системи (4.65):

$$v_B = -(l_1 \omega_1 \sin \varphi_1 + l_2 \omega_2 \sin \varphi_2). \quad (4.67)$$

Підставимо у (4.47) вираз (4.46). Після перетворень остаточно лінійна швидкість точки B повзуна 3 визначиться як:

$$v_B = \frac{l_1 \omega_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos \varphi_2}. \quad (4.68)$$

У випадку, коли закон руху початкової ланки невідомий, визначають аналоги швидкостей та прискорень, диференціюючи систему рівнянь (4.61) за узагальненою координатою.

Для визначення прискорень продиференціюємо за часом t систему рівнянь (4.65).

В результаті отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} -l_1 \omega_1^2 \cos \varphi_1 - l_2 \omega_2^2 \cos \varphi_2 - l_2 \varepsilon_2 \sin \varphi_2 &= a_B, \\ -l_1 \omega_1^2 \sin \varphi_1 - l_2 \omega_2^2 \sin \varphi_2 + l_2 \varepsilon_2 \cos \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.69)$$

Сумісне розв'язання системи рівнянь (4.69) дають формули визначення кутового прискорення ε_2 шатуна 2 і лінійного прискорення a_B точки B повзуна 3.

Із другого рівняння системи (4.49) визначаємо:

$$\varepsilon_2 = \frac{l_1 \omega_1^2 \sin \varphi_1 + l_2 \omega_2^2 \sin \varphi_2}{l_2 \cos \varphi_2}, \quad (4.70)$$

а із першого рівняння системи (4.50):

$$a_B = -(\omega_1^2 l_1 \cos \varphi_1 + \omega_2^2 l_2 \cos \varphi_2 + \varepsilon_2 l_2 \sin \varphi_2), \quad (4.71)$$

Підставивши значення ε_2 із (4.50) в рівняння (4.71), після перетворень остаточно визначаємо лінійне прискорення точки B повзуна 3:

$$a_B = -\frac{l_1 \omega_1^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos \varphi_2}. \quad (4.72)$$

Координати будь-якої іншої характерної точки механізму, її швидкість та прискорення визначають, використовуючи рівняння проєкцій даної точки на осі координат.

Наприклад, для точки центра мас S_2 шатуна 2 можна записати:

$$\left. \begin{aligned} x_{S_2} &= l_1 \sin \varphi_1 + l_{AS_2} \sin \varphi_2, \\ y_{S_2} &= l_1 \cos \varphi_1 + l_{AS_2} \cos \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.73)$$

Модулі швидкостей та прискорень цієї точки можна знайти за відомими формулами:

$$\left. \begin{aligned} v_{S_2} &= \sqrt{\dot{x}_{S_2}^2 + \dot{y}_{S_2}^2}, \\ a_{S_2} &= \sqrt{\ddot{x}_{S_2}^2 + \ddot{y}_{S_2}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.74)$$

Аналітичне обчислення швидкостей і прискорень кривошипно-повзунного механізму при використанні базових лінійних рівнянь системи (4.61) можна проводити також за допомогою застосування аналогів швидкостей і прискорень.

Для визначення аналогів кутової швидкості шатуна 2 і лінійної швидкості повзуна 3, продиференціюємо лінійні рівняння системи (4.61) за узагальненою координатою φ_1 :

$$\left. \begin{aligned} -l_1 \sin \varphi_1 - l_2 \sin \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} &= \frac{dl_3}{d\varphi_1}, \\ l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

або

$$\left. \begin{aligned} -l_1 \sin \varphi_1 - \varphi_2' \sin \varphi_2 l_2 &= s_3', \\ l_1 \cos \varphi_1 + \varphi_2' \cos \varphi_2 l_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.75)$$

де $\varphi_2' = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$ – аналог кутової швидкості шатуна 2; $s_3' = \frac{dl_3}{d\varphi_1}$ – аналог лінійної швидкості повзуна 3.

Із другого рівняння системи (4.55) знаходимо:

$$\varphi_2' = -\frac{l_1 \cos \varphi_1}{l_2 \cos \varphi_2} \quad (4.76)$$

Підставивши вираз (4.76) в перше рівняння системи (4.75), отримаємо:

$$\begin{aligned} s_3' &= -l_1 \sin \varphi_1 - \varphi_2' l_2 \sin \varphi_2 = -l_1 \sin \varphi_1 + \frac{l_1 \cos \varphi_1 \cdot l_2 \sin \varphi_2}{l_2 \cos \varphi_2} = \\ &= \frac{-l_1 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + l_1 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2}{\cos \varphi_2} = \frac{l_1 (\sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)}{\cos \varphi_2}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Остаточно після тригонометричних перетворень аналог лінійної швидкості повзуна 3 визначається як:

$$s'_3 = \frac{l_1(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos \varphi_2}. \quad (4.78)$$

В результаті кутову швидкість ω_2 шатуна 2 і лінійну швидкість v_B точки B повзуна 3 легко знайти через їх аналоги:

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \varphi'_2 = -\omega_1 \cdot \frac{l_1 \cos \varphi_1}{l_2 \cos \varphi_2}, \quad (4.79)$$

$$v_B = \omega_1 \cdot s'_3 = \omega_1 \cdot \frac{l_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos \varphi_2}, \quad (4.80)$$

де ω_1 – кутова швидкість ведучої ланки (кривошипа 1).

Як бачимо, отримані вирази (4.79) і (4.80) ідентичні відповідним виразам (4.66) і (4.68).

Аналогічно для визначення аналогів кутового прискорення шатуна 2 і лінійного прискорення повзуна 3, продиференціюємо за узагальненою координатою φ_1 лінійні рівняння системи (4.55):

$$\left. \begin{aligned} -l_1 \cos \varphi_1 - l_2 \left(\frac{d\varphi'_2}{d\varphi_1} \sin \varphi_2 + \varphi'_2 \cos \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right) &= \frac{ds'_3}{d\varphi_1}, \\ -l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \left(\frac{d\varphi'_2}{d\varphi_1} \cos \varphi_2 - \varphi'_2 \sin \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \right) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

або

$$\left. \begin{aligned} -l_1 \cos \varphi_1 - l_2 \varphi_2'' \sin \varphi_2 - l_2 (\varphi_2')^2 \cos \varphi_2 &= s_3'', \\ -l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \varphi_2'' \cos \varphi_2 - l_2 (\varphi_2')^2 \sin \varphi_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.81)$$

де $\varphi_2' = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$, $\varphi_2'' = \frac{d\varphi_2'}{d\varphi_1} = \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2}$ – відповідно аналоги кутові швидкості і

прискорення шатуна 2; $s_3' = \frac{ds_3'}{d\varphi_1} = \frac{d^2l_3}{d\varphi_1^2}$ – аналог лінійного прискорення

повзуна 3.

Із другого рівняння системи (4.61) знаходимо:

$$\varphi_2'' = \frac{l_2 (\varphi_2')^2 \sin \varphi_2 + l_1 \sin \varphi_1}{l_2 \cos \varphi_2}. \quad (4.82)$$

Із першого рівняння системи (4.81), підставивши вираз (4.82), отримуємо вираз для аналога лінійного прискорення повзуна 3:

$$s_3'' = -l_1 \cos \varphi_1 - l_2 (\varphi_2')^2 \cos \varphi_2 - l_2 \varphi_2'' \sin \varphi_2 = -l_1 \cos \varphi_1 - l_2 (\varphi_2')^2 \cos \varphi_2 - l_2 \sin \varphi_2 \frac{l_2 (\varphi_2')^2 \sin \varphi_2 + l_1 \sin \varphi_1}{l_2 \cos \varphi_2}. \quad (4.83)$$

В результаті кутового прискорення ε_2 шатуну 2 і лінійну швидкість a_B точки B повзуна 3 можна знайти через їх аналоги наступним чином:

$$\varepsilon_2 = \omega_1^2 \cdot \varphi_2'' + \varepsilon_1 \varphi_2', \quad (4.84)$$

$$a_B = \omega_1^2 \cdot s_3'' + \varepsilon_1 s_3', \quad (4.85)$$

де ω_1 , ε_1 – кутова швидкість і кутове прискорення ведучої ланки (кривошипа 1).

Дезаксіальний кривошипно-повзунний механізм.

Розглянемо кінематичний аналіз методом замкненого векторного контуру, дезаксіального кривошипно-повзунного механізму (рис. 4.76).

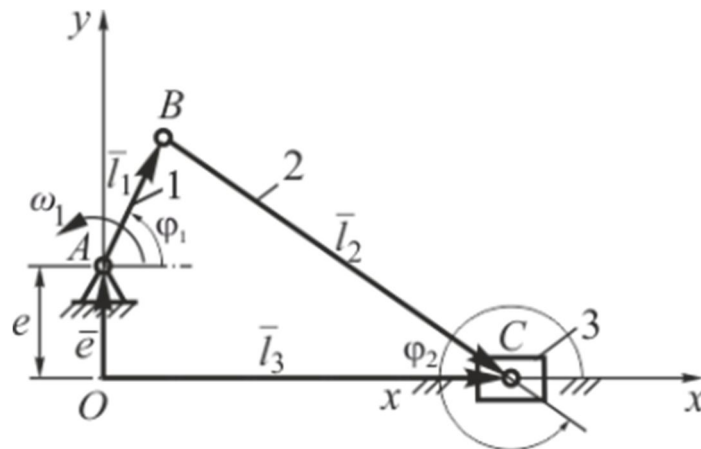


Рис. 4.76

При цьому заданими є довжини ланок l_1 і l_2 , закон руху кривошипа $\varphi_1(t)$ і величина дезаксіалу e .

Представимо схему механізму у вигляді замкненого векторного контуру $OABCO$. Умова замкненості векторів \bar{e} , \bar{l}_1 , \bar{l}_2 , \bar{l}_3 цього контуру буде наступною:

$$\bar{e} + \bar{l}_1 + \bar{l}_2 = \bar{l}_3, \quad (4.86)$$

Виберемо систему координат xOy , як це показано на рис. 4.6, і спроектуємо це рівняння на осі координат:

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 &= l_3; \\ e + l_1 \sin \varphi_1 - l_2 \sin \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \right\}, \quad (4.87)$$

Із другого рівняння системи (4.67) знаходимо кут φ_2 , підставивши його в перше рівняння, після чого визначаємо переміщення повзуна:

$$l_3 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \left(\arcsin \frac{e + l_1 \cos \varphi_1}{l_2} \right), \quad (4.88)$$

Для визначення кутової швидкості ω_2 шатуна 2 і лінійної швидкості v_C повзуна 3 продиференціюємо систему тригонометричних рівнянь (4.87) за часом t .

В результаті отримаємо систему, аналогічну системі (4.65):

$$\left. \begin{aligned} -l_1 \omega_1 \sin \varphi_1 - l_2 \omega_2 \cdot \sin \varphi_2 &= v_C; \\ l_1 \omega_1 \cos \varphi_1 + l_2 \omega_2 \cos \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Після розв'язання цієї системи рівнянь можна отримати вирази для кутової швидкості шатуна і лінійної швидкості повзуна, які аналогічні виразам для попередньому механізму:

$$\omega_2 = -\frac{l_1 \omega_1 \cos \varphi_1}{l_2 \cos \varphi_2},$$

$$v_C = \frac{l_1 \omega_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos \varphi_2}.$$

Кутове прискорення ε_2 шатуна 2 і лінійне прискорення a_C повзуна 3 можна знайти подвійним диференціюванням за часом t системи рівнянь (4.45). Отримана система також буде аналогічна системі рівнянь (4.69):

$$\left. \begin{aligned} -l_1 \omega_1^2 \cos \varphi_1 - l_2 \omega_2^2 \cos \varphi_2 - l_2 \varepsilon_2 \sin \varphi_2 &= a_C; \\ -l_1 \omega_1^2 \sin \varphi_1 - l_2 \omega_2^2 \sin \varphi_2 + l_2 \varepsilon_2 \cos \varphi_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Після розв'язання даної системи рівнянь можна отримати вирази для кутового прискорення шатуна і лінійного прискорення повзуна, які також аналогічні виразам для попередньому механізму:

$$\varepsilon_2 = \frac{l_1 \omega_1^2 \sin \varphi_1 + l_2 \omega_2^2 \sin \varphi_2}{l_2 \cos \varphi_2},$$

$$a_C = -\frac{l_1 \omega_1^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos \varphi_2}.$$

Отже швидкості і прискорення цих двох наведених плоских механізмів підпорядковані однаковим законам.

Кривошипно-коромисловий механізм.

Розглянемо далі застосування методу замкнутого векторного контуру для кривошипно-коромислового механізму, кривошип якого обертається із сталою кутовою швидкістю ω_1 (рис. 4.77).

Схему даного механізму також представимо у вигляді замкнутого векторного контуру $OABC$. У цей контур входить структурна група Ассур другого класу 1-го виду: II кл. 1в. (2, 3).

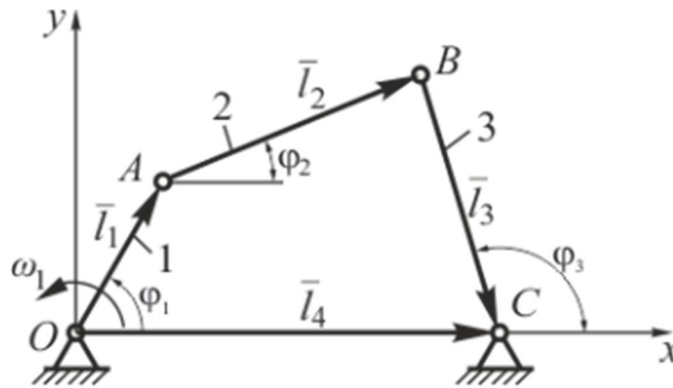


Рис. 4.77

Умова замкненості векторів \vec{l}_1 , \vec{l}_2 , \vec{l}_3 , \vec{l}_4 цього контуру буде наступною:

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_4 + \vec{l}_3, \quad (4.89)$$

Виберемо прямокутну систему координат xOy , за початок відліку якої приймемо центр шарніра O , а вісь Ox спрямуємо по горизонталі через центри шарнірів O і C .

Спроекуємо векторний контур на осі координат і отримаємо систему двох тригонометричних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 &= l_4 + l_3 \cos \varphi_3; \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 &= l_3 \sin \varphi_3, \end{aligned} \right\} \quad (4.90)$$

де l_1 , l_2 , l_3 – відповідно довжини ланок 1, 2, 3; l_4 – відстань між центром шарніра O кривошипа та центром шарніра C коромисла; φ_1 – узагальнена

координата механізму (кут повороту кривошипа l); φ_2, φ_3 – відповідно кути повороту ланок 2 і 3.

Для визначення кутових швидкостей продиференціюємо ці рівняння за часом t і отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} -l_1 \sin \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} - l_2 \sin \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt} &= -l_3 \sin \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{dt}, \\ l_1 \cos \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + l_2 \cos \varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt} &= l_3 \cos \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{dt}, \end{aligned} \right\}$$

або

$$\left. \begin{aligned} -l_2 \omega_2 \sin \varphi_2 &= l_1 \omega_1 \sin \varphi_1 - l_3 \omega_3 \sin \varphi_3, \\ l_2 \omega_2 \cos \varphi_2 &= l_3 \omega_3 \cos \varphi_3 - l_1 \omega_1 \cos \varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (4.91)$$

Відніmemo почленно з першого рівняння кути φ_2 і φ_3 . Отже будемо мати:

$$\begin{aligned} l_1 \omega_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) &= l_3 \omega_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2), \\ l_1 \omega_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) &= -l_2 \omega_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3). \end{aligned}$$

Тоді з першого рівняння отримаємо кутову швидкість третьої ланки ω_3 :

$$\omega_3 = \omega_1 \frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}, \quad (4.92)$$

а з другого рівняння – кутову швидкість другої ланки ω_2 :

$$\omega_2 = -\omega_1 \frac{l_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}. \quad (4.93)$$

Для визначення кутових прискорень продиференціюємо за часом t систему рівнянь (4.91), враховуючи що $\omega_1 = const$, $\varepsilon_1 = 0$:

$$\left. \begin{aligned} -l_2 \varepsilon_2 \sin \varphi_2 - l_2 \omega_2^2 \cos \varphi_2 &= l_1 \omega_1^2 \cos \varphi_1 - l_3 \varepsilon_3 \sin \varphi_3 - l_3 \omega_3^2 \cos \varphi_3, \\ l_2 \varepsilon_2 \cos \varphi_2 - l_2 \omega_2^2 \sin \varphi_2 &= l_1 \omega_1^2 \sin \varphi_1 + l_3 \varepsilon_3 \cos \varphi_3 - l_3 \omega_3^2 \sin \varphi_3. \end{aligned} \right\} \quad (4.94)$$

Помножимо перше з отриманих рівнянь на $\cos \varphi_2$, а друге на $\sin \varphi_2$ і додавши почленно обидві частини цих рівнянь і після нескладних перетворень отримаємо:

$$-l_2 \omega_2^2 = l_1 \omega_1^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - l_3 \varepsilon_3 \cdot \sin(\varphi_3 - \varphi_2) - l_3 \omega_3^2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2).$$

В результаті будемо мати кутове прискорення третьої ланки ε_3

$$\varepsilon_3 = \frac{l_1 \omega_1^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l_2 \omega_2^2 - l_3 \omega_3^2 \cos(\varphi_3 - \varphi_2)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_2)}. \quad (4.95)$$

Аналогічно з тих самих рівнянь можна отримати кутове прискорення другої ланки ε_2

$$\varepsilon_2 = \frac{l_3 \omega_3^2 - l_1 \omega_1^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - l_2 \omega_2^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3)}{l_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}. \quad (4.96)$$

Кулісний механізм.

Застосуємо також метод замкненого векторного контуру для кулісного механізму, при обертанні його кривошипа із сталою кутовою швидкістю ω_1 (рис. 4.78).

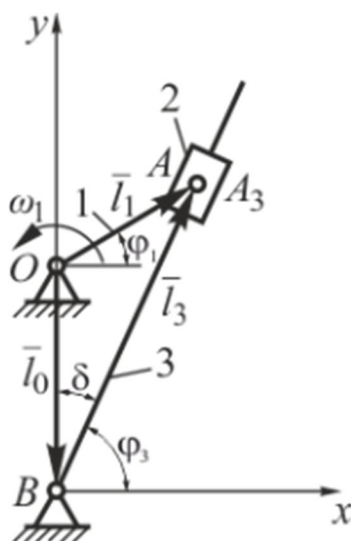


Рис. 4.78

Представимо схему кулісного механізму у вигляді замкненого векторного контуру $OABO$. У цей контур входить структурна група Ассуря другого класу 3-го виду: II кл. 2в. (2, 3).

Умова замкненості векторів $\bar{l}_1, \bar{l}_3, \bar{l}_0$ цього контуру буде наступною:

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_0 = \bar{l}_3, \quad (4.97)$$

Виберемо прямокутну систему координат xOy , за початок відліку якої приймемо центр шарніра B куліси 3, а вісь Oy спрямуємо через центри шарнірів B і O відповідно куліси 3 і кривошипа 1.

Спроектуємо векторне рівняння (4.97) на осі x та y і отримаємо наступну систему тригонометричних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} l_1 \cos \varphi_1 &= l_3 \cos \varphi_3; \\ l_1 \sin \varphi_1 &= l_3 \sin \varphi_3 - l_0, \end{aligned} \right\} \quad (4.98)$$

де l_1, l_3 – відповідно довжини ланок I і 3 ; l_0 – відстань між центром шарніра B і центром шарніра O куліси та кривошипа; φ_1 – узагальнена координата механізму (кут повороту кривошипа I); φ_3 – кут повороту ланки 3 .

Для знаходження зв'язку між лінійними і кутовими координатами, скористуємось геометричними співвідношеннями в кінематичній схемі кулісного механізму.

Із $\triangle OAB$ маємо:

$$l_3 = l_{BA} = \sqrt{l_1^2 + l_0^2 - 2l_1l_0 \cos(90^\circ + \varphi_1)}$$

або

$$l_3 = l_{BA} = \sqrt{l_1^2 + l_0^2 - 2l_1l_0 \sin \varphi_1}. \quad (4.99)$$

Із $\triangle ABC$:

$$\sin \delta = l_1 \cos \varphi_1,$$

звідки

$$\delta = \arcsin\left(\frac{l_1}{l_3} \cos \varphi_1\right), \quad (4.100)$$

Отже

$$\varphi_3 = 90^\circ - \arcsin\left(\frac{l_1}{l_3} \cos \varphi_1\right),$$

або

$$\varphi_3 = \arccos\left(\frac{l_1}{l_3} \cos \varphi_1\right). \quad (4.101)$$

Визначення аналітичних залежностей швидкостей ланок і окремих точок механізму зводиться до диференціювання системи тригонометричних рівнянь (4.98) за часом t :

$$\left. \begin{aligned} -l_1 \sin \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} &= -l_3 \sin \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{dt} + \frac{dl_3}{dt} \cos \varphi_3; \\ l_1 \cos \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} &= l_3 \cos \varphi_3 \frac{d\varphi_3}{dt} + \frac{dl_3}{dt} \sin \varphi_3. \end{aligned} \right\}$$

Із врахуванням того, що

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1; \quad \frac{d\varphi_3}{dt} = \omega_3; \quad \frac{dl_3}{dt} = v_{A_3A},$$

отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} -l_1 \omega_1 \sin \varphi_1 &= -l_3 \omega_3 \cdot \sin \varphi_3 + v_{A_3A} \cos \varphi_3; \\ l_1 \omega_1 \cos \varphi_1 &= l_3 \omega_3 \cos \varphi_3 + v_{A_3A} \sin \varphi_3. \end{aligned} \right\} \quad (4.102)$$

Сумісне розв'язання двох рівнянь системи (4.102) після перетворень дозволяють визначити кутову швидкість ω_3 куліси 3 і лінійну швидкість v_{A_3A} відносного руху кулісного каменю 2 вздовж куліси:

$$\omega_3 = -\frac{l_1 \omega_1}{l_3} \cos(\varphi_1 - \varphi_3), \quad (4.83)$$

$$v_{A_3A} = l_1 \omega_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_1). \quad (4.84)$$

Знаючи кутову швидкість ω_3 і довжину відрізка AB , можна визначити величину лінійної швидкості v_{A_3} абсолютного руху точки A_3 куліси:

$$v_{A_3} = \omega_3 \cdot l_{AB}. \quad (4.85)$$

Напрямок вектора \bar{v}_{A_3} буде визначатись кутом α_3 .

При цьому, якщо $\omega_3 > 0$, то

$$\alpha_3 = \varphi_3 + 90^\circ. \quad (4.86)$$

Якщо $\omega_3 < 0$, то

$$\alpha_3 = \varphi_3 - 90^\circ. \quad (4.87)$$

Для визначення прискорень продиференціюємо за часом t систему рівнянь (4.82).

В результаті отримаємо наступну систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} -l_1\omega_1^2 \cos \varphi_1 &= -l_3\omega_3^2 \cos \varphi_3 - \omega_3 v_{A_3A} \sin \varphi_3 - l_3\varepsilon_3 \sin \varphi_3 \\ -\omega_3 v_{A_3A} \sin \varphi_3 &+ a_{A_3A} \cos \varphi_3; \\ -l_1\omega_1^2 \sin \varphi_1 &= -l_3\omega_3^2 \sin \varphi_3 + \omega_3 v_{A_3A} \cos \varphi_3 + l_3\varepsilon_3 \cos \varphi_3 + \\ &+ \omega_3 v_{A_3A} \cos \varphi_3 + a_{A_3A} \sin \varphi_3. \end{aligned} \right\} (4.88)$$

Сумісне розв'язання системи рівнянь (4.88) методом виключення відносного прискорення a_{A_3A} дає можливість визначити кутове прискорення ε_3 куліси 3:

$$\varepsilon_3 = \frac{l_1\omega_1^2 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) - 2v_{A_3A}\omega_3}{l_3}, \quad (4.89)$$

Знаючи кутову швидкість ω_3 , кутове прискорення ε_3 і довжину відрізка AB , можна визначити величину лінійного прискорення a_{A_3} абсолютного руху точки A_3 куліси:

$$a_{A_3} = l_3 \sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2}. \quad (4.90)$$

Напрямок вектора \bar{a}_{A_3} визначається кутом β_3 .

Якщо $\varepsilon_3 > 0$, то

$$\beta_3 = \varphi_3 + 180^\circ - \arccos\left(\frac{\omega_3^2}{\sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2}}\right).$$

Якщо $\varepsilon_3 < 0$, то

$$\beta_3 = \varphi_3 - 180^\circ + \arccos\left(\frac{\omega_3^2}{\sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2}}\right).$$

Наведені результати аналітичного дослідження зручні для програмування та реалізації на ЕОМ.

Треба зауважити, що для більш складних механізмів II класу з багатьма групами Ассур метод замкнутих векторних контурів може призвести до громіздких математичних виразів. В результаті застосування відповідних алгоритмів на ЕОМ призведе до громіздких складних програм.

З метою спрощення методики дослідження механізмів II класу рекомендується *погруповий метод кінематичного дослідження*.

Враховуючи, що будь-який механізм отримується послідовним приєднанням до початкового механізму обмеженої кількості груп Ассур,

доцільно аналітичне дослідження механізмів виконувати за структурними групами. При цьому рух ланок для кожної групи розглядається окремо, з урахуванням кінематичних характеристик її зовнішніх кінематичних пар, якими вона приєднується до механізму. Для цього створюються уніфіковані блоки (підпрограми) для початкових механізмів та груп Ассура.

Таким чином, погруповий метод кінематичного дослідження механізмів зводиться до розгляду окремих структурних груп механізмів, а методика проведення такого кінематичного дослідження не залежить від особливостей формули будови самого механізму, у яку ці структурні групи входять.

Плоский важільний механізм з декількома групами Ассура.

Складемо алгоритм кінематичного дослідження плоского важільного механізму, який зображено на рис. 4.79.

Вхідними параметрами є розміри ланок даного механізму та стала за величиною частота обертання n_1 або кутова швидкість ω_1 кривошипа 1. При цьому треба визначити усі кінематичні параметри його ланок та характерних точок.

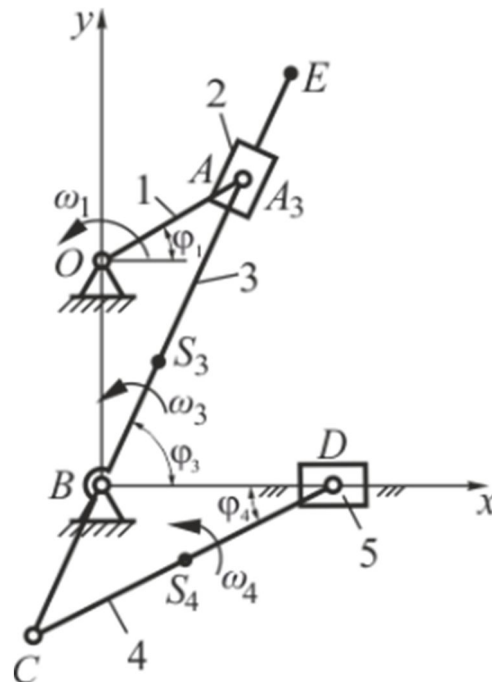


Рис. 4.79

Спочатку визначимо положення і переміщення ланок і характерних точок даного механізму.

Початкове положення кривошипа 1:

$$\varphi_{1_0} = 360^\circ - \arcsin\left(-\frac{l_{OA}}{l_{OB}} \sin \varphi_1\right),$$

положення точки A_3 на кулісі 3:

$$l_{AB} = \sqrt{l_{OA}^2 + l_{OB}^2 - 2l_{OA}l_{OB} \sin \varphi_1},$$

положення центра мас S_3 куліси 3:

$$l_{BS_3} = \frac{l_{BE} - l_{BC}}{2},$$

початкове положення куліси 3:

$$\varphi_{3_0} = \arccos \frac{l_{OA}}{l_{OB}},$$

кут повороту куліси 3:

$$\varphi_3 = \arccos\left(\frac{l_{OA}}{l_{AB}} \cos \varphi_1\right).$$

Початкове положення шатуна 4:

$$\varphi_{4_0} = \arcsin\left(\frac{l_{BC}}{l_{CD}} \sin \varphi_{3_0}\right),$$

кут повороту шатуна 4:

$$\varphi_4 = \arcsin\left(\frac{l_{BC}}{l_{CD}} \sin \varphi_3\right).$$

Початкове положення точки D повзуна 5 на осі x :

$$x_{D_0} = l_{CD} \cos \varphi_{4_0} - l_{BC} \cos \varphi_{3_0},$$

при цьому переміщення точки D повзуна 5 на осі x буде визначатись виразом:

$$S_D = x_D - x_{D_0},$$

Визначимо тепер швидкості ланок і характерних точок механізму.
Кутова швидкість куліси 3:

$$\omega_3 = \omega_1 \frac{l_{OA}}{l_{AB}} \cos(\varphi_1 - \varphi_3),$$

швидкість відносного руху кулісного каменю 2 вздовж куліси 3:

$$v_{A_3A} = \omega_1 l_{OA} \sin(\varphi_3 - \varphi_1).$$

Величина швидкості центра мас S_3 куліси 3:

$$v_{S_3} = \omega_3 \cdot l_{BS_3}.$$

Напрямок вектора швидкості точки S_3 буде визначатись кутом α_3 .

Якщо $\omega_3 > 0$, то $\alpha_3 = \varphi_3 + 90^\circ$.

Якщо $\omega_3 < 0$, то $\alpha_3 = \varphi_3 - 90^\circ$.

Кутова швидкість шатуна 4:

$$\omega_4 = \omega_1 \frac{l_{BC} \cos \varphi_3}{l_{CD} \cos \varphi_4},$$

Швидкість центра мас S_4 шатуна 4 в проєкціях на осі координат x та y :

$$v_{x_4} = \omega_3 l_{BC} \sin \varphi_3 - \omega_4 l_{CS_4} \sin \varphi_4,$$

$$v_{y_4} = -\omega_4 l_{CS_4} \cos \varphi_4.$$

Модуль швидкості точки S_4 буде дорівнювати:

$$v_{S_4} = \sqrt{v_{x_4}^2 + v_{y_4}^2},$$

а напрямок вектора швидкості точки S_4 буде визначатись кутом α_4 .

Якщо $\omega_3 > 0$, то $\alpha_4 = \arctg \frac{v_{y_4}}{v_{x_4}}$.

Якщо $\omega_3 < 0$, то $\alpha_4 = 180^\circ + \arctg \frac{v_{y_4}}{v_{x_4}}$.

Швидкість точки D повзуна 5:

$$v_D = \omega_3 l_{BC} \sin \varphi_3 - \omega_4 l_{CD} \sin \varphi_4.$$

Далі визначимо прискорення ланок і характерних точок механізму.

Кутове прискорення куліси 3:

$$\varepsilon_2 = \omega_1^2 \frac{l_{OA} \sin(\varphi_3 - \varphi_1) - 2v_{A_3A} \omega_3}{l_{AB}},$$

Величина прискорення центра мас S_3 куліси 3:

$$a_{AS_3} = l_{BS_3} \sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2}.$$

Напрямок вектора \bar{a}_{AS_3} визначається кутом β_3 .

Якщо $\varepsilon_3 > 0$, то

$$\beta_3 = \varphi_3 + 180^\circ - \arccos\left(\frac{\omega_3^2}{\sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2}}\right),$$

а якщо $\varepsilon_3 < 0$, то

$$\beta_3 = \varphi_3 - 180^\circ + \arccos\left(\frac{\omega_3^2}{\sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2}}\right).$$

Кутові прискорення шатуна 4:

$$\varepsilon_4 = \omega_4^2 \operatorname{tg} \varphi_4 + l_{BC} \frac{\varepsilon_3 \cos \varphi_3 - \omega_3^2 \sin \varphi_3}{l_{CD} \cos \varphi_4}.$$

Прискорення центра мас S_4 шатуна 4 в проекціях на осі координат x та y :

$$a_{x_4} = l_{BC} (\varepsilon_3 \sin \varphi_3 + \omega_3^2 \cos \varphi_3) - l_{CS_4} (\varepsilon_4 \sin \varphi_4 + \omega_4^2 \cos \varphi_4),$$

$$a_{y_4} = l_{CS_4} (\omega_4^2 \sin \varphi_4 - \varepsilon_4 \cos \varphi_4).$$

Модуль прискорення точки S_4 буде дорівнювати:

$$a_{S_4} = \sqrt{a_{x_4}^2 + a_{y_4}^2},$$

а напрямок вектора швидкості точки S_4 буде визначатись кутом β_4 .

Якщо $\varepsilon_3 > 0$, то

$$\beta_4 = \operatorname{arctg} \frac{a_{y_4}}{a_{x_4}},$$

а якщо $\varepsilon_3 < 0$, то

$$\alpha_4 = 180^\circ + \operatorname{arctg} \frac{a_{y_4}}{a_{x_4}}.$$

Прискорення точки D повзуна 5:

$$a_{D_1} = l_{BC} (\varepsilon_3 \sin \varphi_3 + \omega_3^2 \cos \varphi_3),$$

$$a_{D_2} = l_{BC} (\varepsilon_4 \sin \varphi_4 + \omega_4^2 \cos \varphi_4),$$

$$a_D = a_{D_1} - a_{D_2}$$

18.5. Поняття про метод перетворення координат

Аналітичні задачі кінематичного дослідження як плоских, так і просторових важільних механізмів також можна розв'язувати методом перетворення координат.

Особливо зручно цей метод застосовувати при дослідженні просторових механізмів завдяки значному спрощенню у цьому випадку форми запису рівнянь.

Розглянемо цей метод спочатку для плоских механізмів. Суть застосування рівнянь перетворення координат у наступному.

Виберемо нерухому систему координат O, x_0, y_0 і рухому систему координат O_1, x_1, y_1 , зв'язавши її із деякою точкою K в цій системі (рис.4.80).

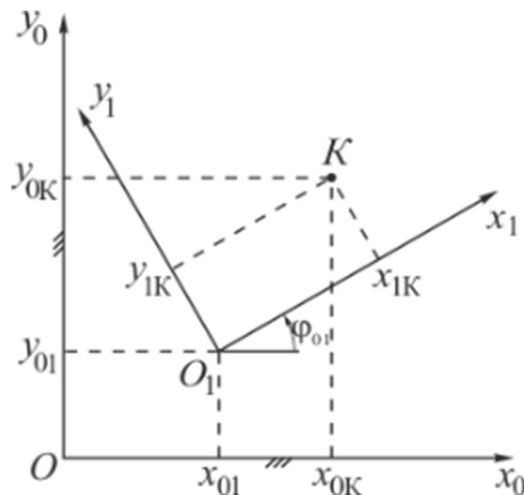


Рис. 4.80

Якщо задатись значенням кута повороту φ_{01} рухомої координати відносно нерухомої, то координати x_{0K}, y_{0K} довільної точки K в нерухомій системі через її координати x_{1K}, y_{1K} в рухомій системі легко знайти із наступної системи рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} x_{0K} &= x_{1K} \cos \varphi_{01} - y_{1K} \sin \varphi_{01} + x_{01}, \\ y_{0K} &= x_{1K} \sin \varphi_{01} + y_{1K} \cos \varphi_{01} + y_{01}. \end{aligned} \right\} \quad (4.91)$$

Застосувавши дані рівняння послідовно до декількох рухомих координатних систем x_n, y_n , з якими зв'язані n рухомих ланок механізму, можна отримати n систем лінійних рівнянь, послідовне розв'язання яких дасть можливість встановити положення цих ланок і характерних точок на

них.

Аналогічні рівняння можна записати і для просторової системи координат. Така система рівнянь має містити в собі ще складові по координаті z і косинуси кутів між відповідними осями при переході від рухомої до нерухомої системи координат.

Подальше визначення лінійних і кутових швидкостей ланок проводиться шляхом диференціювання за часом отриманих рівнянь положень ланок і їх характерних точок. При цьому розв'язання рівнянь положень зручно проводити в матричній формі.

Застосуємо матричний метод перетворення координат для визначення положення ланок у плоскому замкненому і незамкненому кінематичному ланцюзі.

Плоский незамкнений кінематичний ланцюг

Спочатку розглянемо незамкнений кінематичний ланцюг плоского важільного механізму, що складається із чотирьох ланок, кожна з яких має одну обертальну кінематичну пару V класу (рис. 4.81).

Число узагальнених координат цього механізму визначимо за ступенем його рухомості:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 0 = 3,$$

де $n=3$ – кількість рухомих ланок в механізмі; $p_1=3$ – кількість п'ятирухомих кінематичних пар V класу; $p_2=0$ – кількість чотирирухомих кінематичних пар V класу.

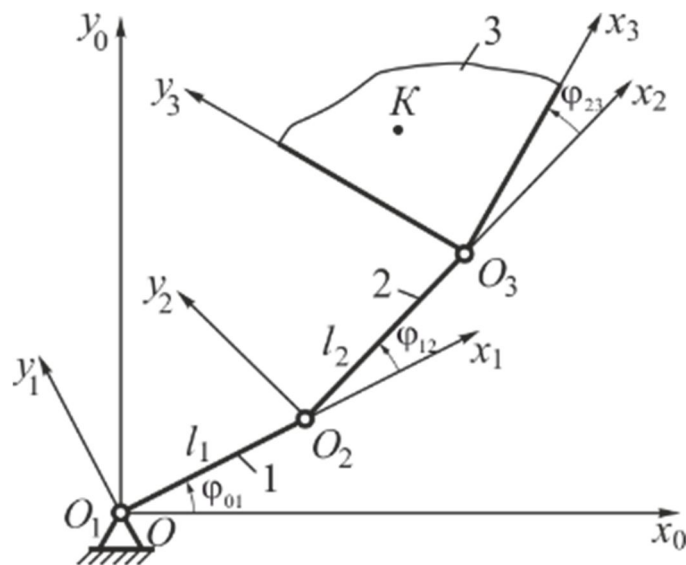


Рис. 4.81

Отже кількість узагальнених координат також дорівнює трьом. За ці узагальнені координати приймемо три кути φ_{01} , φ_{12} , φ_{23} , які визначатимуть повороти ланок 0, 1, 2, 3 механізму відносно одна одної. При кінематичному аналізі ці кути мають бути заданими функціями від часу. Крім того, також мають бути відомі довжини ланок l_1 , l_2 і положення на ланці 3 деякої точки $K(x_{3K}, y_{3K})$ в системі координат x_3, O_3, y_3 . Так як система плоска, то координата z тут відсутня.

Знайдемо положення точки K відносно стояка 0 в системі координат O, x_0, y_0 . Для цього послідовно розглянемо положення цієї точки K в системх координат O_2, x_2, y_2 , O_1, x_1, y_1 , O, x_0, y_0 , які проведені із врахуванням розташування відповідно ланок 2, 1, 0.

Отже спочатку виберемо нерухому систему координат O, x_0, y_0 , яку зв'яжемо із стояком механізму і розташуємо таким чином, щоб вісь Ox_0 була спрямована по горизонталі.

Далі із ланкою 1 жорстко зв'яжемо рухому систему координат O_1, x_1, y_1 , спрямувавши вісь O_1x_1 вздовж ланки 1. При цьому положення ланки 1 відносно нерухомої системи координат O, x_0, y_0 буде визначатись кутом повороту φ_{01} між осями O, x_0 і O_1, x_1 .

Потім із ланкою 2 жорстко зв'яжемо рухому систему координат O_2, x_2, y_2 , спрямувавши вісь O_2x_2 вздовж ланки 2. При цьому положення ланки 2 відносно ланки 1 буде визначатись кутом повороту φ_{12} між осями O_1x_1 і O_2x_2 .

І на кінець із ланкою 3 жорстко зв'яжемо рухому систему координат O_3, x_3, y_3 , спрямувавши вісь O_3x_3 вздовж ланки 3. При цьому положення ланки 3 відносно ланки 2 буде визначатись кутом повороту φ_{23} між осями O_2x_2 і O_3x_3 .

Тоді з рівнянь перетворення плоских декартових координат при розташуванні їх, як це показано на рис. 4.81, отримаємо наступні матриці переходу.

Положення точки K в системі координат O_2, x_2, y_2 при переході від системи O_3, x_3, y_3 :

$$\left. \begin{aligned} x_{2K} &= x_{3K} \cos \varphi_{23} - y_{3K} \sin \varphi_{23} + l_2, \\ y_{2K} &= x_{3K} \sin \varphi_{23} + y_{3K} \cos \varphi_{23}. \end{aligned} \right\} \quad (4.110)$$

Положення точки K в системі координат O_1, x_1, y_1 при переході від системи O_2, x_2, y_2 :

$$\left. \begin{aligned} x_{1K} &= x_{2K} \cos \varphi_{12} - y_{2K} \sin \varphi_{12} + l_1, \\ y_{1K} &= x_{2K} \sin \varphi_{12} + y_{2K} \cos \varphi_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (4.111)$$

Положення точки K в системі координат O, x_0, y_0 при переході від системи O_1, x_1, y_1 :

$$\left. \begin{aligned} x_{0K} &= x_{1K} \cos \varphi_{01} - y_{1K} \sin \varphi_{01}, \\ y_{0K} &= x_{1K} \sin \varphi_{01} + y_{1K} \cos \varphi_{01}. \end{aligned} \right\} \quad (4.112)$$

Сумісний розв'язок систем лінійних рівнянь (4.110), (4.111), (4.112) із шістьма невідомими дає можливість знайти положення точки K в системі координат O, x_0, y_0 .

Скористуємось матричною формою запису параметрів перетворення координат.

Так, коефіцієнти в рівнянні (4.110) дають матрицю виду:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{23} & -\sin \varphi_{23} & l_2 \\ \sin \varphi_{23} & \cos \varphi_{23} & 0 \end{vmatrix}.$$

Аналогічні матриці можна отримати також для рівнянь (4.111) і (4.112). Як бачимо, це матриці порядку 2×3 .

Для отримання квадратних матриць порядку 3×3 , які можна множити, додамо до кожних з двох рівнянь виду (4.110), (4.111), (4.112) третє рівняння тотожності $1 \equiv 1$.

Тоді коефіцієнти правих частин, наприклад у рівнянні (4.110), із доданням тотожності $1 \equiv 1$ утворять наступну матрицю третього порядку:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{23} & -\sin \varphi_{23} & l_2 \\ \sin \varphi_{23} & \cos \varphi_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Аналогічну матрицю можна отримати також для рівняння (4.111):

$$M_{12} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{12} & -\sin \varphi_{12} & l_1 \\ \sin \varphi_{12} & \cos \varphi_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

і для рівняння і (4.112):

$$M_{01} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{01} & -\sin \varphi_{01} & 0 \\ \sin \varphi_{01} & \cos \varphi_{01} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

При цьому ліві частини рівнянь (4.110), (4.111), (4.112) із додаванням тотожності $1 \equiv 1$ також утворюють матриці-стовбці третього порядку:

$$\bar{r}_{2K} = \begin{Bmatrix} x_{2K} \\ y_{2K} \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}_{1K} = \begin{Bmatrix} x_{1K} \\ y_{1K} \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \bar{r}_{0K} = \begin{Bmatrix} x_{0K} \\ y_{0K} \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Аналогічно можна записати:

$$\bar{r}_{3K} = \begin{Bmatrix} x_{3K} \\ y_{3K} \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (4.113)$$

Далі рівняння (4.110), (4.111), (4.112) із додаванням тотожності $1 \equiv 1$ запишемо у вигляді, який відповідає добутку квадратної матриці третього порядку та матриці-стовбця того самого порядку:

$$\begin{aligned} \bar{r}_{2K} &= M_{23} \cdot \bar{r}_{3K}, \\ \bar{r}_{1K} &= M_{12} \cdot \bar{r}_{2K}, \\ \bar{r}_{0K} &= M_{01} \cdot \bar{r}_{1K}. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Підставивши значення перших двох рівнянь у третє рівняння системи (4.114), можна визначити координати x_{0K}, y_{0K} :

$$\bar{r}_{0K} = M_{01} \cdot M_{12} \cdot M_{23} \cdot \bar{r}_{3K}. \quad (4.115)$$

Помножимо матрицю M_{01} на M_{12} . Для цього скористаємось правилом множення рядка на стовець.

Тоді для елемента першого рядка і першого стовпця, отримаємо:

$$c_{11} = \cos \varphi_{10} \cos \varphi_{21} - \sin \varphi_{10} \sin \varphi_{21} = \cos \varphi_{20},$$

де $\varphi_{02} = \varphi_{12} + \varphi_{01}$.

Аналогічно визначимо всі інші елементи матриці M_{01} , M_{12} та, користуючись тригонометричними формулами для суми кутів, запишемо:

$$M_{01} \cdot M_{12} = \begin{Bmatrix} \cos \varphi_{02} & -\sin \varphi_{02} & l_1 \cos \varphi_{01} \\ \sin \varphi_{02} & \cos \varphi_{02} & l_1 \sin \varphi_{01} \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

Тепер помножимо отриману матрицю на матрицю M_{23} :

$$(M_{01} \cdot M_{12}) \cdot M_{23} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{03} & -\sin \varphi_{03} & l_2 \cos \varphi_{02} + l_1 \cos \varphi_{01} \\ \sin \varphi_{03} & \cos \varphi_{03} & l_2 \sin \varphi_{02} + l_1 \sin \varphi_{01} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (4.116)$$

де $\varphi_{03} = \varphi_{12} + \varphi_{02}$.

Помноживши квадратну матрицю (4.116) на стовпцеву матрицю (4.113) і повернувшись до звичайної координатної форми запису рівнянь, отримуємо:

$$\left. \begin{aligned} x_{0K} &= x_{3K} \cos \varphi_{03} - y_{3K} \sin \varphi_{03} + l_2 \cos \varphi_{02} + l_1 \cos \varphi_{01}, \\ y_{0K} &= x_{3K} \sin \varphi_{03} + y_{3K} \cos \varphi_{03} + l_2 \sin \varphi_{02} + l_1 \sin \varphi_{01}. \end{aligned} \right\} \quad (4.117)$$

Треба відмітити, що систему рівнянь (4.117) можна було б одержати із системи лінійних рівнянь (4.110), (4.111), (4.112), використовуючи звичайні алгебраїчні перетворення.

Але при цьому обчислення були б більш громіздкими.

Отже перевагою матричної форми запису рівнянь є використання формули множення матриць, що дає можливість послідовно виконувати перетворення координат.

Зауважимо, що рівняння (4.117) для визначення координат точки K можна одержати також методом замкнутих векторних контурів із рівнянь проєкцій контуру $O_1 O_2 O_3 K$ на нерухомі осі координат. Проте це спрощує розрахунки лише для плоских механізмів. При кінематичному аналізі просторових механізмів, навпаки, метод перетворення координат простіший.

Використовуючи рівняння (4.117), можна знайти координати будь-якої точки на ланці 3, тобто цілком визначити її положення.

Аналогічно можна визначити взаємні положення інших ланок механізму, причому для їхнього знаходження завжди отримують систему лінійних рівнянь.

Зрозуміло, що розрахунки просторових механізмів будуть більш громіздкими і складнішими, але принцип розрахунків той самий.

Плоский замкнений кінематичний ланцюг.

Далі визначимо положення ланок плоского незамкненого кінематичного ланцюга.

Треба відмітити, що більшість важельних механізмів мають у своїй будові замкнені кінематичні ланцюги.

Аналітичне дослідження таких ланцюгів являють собою задачу, яка споріднена тій, що розглянута вище.

В обох випадках використовуються рівняння перетворення

координат.

Із замкненого кінематичного ланцюга в результаті розмикання однієї кінематичної пари утворюється два відкритих (незамкнених) кінематичних ланцюги. Для кожного з них складаються рівняння перетворення координат. До них додаються рівняння, які витікають з рівнянь в'язей і накладаються кінематичними парами.

В результаті створюється система, як правило, нелінійна, із якої шукаються координати, що визначають положення кінематичного ланцюга.

Така задача є оберненою по відношенню до тієї, що розв'язана для відкритого (незамкненого) кінематичного ланцюга.

Тут по заданому положенню деякої точки або вхідної ланки визначаються відносні положення інших ланок. Адже пряма задача полягала у визначенні положення точки, яка належала деякій вихідній ланці, по заданому відносному положенню інших ланок.

Розглянемо розв'язок оберненої задачі на прикладі плоского кривошипно-повзунного механізму (рис. 4.82).

При кінематичному аналізі цього механізму мають бути заданими кут повороту ланки 1 як функції від часу, довжини ланок l_1 , l_2 і напрям руху точки B повзуна 3 в системі координат B, x_3, y_3 . Так як система плоска, то координата z тут відсутня.

Ступінь рухомості цього плоского механізму дорівнює одиниці.

Знайдемо положення точки B відносно стояка O в системі координат O, x_0, y_0 .

Для цього послідовно розглянемо положення цієї точки B в системх координат O_2, x_2, y_2 , O_1, x_1, y_1 , O, x_0, y_0 , які проведені із врахуванням розташування відповідно ланок 2, 1, 0.

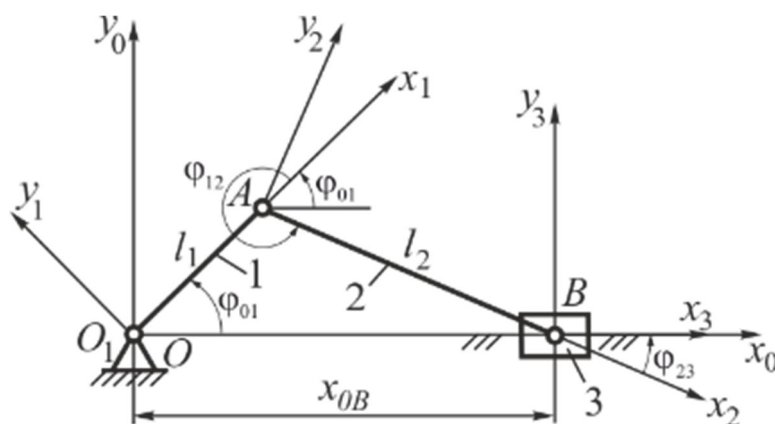


Рис. 4.82

Нерухому систему координат O, x_0, y_0 зв'яжемо із стояком і розташуємо таким чином, щоб вісь Ox_0 була паралельна напрямку руху повзуна 3.

Із кривошипом 1 жорстко зв'яжемо рухому систему координат O_1, x_1, y_1 , спрямувавши вісь O_1x_1 вздовж ланки 1. При цьому положення ланки 1 відносно нерухомої системи координат O, x_0, y_0 буде визначатись кутом повороту φ_{01} між осями Ox_0 і O_1x_1 .

Із шатуном 2 жорстко зв'яжемо рухому систему координат A, x_2, y_2 , спрямувавши вісь Ax_2 вздовж ланки 2. При цьому положення ланки 2 відносно ланки 1 буде визначатись кутом повороту φ_{12} між осями O_1x_1 і Ax_2 .

Із повзуном 3 жорстко зв'яжемо рухому систему координат B, x_3, y_3 , спрямувавши вісь Bx_3 вздовж траєкторії руху повзуна. При цьому положення ланки 3 відносно ланки 2 буде визначатись кутом повороту φ_{23} між осями Ax_2 і Bx_3 .

Тоді положення точки B повзуна відносно нерухомої системи координат O, x_0, y_0 визначиться матричним виразом

$$\bar{r}_{0B} = M_{03} \cdot \bar{r}_{3B}, \quad (4.118)$$

де M_{03} – матриця перетворень координат від рухомої системи B, x_3, y_3 до нерухомої системи O, x_0, y_0 ; \bar{r}_{3B} – радіус-вектор координат точки B в рухомій системі B, x_3, y_3 .

При цьому зрозуміло, що

$$M_{03} = M_{01} \cdot M_{12} \cdot M_{23},$$

$$\bar{r}_{3B} = \begin{pmatrix} x_{3B} \\ y_{3B} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

а матриці послідовних перетворень відповідно будуть визначатись наступними виразами:

$$M_{01} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{01} & -\sin \varphi_{01} & 0 \\ \sin \varphi_{01} & \cos \varphi_{01} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{12} & -\sin \varphi_{12} & l_1 \\ \sin \varphi_{12} & \cos \varphi_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{23} & -\sin \varphi_{23} & l_2 \\ \sin \varphi_{23} & \cos \varphi_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Перемноживши матриці між собою і помноживши на матрицю-стовпець, отримаємо радіус-вектор координат точки B у нерухомій системі координат O, x_0, y_0 :

$$\bar{r}_{0B} = \begin{vmatrix} l_1 \cos \varphi_{01} + l_2 \cos(\varphi_{01} + \varphi_{12}) \\ l_1 \sin \varphi_{01} + l_2 \sin(\varphi_{01} + \varphi_{12}) \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{0B} \\ y_{0B} \\ 1 \end{vmatrix}. \quad (4.119)$$

Тобто

$$\left. \begin{aligned} x_{0B} &= l_1 \cos \varphi_{01} + l_2 \cos \varphi_{02}, \\ y_{0B} &= l_1 \sin \varphi_{01} + l_2 \sin \varphi_{02} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.120)$$

де $\varphi_{02} = \varphi_{01} + \varphi_{12}$ – кут повороту другої ланки.

Ці рівняння аналогічні рівнянням, які отримані методом замкненого векторного контуру.

18.6. Експериментальні методи кінематичного дослідження механізмів

При застосуванні експериментальних методів дослідження механізмів кінематичні характеристики їх точок і ланок реєструються за допомогою датчиків. Датчики реєструють, а потім передають кінематичні параметри у пропорційні електричні сигнали, які після підсилення реєструються різними спеціальними приладами.

На сьогоднішній день для реєстрації та обробки результатів експериментальних досліджень використовують ЕОМ.

На рис. 4.83 показана експериментальна установка для дослідження кінематичних характеристик прес-автомата.

В цій експериментальній установці для вимірювань переміщень вихідної ланки механізму використовується потенціометричний датчик переміщення, в якому пропорційно положенню движка потенціометра

змінюється його опір.

При вимірюванні швидкості вихідної ланки механізму тут застосовують індукційний датчик швидкості, в якому величина напруги на кінцях котушки, що рухається у полі постійного магніту, пропорційна швидкості руху цієї котушки.

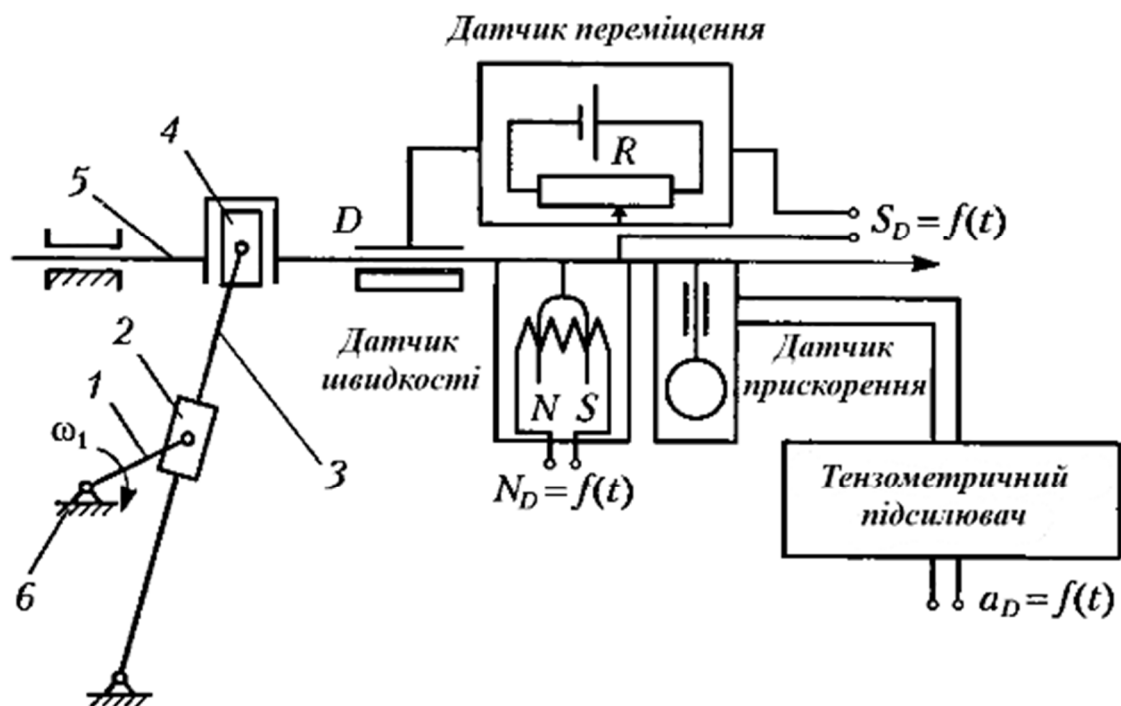


Рис. 4.83

При вимірюванні прискорення вихідної ланки механізму в установці використовується тензометричний акселерометр. Він складається з пластинчастої пружини, один кінець якої закріплений на вихідній ланці механізму, а на другому закріплена маса. На пластину наклеєні дротяні тензорезисторів. При русі вихідної ланки з прискоренням інерційність маси викликає вигин пластини, деформацію тензорезисторів і зміну їх опору пропорційно величині прискорення вихідної ланки.

Запитання для самоконтролю

41. Назвіть переваги застосування аналітичної кінематики механізмів.
42. Які аналітичні методи кінематичних досліджень механізмів Ви знаєте?
43. Що називається функцією положень ланки механізму?

-
44. Дайте визначення першої і другої передатної функції механізму.
 45. В чому полягає фізичний зміст передатних функцій?
 46. Які рівняння можна застосувати для визначення кінематичних параметрів елементарних плоских механізмів?
 47. В чому полягає метод замкнених векторних контурів? Яка послідовність його застосування?
 48. Наведіть приклад складання умови замкненості векторів контуру для плоского важільного механізму.
 49. Які особливості визначення переміщень, швидкостей і прискорень із векторних рівнянь замкненого контуру для важільних механізмів?
 50. Поясніть принцип погрупового методу кінематичного дослідження механізмів.
 51. В чому полягає метод перетворення? Які його переваги?
 52. Напишіть рівняння перетворення координат для рухомої координати відносно нерухомої на площині.
 53. Як визначити матричним методом положення ланок незамкненого кінематичного ланцюга?
 54. Як визначити матричним методом положення ланок замкненого кінематичного ланцюга?
 55. Як досліджується кінематика механізмів експериментальним методом?

ДИНАМІКА МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

У кінематиці дослідження руху ведеться тільки з врахуванням будови механізмів та геометричних співвідношень між розмірами ланок. Передбачається, що рух вхідних ланок відомий.

Рух вихідних ланок вивчається залежно від заданого руху вхідних ланок. За цих умов сили, моменти сил, інерційні властивості, які впливають на закономірності руху ланок механізму, не враховуються.

Динаміка вивчає дійсний рух механізмів із врахуванням усіх силових факторів, що на нього впливають.

Лише динамічний аналіз може виявити дійсну картину взаємодії ланок механізму і закони їх руху.

РОЗДІЛ 19. СИЛОВИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ

19.1. Задачі динаміки механізмів і машин

Динаміка механізмів і машин є розділом, в якому вивчають рух механізмів і машин із врахуванням діючих на них усіх силових факторів.

У цьому розділі досліджують загальні залежності між кінематичними параметрами механізму чи машини (його узагальненими координатами, швидкостями та прискореннями), масами його ланок і діючими на нього силами.

Розрізняють дві основні задачі динаміки механізмів і машин.

Перша задача зводиться до того, що за заданим графічно або аналітично законом руху механізму (законом руху початкової ланки) визначають діючі на нього зовнішні сили.

Це задача *силового аналізу чи розрахунку*. В теоретичній механіці така задача є прямою задачею динаміки.

Друга задача полягає в тому, що за заданими зовнішніми силами визначають закон руху механізму (закон руху початкової ланки).

Це задача *динамічного аналізу*. В теоретичній механіці така задача є оберненою задачею динаміки.

Класично в теорії механізмів і машин розглядають механізми із жорсткими ланками, що мають одну ступінь рухомості.

Основні рівняння руху таких механізмів у кінцевій і диференціальній формі витікають із теореми про зміну кінетичної енергії. Ця теорема наряду із принципом Д'Аламбера дає можливість розв'язати технічні задачі динаміки механізмів і машин, які ставить сучасна практика.

Але в останній час все більшого поширення набувають складні багатоприводні механізми із декількома ступенями вільності.

Крім цього, необхідний у деяких випадках більш точний розрахунок

звичайних механізмів із одним ступенем вільності, який обумовлений швидкохідністю сучасних машин, вимагає врахування пружних властивостей ланок цих механізмів та зазорів їх кінематичних пар.

У таких випадках механізм із одним ступенем вільності перетворюється в механічну систему, що має декілька ступенів вільності.

Для розв'язання задач динаміки механічних систем із декількома ступенями вільності методи, які використовують в класичній теорії механізмів і машин, є недієвими.

Такі задачі вимагають більш потужного апарату механіки та математики.

Наприклад – застосування диференціальних рівнянь руху механічних систем у лагранжевих та канонічних змінних, а також теорії лінійних і нелінійних коливань, що виходять за рамки даного курсу.

До розділу динаміки механізмів і машин крім основних двох задач входять також і інші задачі: розрахунок маховика і регуляторів швидкості; зрівноваження обертових мас і механізмів у цілому; визначення коефіцієнта корисної дії; дослідження коливань у машинах та їх віброзахист.

Таким чином, в задачах динаміки механізмів і машин рух ланок розглядається із урахуванням динамічних параметрів механічної системи: силових (сил і моментів сил); інерційних (мас і моментів інерції); кінематичних (лінійних і кутових прискорень).

При цьому залежно від характеру задач застосовують різні класифікації сил.

Згідно першої класифікації діючі на механічну систему сили ділять на *задані сили (активні)* і *сили реакцій в'язей*.

Згідно другої класифікації діючі на систему сили ділять на *зовнішні* та *внутрішні* по відношенню до цієї системи.

Згідно третьої класифікації сили, що діють на механізм або машину, ділять на *рушійні сили* і *сили опору*.

19.2. Механічні характеристики робочих машин і двигунів

У загальному випадку рушійні сили і сили опору (або їх моменти) є функціями ряду кінематичних параметрів: узагальненої координати (лінійної, дугової або кутової), швидкості (лінійної або кутової), прискорення (лінійного або кутового) та часу.

Аналітичні або графічні залежності рушійних сил (моментів) або сил (моментів) опору від кінематичних параметрів називаються механічними характеристиками відповідно двигуна або робочої машини.

Такі залежності визначаються в основному експериментально.

Механічними характеристиками двигуна і робочої машини також можуть бути і залежності від кінематичних параметрів потужностей рушійних сил і сил опору.

Розглянемо деякі механічні характеристики двигунів і робочих машин.

Найчастіше використовуються залежності моменту $M = M(\omega)$ і потужності $N = N(\omega)$ від кутової швидкості ω веденого валу двигуна або ведучого валу робочої машини, які представлені на рис. 4.84.

Типовими є механічні характеристики електродвигунів постійного струму із паралельним (рис. 4.84, а) та послідовним (рис. 4.84, б) збудженням. Залежність $M = M(\omega)$ тут в обох випадках завжди спадна (суцільною лінією).

Тобто електродвигун працює стійко при любых значеннях ω .

Збільшення навантаження призводить до зменшення кутової швидкості до такого значення, при якому електродвигун здатен подолати нове навантаження за рахунок збільшення моменту рушійних сил.

І навпаки, зменшення навантаження призводить до збільшення кутової швидкості двигуна.

Як відомо, потужність і момент зв'язані співвідношенням $N = M\omega$. Залежність $N = N(\omega)$ показана пунктиром.

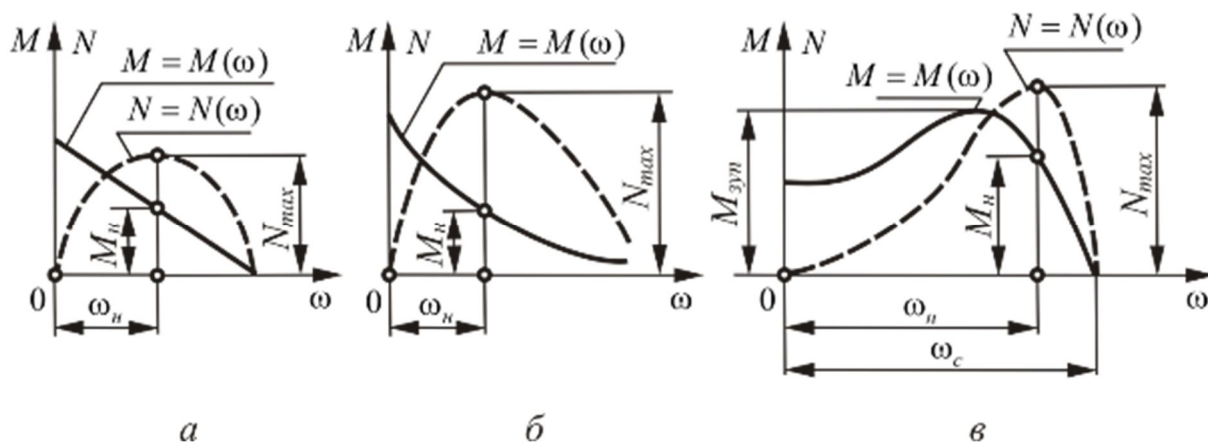


Рис. 4.84

Більш складною є характеристика асинхронного електродвигуна змінного трифазового струму (рис. 4.84, в).

На спадній частині характеристики двигун працює стійко, на зростаючій частині – ні.

Тобто, якщо момент опору перевищить момент рушійних сил, то двигун зупиниться.

Кутова швидкість $\omega = \omega_n$, при якій електродвигун розвине максимальну потужність, називається *номінальною кутовою швидкістю*, а відповідний їй момент $M = M_n$ – *номінальним моментом двигуна*.

Кутова швидкість $\omega = \omega_c$, при якій $M = 0$, називається *синхронною кутовою швидкістю*.

Механічні характеристики робочих машин (рис. 4.85, а) є звичайно зростаючими кривими.

Це пояснюється тим, що при збільшенні швидкості руху машин сили опору, сили тертя і ін. також збільшуються.

Такий вид мають, наприклад, характеристики відцентрових насосів, компресорів, вентиляторів.

Механічні характеристики двигуна внутрішнього згорання показані на рис. 4.85, б.

Тут залежності середнього за цикл руху моменту (суцільна лінія) та потужності (пунктирна лінія) від кутової швидкості ω колінчастого валу за характером схожі із залежностями асинхронного електродвигуна змінного струму (рис. 4.84, в).

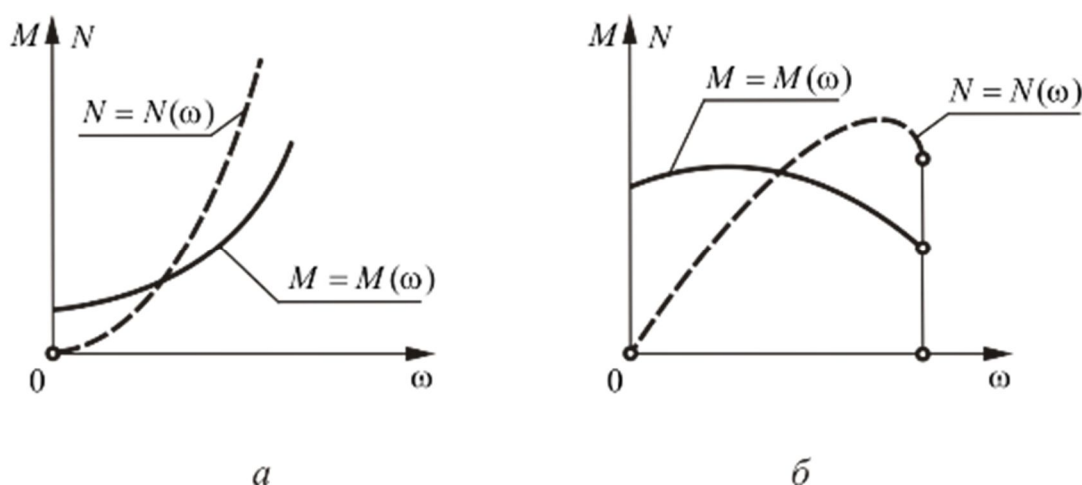


Рис. 4.85

Для чотиритактового двигуна внутрішнього згорання закон зміни тиску p газу в циліндрі може бути заданий *індикаторною діаграмою* – залежністю $p = p(s)$, де s – переміщення поршня у циліндрі двигуна (рис. 4.86).

Повний цикл роботи двигуна відбувається за два повних оберти його кривошипу.

За першу половину оберту кривошипу паливна суміш всмоктується в

робочий простір циліндра двигуна (фаза всмоктування ab), за другу половину першого оберту – паливна суміш стискається (фаза стиску bc).

Далі буде фаза згоряння і розширення ce та фаза вихлопу відпрацьованих газів ea .

Кожній з цих фаз на індикаторній діаграмі відповідають криві зміни тиску в циліндрі (рис. 4.86, б).

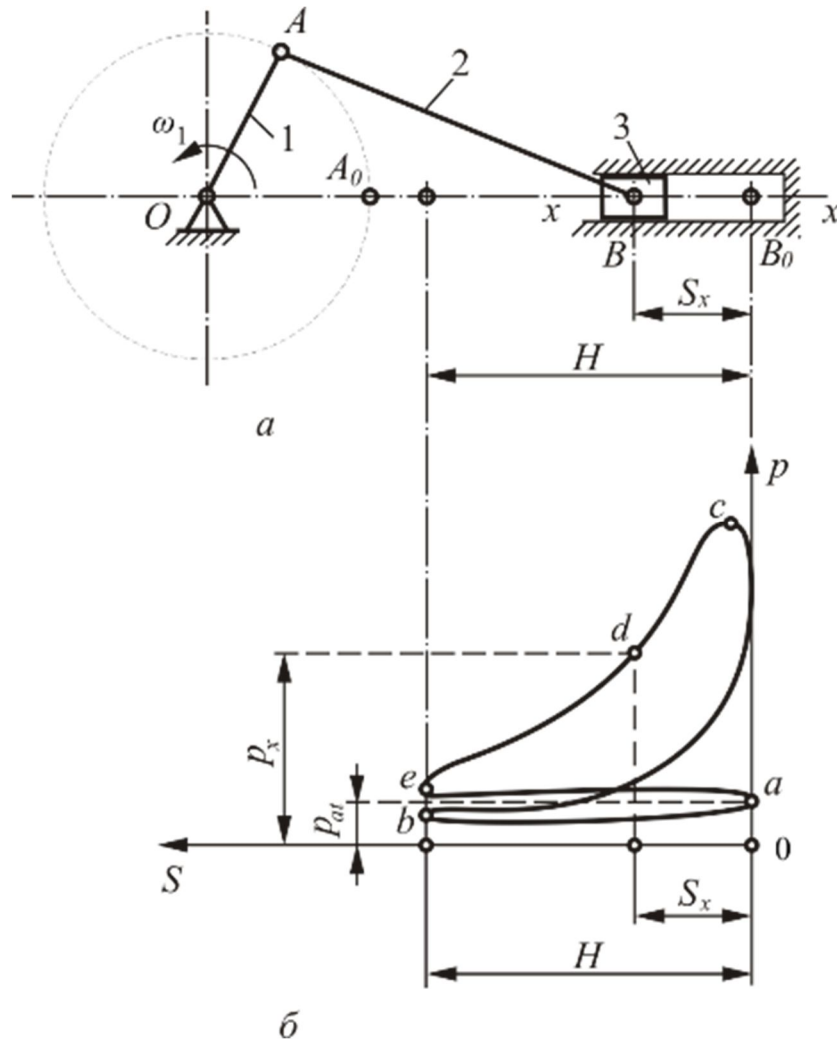


Рис. 4.86

Надлишковий тиск $p_{над}$, що діє на поршень двигуна, дорівнює різниці тиску газу в робочому просторі циліндра p_x та атмосферного тиску p_{at} :

$$p_{над} = p_x - p_{at}$$

Тоді сила, що діє на поршень, визначається як:

$$P = p_{\text{над}} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4},$$

де d – діаметр поршня циліндра.

Для зручності проведення подальших розрахунків у кожному із послідовних положень механізму, починаючи з нульового, визначається ордината p графіка $p(s)$ у напрямі ходу процесу і переноситься на графік $p(\varphi)$ (рис. 4.87) або заноситься в таблицю.

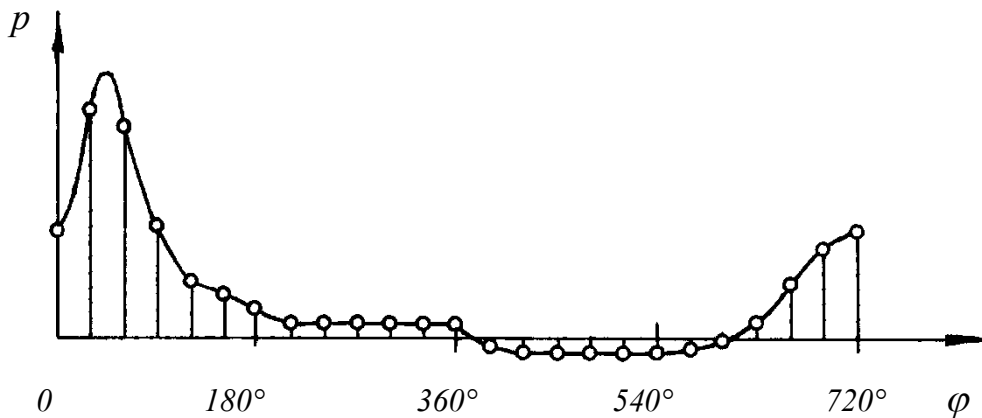


Рис. 4.87

Для стругального верстату механічна характеристика надається у вигляді залежності сили F різання від переміщення різця s (рис. 4.88). Як бачимо, ця залежність прямолінійна.

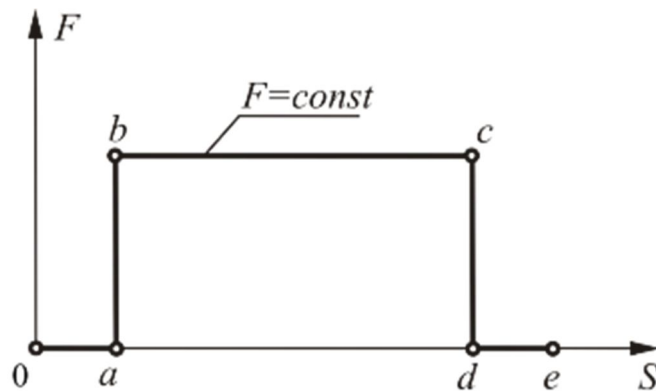


Рис. 4.88

19.3. Сили, які діють на ланки механізмів, та їх характеристики

Як вже було відмічено вище, в теорії механізмів і машин розрізняють наступні сили:

Рушійні сили – це сили, робота яких в даний момент часу буде додатною.

Рушійні сили забезпечують рух механізму і машини і збільшують енергію механічної системи. Напрямки рушійної сили і швидкості або збігаються, або утворюють між собою гострий кут.

До рушійних сил можна віднести тиск газу, пари, рідини, повітря, електромагнітні сили, сили пружності.

Сили опору – це сили, робота яких в даний момент часу буде від'ємною.

Сили опору сили зменшують енергію механічної системи. Напрямки сил опору і швидкості або протилежні, або утворюють між собою тупий кут.

Сили опору поділяються на сили корисного опору, для подолання яких саме і призначений механізм або машина та сили шкідливого опору, до яких належать, наприклад, сили тертя в кінематичних парах.

Прикладом сил корисного опору може бути опір деревини різанню в деревообробних станках, опір ґрунту при його обробці і т.п.

Сили тяжіння або ваги – це сили які виникають у гравітаційному полі землі.

Існують також електромагнітні, електростатичні та інші поля і відповідно – електромагнітні сили, електростатичні і т.п.

Сили тяжіння проявляють себе при зміні положення центра ваги ланок механізму і машини відносно горизонту.

Сили інерції – виникають при криволінійному або прямолінійному нерівномірному русі ланок механізмів і машин, тобто при зміні швидкості ланок за величиною чи напрямком.

Треба відмітити, що сили тяжіння та сили інерції залежно від напрямку їх дії у різні проміжки часу можуть бути або рушійними, або силами опору.

Наприклад, в двигунах внутрішнього згорання тиск газів на поршень при такті розширення є рушійною силою, а при такті стискання – силою опору.

Сила ваги ланки при її опусканні є рушійною, а при підйманні – силою опору.

Сили реакцій в кінематичних парах – це сили тиску однієї ланки на другу. Робота цих сил не змінює енергію механічної системи.

Зведені сили – це сили, які здійснюють роботу по узагальненій координаті відповідно роботі реальної сили на еквівалентному переміщенні її точки прикладання.

Цілком зрозуміло, що у випадку обертання можуть також існувати відповідні моменти сил.

19.4. Сили інерції ланок плоских механізмів

Сили інерції і моменти сил інерції з'являються при нерівномірному русі ланок механізмів і машин і можуть суттєво вплинути на їх динамічні характеристики.

Інерційне навантаження приводить до виникнення в ланках додаткових напружень та додаткових тисків в кінематичних парах, що збільшує тертя, знос і зменшує коефіцієнт корисної дії.

Крім цього сили інерції спричиняють удари, коливання і тим самим ще більше впливають на нерівномірність руху механізмів та машин.

Розглянемо інерційне навантаження ланок у випадках їх поступального, обертального і плоскопаралельного рухів.

1. У випадку поступального руху i -ї ланки механізму (рис. 4.89) її сила інерції \bar{F}_{I_i} спрямована протилежно вектору прискорення центра мас \bar{a}_{S_i} і за величиною визначається як:

$$F_{I_i} = m_i \cdot a_{S_i}, \quad (4.121)$$

де m_i – маса i -ї ланки, кг.

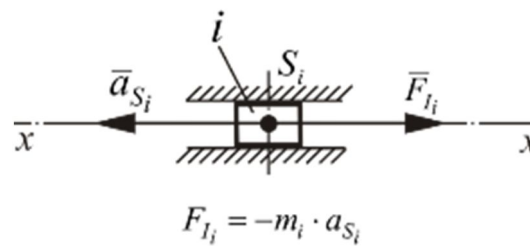


Рис. 4.89

2. У випадку обертального руху i -ї ланки механізму її інерційне навантаження може бути наступним (рис. 4.90, 4.91).

При обертанні диску із постійною кутовою швидкістю $\omega_i = const$ (рис. 5.7 а) сила інерції \bar{F}_{I_i} ланки і момент сили інерції M_{I_i} відсутні.

При нерівномірному обертанні диску (рис. 4.90, б) сила інерції \bar{F}_{I_i} ланки відсутня, а момент сили інерції M_{I_i} спрямований протилежно кутовому прискоренню ε_i і за величиною дорівнює:

$$M_{I_i} = J_{S_i} \cdot \varepsilon_i, \quad (4.122)$$

де J_{S_i} – момент інерції i -ї ланки відносно її центру мас S_i , $\text{кг} \cdot \text{м}^2$.

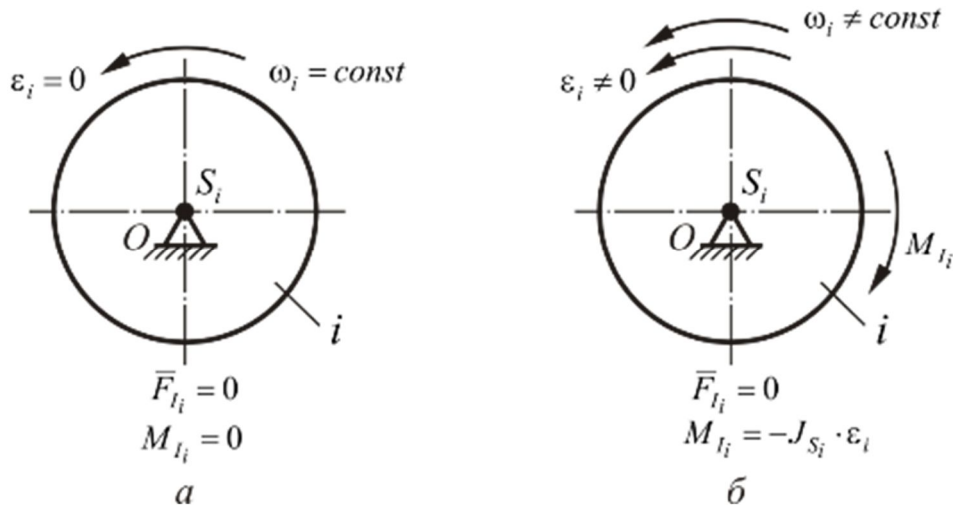


Рис. 4.90

При рівномірному обертанні із постійною кутовою швидкістю $\omega_i = \text{const}$ жорсткого стержня відносно його закріпленого кінця O (рис. 4.91, *a*) момент сили інерції M_{I_i} відсутній, а сила інерції \bar{F}_{I_i} ланки прикладена в точці зосередження маси S_i і спрямована протилежно нормальній складовій прискорення $\bar{a}_{S_i}^n$.

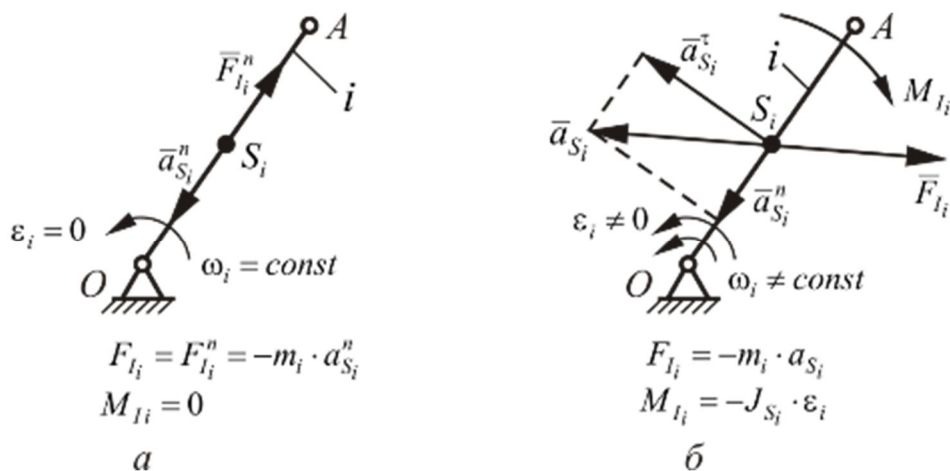


Рис. 4.91

За величиною \bar{F}_{I_i} визначається:

$$F_{I_i} = F_{I_i}^n = m_i \cdot a_{S_i}^n, \quad (4.123)$$

При нерівномірному обертанні жорсткого стержня відносно його закріпленого кінця (рис. 4.91, б) сила інерції \bar{F}_{I_i} ланки прикладена в точці зосередження маси S_i і спрямована протилежно загальному вектору прискорення $\bar{a}_{S_i} = \bar{a}_{S_i}^n + \bar{a}_{S_i}^r$, а момент сили інерції M_{I_i} спрямований протилежно кутовому прискоренню ε_i .

За величиною \bar{F}_{I_i} і M_{I_i} визначаються формулами (4.121) і (4.122) відповідно.

3. У випадку плоскопаралельного руху i -ї ланки механізму її інерційне навантаження зводиться до головного вектора сил інерції \bar{F}_{I_i} , який прикладається в центрі мас ланки S_i і головного моменту сил інерції M_{I_i} (рис. 4.92, а).

Сила інерції \bar{F}_{I_i} і момент сил інерції M_{I_i} спрямовані протилежно відповідно загальному лінійному \bar{a}_{S_i} і кутовому ε_i прискоренням, а за величиною визначаються формулами (4.121) та (4.122).

Слід зауважити, що в загальному випадку плоскопаралельного руху ланки дію сили інерції \bar{F}_{I_i} і моменту сил інерції M_{I_i} інколи зручно замінити однією результуючою силою \bar{F}'_{I_i} (рис. 4.92, б).

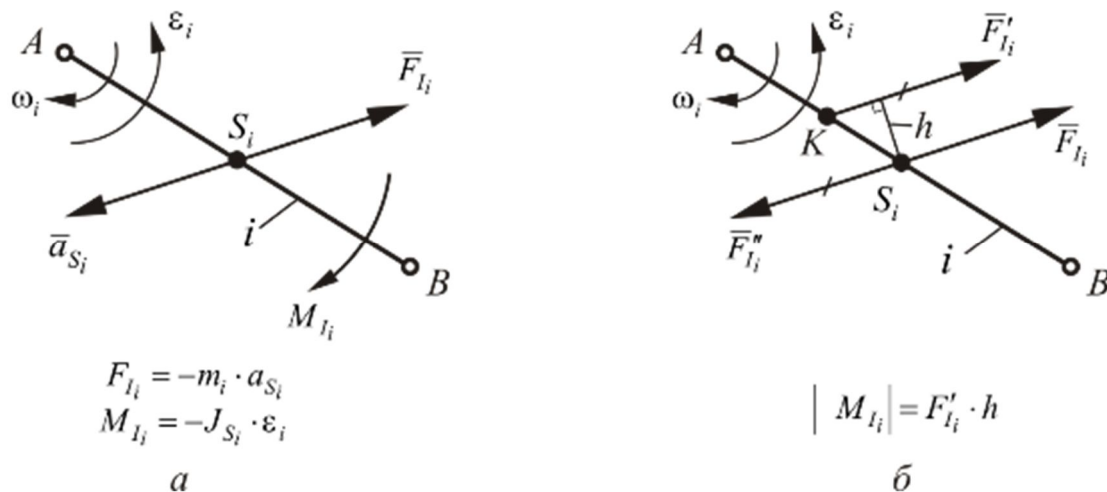


Рис. 4.92

Для цього треба силу інерції \bar{F}_{I_i} перенести паралельно самій собі з точки S_i в точку K на відстань h (плече) так, щоб момент цієї сили відносно S_i за величиною дорівнював моменту M_{I_i} :

$$|M_{I_i}| = F'_{I_i} \cdot h,$$

або, щоб плече перенесеної сили інерції дорівнювало співвідношенню

$$h = \frac{M_{I_i}}{F_{I_i}}. \quad (4.124)$$

У цьому випадку складова \bar{F}_{I_i}'' пари сил $(\bar{F}_{I_i}', \bar{F}_{I_i}'')$ з моментом M_{I_i} зрівноважить силу \bar{F}_{I_i} , що прикладена в точці S_i .

В результаті ланка буде навантажена тільки однією силою $\bar{F}_{I_i}' = \bar{F}_{I_i}$ в точці K . Ця точка називається *центром коливання* ланки.

19.5. Умова статичної визначеності плоского кінематичного ланцюга

Розглянемо першу задачу динаміки механізмів і машин – задачу силового аналізу або силового розрахунку.

Така задача для плоских механізмів полягає в тому, що при відомих кінематичних характеристиках і зовнішніх силах треба визначити реакції в кінематичних парах та зрівноважувальну силу або зрівноважувальний момент.

Для цього застосовують метод кінетостатики, який дозволяє задачі динаміки формально звести до задач статички. Тому його ще називають кінетостатичним дослідженням механізмів.

При кінетостатичному дослідженні плоского кінематичного ланцюга виникає необхідність виділення певних груп ланок і визначення умов їх рівноваги.

Розглянемо умову статичної визначеності для плоского кінематичного ланцюга. При цьому будемо виходити з наступних міркувань.

Механізм може вважатись плоским у силовому відношенні тільки тоді, коли всі діючі сили і моменти сил знаходяться у площині його зображення. В плоскому механізмі кінематичні пари можуть бути нижчі (шарніри і поступальні пари) і вищі, де стикання елементів відбувається у точці або лінії.

В обертальній кінематичній парі (рис. 4.93, *a*) тиск на циліндричній поверхні розподілений за певним законом у залежності від приробки поверхонь контакту, пружних властивостей матеріалу, мащення і т.ін.

Якщо силами тертя знехтувати, то результуюча реакція \bar{F}_{ij} , що

прикладена до ланки i із боку ланки j , проходить через центр шарніра O . Величина і напрямок цієї реакції будуть невідомими.

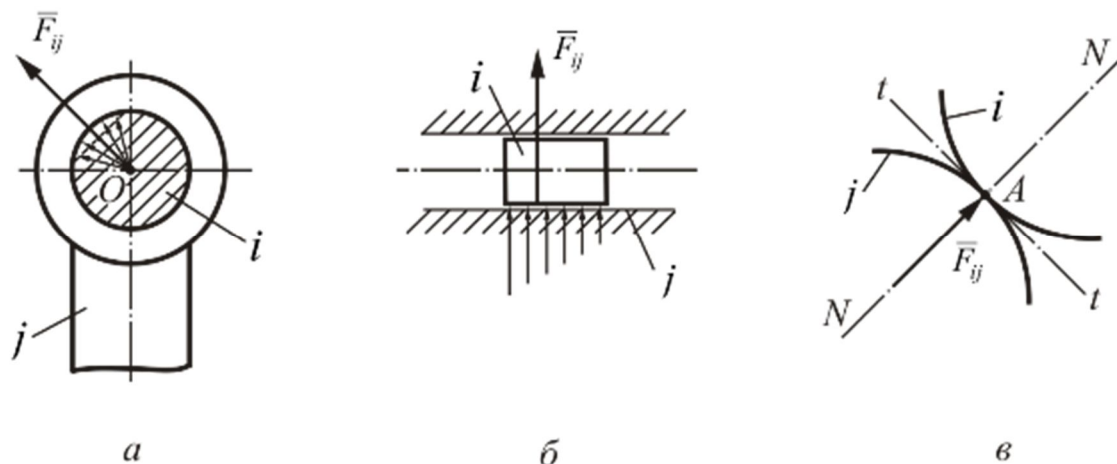


Рис. 4.93

В поступальній кінематичній парі (рис. 4.93, б) результуюча реакція \bar{F}_{ij} спрямована по нормалі до направляючих j , але величина та точка її прикладання лишаються невідомими.

У вищій кінематичній парі (рис. 4.93, в) реакція \bar{F}_{ij} прикладена в точці A дотику двох профілів і спрямована уздовж спільної нормалі $N - N$. Тут буде невідомою величина цієї реакції.

Таким чином, в плоскому кінематичному ланцюгу для кожної нижчої кінематичної пари V класу двома невідомими параметрами, які підлягають визначенню кінетостатичним розрахунком, є: для обертальної пари – величина реакції та її напрямок, а для поступальної – величина реакції та точка її прикладання.

Відповідно для p_1 однорухомих пар V класу число невідомих складає $2p_1$.

Для кожної вищої кінематичної пари IV класу визначенню підлягає тільки одна невідома – величина реакції.

Відповідно для p_2 дворухомих пар IV класу число невідомих дорівнює p_2 .

Тоді для кожної рухомої ланки плоского кінематичного ланцюга можна скласти три рівняння рівноваги, а для n ланок – $3n$ рівнянь.

Прирівнюючи число рівнянь рівноваги з числом невідомих, одержимо наступну умову статичної визначеності плоского кінематичного ланцюга:

$$3n = 2p_1 + p_2,$$

або

$$3n - 2p_1 - p_2 = 0. \quad (4.125)$$

Отримане рівняння встановлює відповідність між числом ланок та кількістю кінематичних пар статично визначеного плоского кінематичного ланцюга.

Для важільного механізму, до складу якого входять тільки кінематичні пари V класу умова статичної визначеності буде

$$3n = 2p_1,$$

звідки

$$p_1 = \frac{3}{2}n. \quad (4.126)$$

Остання умова статичної визначеності груп ланок співпадає з умовою, якому відповідають групи Ассура.

Це означає, що група Ассура є статично визначеним кінематичним ланцюгом.

Використовуючи цей висновок, повний кінетостатичний розрахунок плоского механізму можна замінити кінетостатичним розрахунком елементарних груп Ассура, на які розкладається механізм.

Таким чином, силовий розрахунок необхідно виконувати, шляхом поділу механізму на групи Ассура.

Для початкового механізму (кривошипу) також можна скласти три рівняння рівноваги.

Невідомих тут також буде три – це величина реакції в кінематичній парі, її напрямок та прикладений до кривошипа зрівноважувальний момент.

Тобто, кривошип є також статично визначеним.

У випадку, якщо сили і моменти сил плоского механізму не знаходяться у площині його зображення, то він буде статично невизначеним.

Тоді тут необхідно буде скласти додаткові умови рівноваги із використанням теорії пружності.

19.6. Послідовність проведення кінетостатичного дослідження

Кінетостатичне дослідження механізмів проводиться в наступній послідовності:

- механізм розбивають на окремі групи Асура;
- до кожної групи Асура послідовно прикладають усі зовнішні сили, включаючи сили та моменти сил інерції, а до вільних елементів кінематичних пар – їх реакції;
- розглянувши рівновагу кожної з груп Асура під дією отриманих систем сил, визначають невідомі величини реакцій;
- кінетостатичний силовий розрахунок механізму починають з останньої (по відношенню до вхідної ланки) приєднаної групи Асура і закінчують розрахунком початкового механізму (механізму I класу).

Тобто силовий розрахунок проводять у порядку, оберненому до порядку кінематичного розрахунку.

Взагалі існують наступні види силового розрахунку плоских механізмів і машин.

1. *Статичний силовий розрахунок*, який застосовують для механізмів і машин, що перебувають у стані спокою або рухаються з малими швидкостями.

Сили інерції при таких розрахунках не враховуються, а реакції визначаються шляхом складання і розв'язання рівнянь статичної рівноваги, відомими з теоретичної механіки:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = 0; \\ \sum_{i=1}^m M_i = 0, \end{cases} \quad (4.127)$$

де \bar{F}_i – зовнішні сили, які прикладені до ланок механізму; M_i – зовнішні моменти пар сил, які прикладаються до ланок механізму.

2. *Кінетостатичний силовий розрахунок*, який враховує сили (моменти сил) інерції і дає можливість визначити зусилля, які необхідні для подальших розрахунків ланок на міцність, жорсткість та визначення їх раціональних конструктивних форм.

При кінетостатичному розрахунку використовують принцип Д'Аламбера (метод кінетостатики).

Умова кінетостатичної рівноваги має вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \bar{F}_i + \sum_{i=1}^l \bar{F}_{I_i} = 0; \\ \sum_{i=1}^m M_i + \sum_{i=1}^l M_{I_i} = 0, \end{cases} \quad (4.128)$$

де \bar{F}_{I_i} – сили інерції, що прикладені до i -х ланок; M_{I_i} – моменти сил інерції, що прикладені до i -х ланок.

3. *Кінетостатичний силовий розрахунок, що враховує сили тертя.*

Такий розрахунок виконується після визначення всіх параметрів сил тертя в кінематичних парах та розмірів елементів кінематичних пар.

Звичайно найчастіше застосовують кінетостатичний силовий розрахунок.

19.7. Силовий аналіз механізмів II класу графоаналітичним методом

Розглянемо графоаналітичний метод силового аналізу плоских механізмів II класу, який передбачає графічне визначення реакцій в кінематичних парах шляхом побудови планів сил.

Перевага такого методу у його простоті та наочності.

Стосовно точності цього методу, то треба відмітити, що зовнішні сили, які діють на ланки механізму, звичайно відомі лише дуже приблизно.

Отже точність простих графічних побудов часто виявляється цілком достатньою.

Власно силовий аналіз зводиться не тільки до визначення реакцій в кінематичних парах та зрівноважувальної сили або моменту, а і до знаходження величин сил інерції ланок механізму і їх точок прикладання, а також визначення моментів сил інерції ланок.

Тому перед тим як безпосередньо перейти до кінетостатичного силового розрахунку, треба зробити ряд попередніх операцій: провести кінематичний розрахунок із побудовою планів швидкостей та прискорень механізму, визначити сили тяжіння і моменти інерції ланок відносно їх центрів мас, а також з'ясувати закон зміни зовнішніх сил.

Послідовність кінетостатичного розрахунку не може бути вибрана довільно і визначається структурою механізму.

У якості приклада наведемо силовий аналіз плоского важільного механізму (рис. 4.94), якщо задано: $\omega_1 = const$ – кутова швидкість кривошипа 1; \bar{F}_5 – зовнішня сила на повзуні 5; l_i – розміри ланок ($i = 1, 2, 3, 4$); m_i – маси ланок ($i = 1, \dots, 5$); J_{S_i} – моменти інерції ланок відносно їх центрів мас S_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Шуканими тут є реакції в кінематичних парах \bar{F}_{ij} , що прикладені до ланки i із боку ланки j , та зрівноважувачий момент, який прикладений до початкового механізму (кривошипа 1).

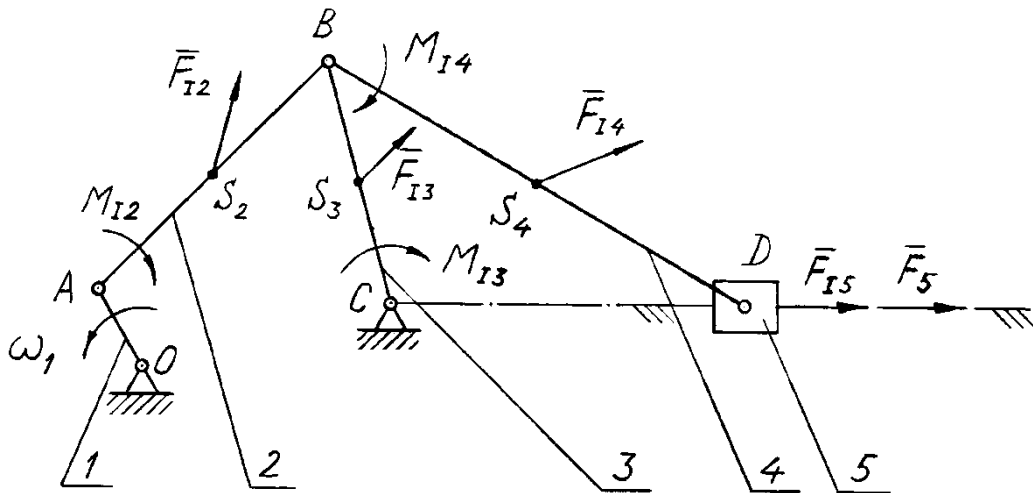


Рис. 4.94

Даний плоский механізм може бути розкладений на дві групи Ассура і початковий механізм l , що обертається навколо точки O .

За заданою кутовою швидкістю ω_1 кривошипа l та розмірами l_i ланок механізму будуюмо плани швидкостей і прискорень.

На плані прискорень знаходимо величину і напрямки векторів прискорень \bar{a}_{S_i} центрів мас S_i та кутових прискорень ε_i відповідних ланок.

Далі визначаємо сили тяжіння ланок :

$$\bar{G}_i = m_i \cdot \bar{g}, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Визначаємо також величину і напрямки сил інерції \bar{F}_{I_i} ланок:

$$\bar{F}_{I_i} = -m_i \cdot \bar{a}_{S_i}, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Напрями сил інерції \bar{F}_{I_i} ланок протилежні відповідним прискоренням \bar{a}_{S_i} центрів мас цих ланок, але в розрахунках використовуються абсолютні значення цих сил.

Визначаємо величину і напрямки моментів сил інерції ланок:

$$M_{I_i} = -\varepsilon_i \cdot J_{S_i}, \quad i = 2, 3, 4.$$

Напрями моментів сил інерції M_{I_i} ланок і відповідних кутових прискорень ε_i будуть протилежними, але розрахунках використовуються абсолютні значення цих моментів.

Прикладемо до кінематичної схеми механізму всі задані і знайдені сили і моменти сил та перейдемо до визначення реакцій в кінематичних парах.

19.8. Визначення реакцій в кінематичних парах. Плани сил

Згідно структурної класифікації заданого механізму спочатку проведемо силовий розрахунок останньої приєднаної групи Ассура (групи ланок 4 – 5) і визначимо реакції в кінематичних парах цієї групи.

Накреслимо останню приєднану групу Ассура в масштабі довжин μ_l (рис. 4.95, а).

Прикладемо до неї зовнішню силу корисного опору \bar{F}_5 , сили тяжіння, сили інерції та моменти сил інерції ланок.

В точці B на ланку 4 виділеної групи з боку ланки 3 діє реакція \bar{F}_{43} , яку розкладемо на нормальну \bar{F}_{43}^n і тангенціальну \bar{F}_{43}^τ складові.

Відповідно в точці D до ланки 5 виділеної групи з боку стояка O прикладена реакція \bar{F}_{50} , що спрямована по нормалі до направляючих $x - x$.

Для визначення реакцій в кінематичних парах виділеної групи ланок 4 – 5 розглянемо рівновагу цієї групи.

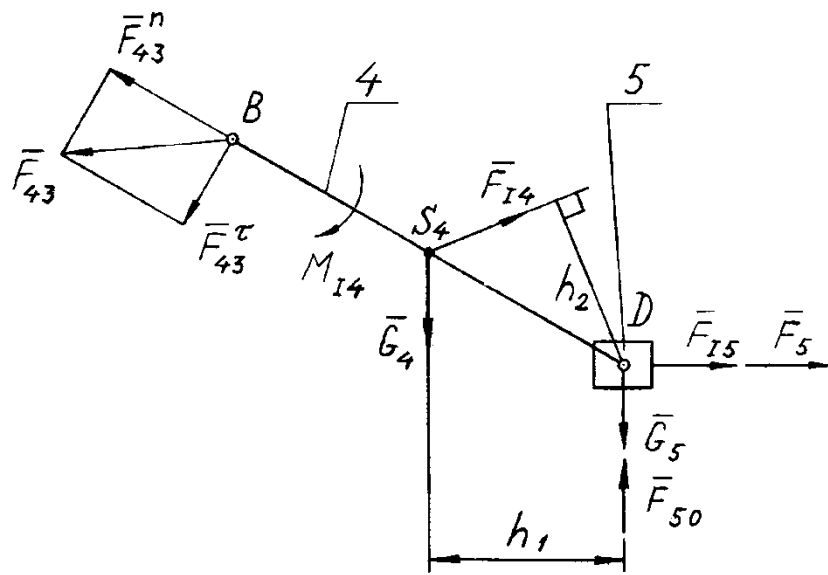
Величину тангенціальної складової реакції \bar{F}_{43}^τ знайдемо із аналітичного рівняння рівноваги групи (алгебраїчної суми моментів всіх сил відносно точки D):

$$\Sigma M_D = 0; F_{43}^\tau l_{BD} - M_{I4} + G_4 h_1 \mu_l - F_{I4} h_2 \mu_l = 0,$$

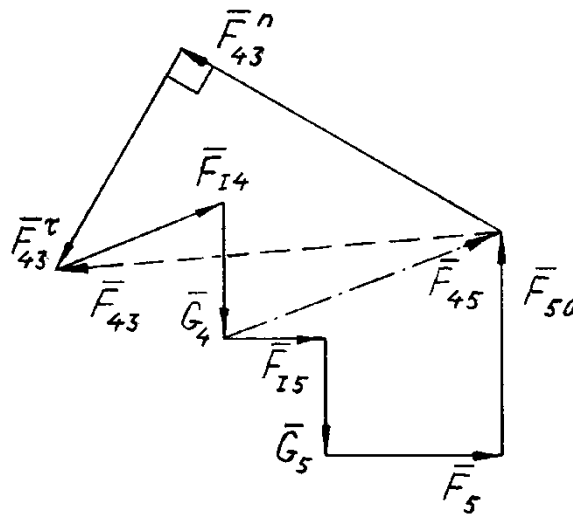
де h_i , мм, $i = 1, 2, \dots$, – довжина плечей сил, які визначається графічно на плані механізму у вибраному масштабі μ_l ; l_{BD} , м – задана довжина ланки 4.

Із останнього рівняння знаходимо

$$F_{43}^\tau = \frac{M_{I4} - G_4 h_1 \mu_l + F_{I4} h_2 \mu_l}{l_{BD}}.$$



a



б

Рис. 4.95

Якщо отримане значення реакції \bar{F}_{43}^{τ} буде від'ємним, треба змінити її напрям на протилежний, якщо ні – то напрям залишається без зміни як на розрахунковій схемі (рис. 4.95, a).

Невідому складову реакції \bar{F}_{43}^n і реакцію \bar{F}_{50} визначимо графічним

способом із векторного рівняння рівноваги групи (векторної суми всіх сил, що діють на групу ланок 4 – 5):

$$\Sigma \bar{F}_i = 0; \quad \bar{F}_{43}^{\tau} + \bar{G}_4 + \bar{F}_{I4} + \bar{F}_{I5} + \bar{G}_5 + \bar{F}_5 + \bar{F}_{50} + \bar{F}_{43}^n = 0.$$

Послідовність запису зазначеного векторного рівняння рівноваги вибираємо такою, щоб першою була записана вже знайдена реакція \bar{F}_{43}^{τ} , потім при обході групи ланок зліва направо – всі відомі за величиною та напрямом вектори сил, а останніми – реакції \bar{F}_{50} і \bar{F}_{43}^n , напрям яких відомий, а величина – ні.

На основі отриманого векторного рівняння рівноваги будуємо замкнений багатокутник сил, який називається *планом сил*.

Для цього вибираємо масштаб сил

$$\mu_F = \frac{F_i}{l_{F_i}},$$

де F_i , H – відома за величиною будь-яка i -та сила векторного рівняння; l_{F_i} , mm , – довжина відповідного відрізка на плані, що зображає цю силу.

У вибраному масштабі сил μ_F із довільної точки на площині відкладаємо першим вектор \bar{F}_{43}^{τ} , від його кінця – вектор \bar{F}_{I4} , потім – вектор \bar{G}_4 і т.д. у послідовності до складеного векторного рівняння рівноваги.

В останню чергу проводимо напрями невідомих векторів \bar{F}_{43}^n і \bar{F}_{50} відповідно від початку вектора \bar{F}_{43}^{τ} та кінця вектора \bar{F}_5 .

Точка перетину цих прямих обмежить довжину відрізків векторів \bar{F}_{43}^n та \bar{F}_{50} , і тим самим визначить їх величину:

$$F_{43}^n = l_{F_{43}^n} \cdot \mu_F,$$

$$F_{50} = l_{F_{50}} \cdot \mu_F,$$

де $l_{F_{43}^n}$, $l_{F_{50}}$, mm – довжини відрізків на плані, що зображають реакції \bar{F}_{43}^n і \bar{F}_{50} відповідно.

Напрям знайдених векторів \bar{F}_{43}^n та \bar{F}_{50} має бути таким, щоб отриманий силовий багатокутник був замкненим. Тобто, стрілки всіх векторів повинні відповідати одному і тому ж напрямку обходу контуру плану сил.

Сполучаючи на плані сил початок вектора \bar{F}_{43}^n з кінцем \bar{F}_{43}^τ , отримаємо повну реакцію \bar{F}_{43} :

$$\bar{F}_{43} = \bar{F}_{43}^n + \bar{F}_{43}^\tau.$$

Крім цього в точці D на ланку 4 з боку ланки 5 діє також реакція \bar{F}_{45} , яка дорівнює за величиною, але протилежна за напрямом реакції \bar{F}_{54} , що прикладена до ланки 5 з боку ланки 4:

$$\bar{F}_{45} = -\bar{F}_{54}.$$

Реакцію \bar{F}_{45} визначаємо також графічним способом із векторного рівняння рівноваги, що складається окремо для ланки 4.

Воно записується у такій самій послідовності, що і векторне рівняння рівноваги групи:

$$\Sigma \bar{F}_i = 0; \quad \bar{F}_{43} + \bar{G}_4 + \bar{F}_{14} + \bar{F}_{45} = 0.$$

Знаходимо на плані сил (рис. 5.12, б) послідовність відкладених векторів, яка відповідає векторній сумі: $\bar{F}_{43} + \bar{G}_4 + \bar{F}_{14}$.

Далі сполучаємо початок та кінець цього ланцюга і отримуємо реакцію \bar{F}_{45} .

Напрямок знайденої реакції \bar{F}_{45} має бути таким, щоб силовий багатокутник даної векторної суми був замкненим.

Перейдемо тепер до передостанньої приєднаної групи Ассура заданого плоского механізму (групі ланок 2 – 3).

Накреслимо цю групу в масштабі довжин μ_l (рис. 4.96, а). Прикладемо до неї сили тяжіння, сили інерції та моменти сил інерції ланок.

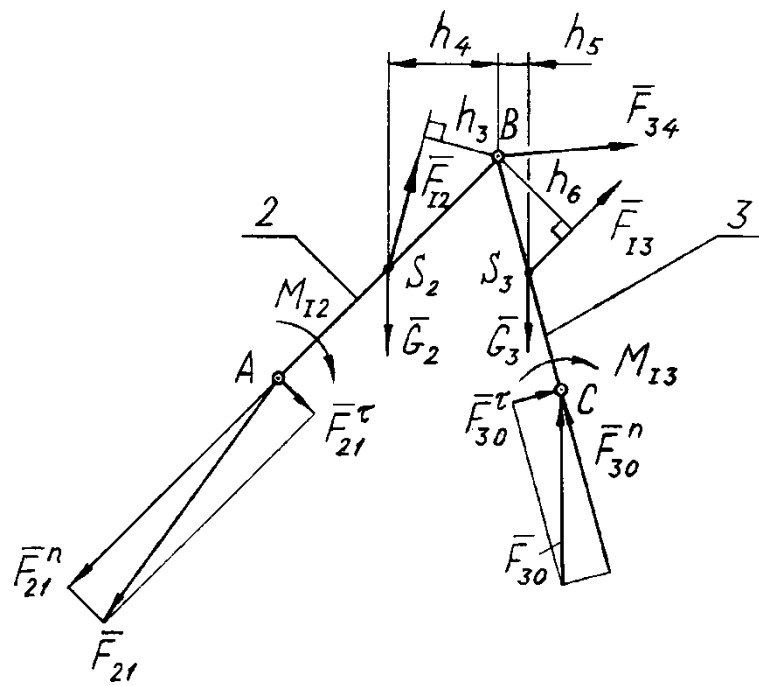
В точці A на ланку 2 виділеної групи з боку ланки 1 діє реакція \bar{F}_{21} , яку розкладемо на нормальну \bar{F}_{21}^n і тангенціальну \bar{F}_{21}^τ складові.

Аналогічно в точці C до ланки 3 виділеної групи з боку стояка 0 прикладена реакція \bar{F}_{30} , яка буде мати складові \bar{F}_{30}^n і \bar{F}_{30}^τ .

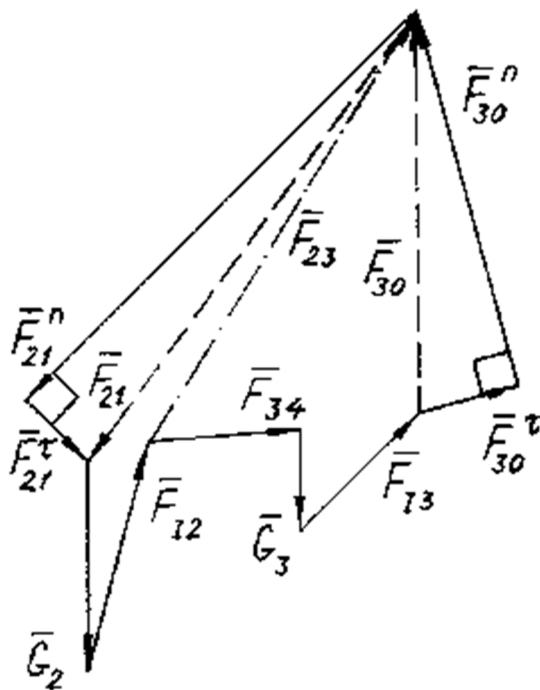
Покажемо ці невідомі реакції на плані групи і прикладемо також до точки B реакцію \bar{F}_{34} , яка діє на ланку 3 із боку ланки 4 (рис. 4.96, а).

Ця реакція за величиною дорівнює знайденої реакції \bar{F}_{43} , але має протилежний з нею напрям:

$$\bar{F}_{34} = -\bar{F}_{43}.$$



a



б

Рис. 4.96

Для визначення невідомих реакцій в кінематичних парах розглянемо рівновагу групи ланок 2 – 3.

Складемо окремо для ланки 2 і ланки 3 два аналітичних рівняння рівноваги (алгебраїчну суму моментів всіх сил відносно точки B , що діють на ланку 2 і ланку 3 відповідно):

$$\Sigma M_B = 0; F_{21}^{\tau} l_{AB} - M_{I2} + G_2 h_4 \mu_l - F_{I2} h_3 \mu_l = 0,$$

$$\Sigma M_B = 0; F_{30}^{\tau} l_{BC} - M_{I3} - G_3 h_5 \mu_l + F_{I3} h_6 \mu_l = 0,$$

де h_i , мм, $i = 1, 2, \dots$, – довжина плечей сил, що визначається графічно на плані механізму у вибраному масштабі μ_l ; l_{AB}, l_{BC} , м, – задана довжина ланок 2 і 3.

Звідки знаходимо величини тангенціальних складових реакцій \bar{F}_{21}^{τ} і \bar{F}_{30}^{τ} із наступних виразів

$$F_{21}^{\tau} = \frac{M_{I2} - G_2 h_4 \mu_l + F_{I2} h_3 \mu_l}{l_{AB}},$$

$$F_{43}^{\tau} = \frac{M_{I3} + G_3 h_5 \mu_l - F_{I3} h_6 \mu_l}{l_{BC}}.$$

Уточнюємо напрям отриманих реакцій \bar{F}_{21}^{τ} і \bar{F}_{30}^{τ} у відповідності до їх знаку і переходимо до визначення реакцій \bar{F}_{21}^n і \bar{F}_{30}^n .

Нормальні складові реакцій \bar{F}_{21}^n і \bar{F}_{30}^n отримаємо графічно методом побудови плану сил згідно векторного рівняння рівноваги всієї групи Ассура:

$$\Sigma \bar{F}_i = 0; \bar{F}_{21}^{\tau} + \bar{G}_2 + \bar{F}_{I2} + \bar{F}_{34} + \bar{F}_{I3} + \bar{G}_3 + \bar{F}_{30}^{\tau} + \bar{F}_{30}^n + \bar{F}_{21}^n = 0.$$

У вибраному масштабі сил μ_F із довільної точки на площині відкладаємо першим вектор \bar{F}_{21}^{τ} , від його кінця – вектор \bar{F}_{I4} , потім – вектор \bar{G}_4 і т.д. у послідовності до складеного векторного рівняння рівноваги.

Останніми проводимо напрями невідомих векторів \bar{F}_{30}^n і \bar{F}_{21}^n відповідно від початку вектора \bar{F}_{21}^{τ} та кінця вектора \bar{F}_{30}^{τ} .

Точка перетину цих прямих обмежить довжину відрізків векторів \bar{F}_{21}^n та \bar{F}_{30}^n і визначить їх величину:

$$F_{21}^n = l_{F_{21}^n} \cdot \mu_F,$$

$$F_{30}^n = l_{F_{30}^n} \cdot \mu_F,$$

де $l_{F_{21}^n}$, $l_{F_{30}^n}$, мм, – довжини відрізків на плані, що зображають реакції \bar{F}_{21}^n і \bar{F}_{30}^n відповідно.

Визначаємо напрями знайдених векторів \bar{F}_{21}^n і \bar{F}_{30}^n , таким чином, щоб побудований багатокутник сил був замкненим.

Знаходимо на плані сил повні реакції \bar{F}_{21} і \bar{F}_{30} через їх дотичні і нормальні складові:

$$\bar{F}_{21} = \bar{F}_{21}^n + \bar{F}_{21}^\tau.$$

$$\bar{F}_{30} = \bar{F}_{30}^n + \bar{F}_{30}^\tau.$$

Тепер знайдемо реакцію \bar{F}_{23} , що діє на ланку 2 з боку ланки 3.

Ця реакція дорівнює за величиною, але протилежна за напрямом реакції \bar{F}_{32} , яка прикладена до ланки 3 з боку ланки 2:

$$\bar{F}_{23} = -\bar{F}_{32}.$$

Реакцію \bar{F}_{23} визначаємо аналогічно, як і реакцію \bar{F}_{34} в групі ланок 2 – 3.

При цьому складемо векторне рівняння рівноваги ланки 2 у послідовності векторного рівняння рівноваги групи ланок 3 – 4:

$$\Sigma \bar{F}_i = 0; \quad \bar{F}_{21} + \bar{G}_2 + \bar{F}_{12} + \bar{F}_{23} = 0.$$

Знаходимо на плані сил (рис. 4.96, б) послідовність відкладених векторів, яка відповідає векторній сумі: $\bar{F}_{21} + \bar{G}_2 + \bar{F}_{12}$.

Сполучивши початок та кінець цього ланцюга векторів сил, отримуємо реакцію \bar{F}_{23} .

Напрямок реакції \bar{F}_{23} має відповідати умові замкненості силового багатокутника даної векторної суми.

19.9. Кінетостатика ведучої ланки механізму.

Зрівноважуюча сила і момент

Розглянемо тепер, як можна визначити реакцію в кінематичній парі, яку утворює із стояком O ведуча ланка I механізму (рис. 4.94).

В нашому випадку це обертальна кінематична пара V класу.

Із умови статичної визначеності плоского кінематичного ланцюга

впливає, що під дією довільних сил, у тому числі і сил інерції, ведуча ланка буде у рівновазі тільки при прикладанні до неї додатково невідомої сили або невідомого моменту, які відповідно називаються зрівноважуючою силою F_3 або зрівноважуючим моментом M_3 .

У протилежному випадку при відсутності зрівноважувальної сили F_3 або моменту M_3 число рівнянь рівноваги, які можна скласти буде менше на одиницю від числа невідомих, що треба визначити:

$$3n - 2p_1 = 3 - 2 = 1,$$

де $n = 1$ – число рухомих ланок; $p_1 = 1$ – число кінематичних пар V класу.

З'ясуємо, які ж сили і моменти будуть у механізмах і машинах зрівноважуваними.

Наприклад, при силовому розрахунку кривошипно-повзунного механізму одноциліндрового поршневого двигуна зрівноважуваними силою і моментом будуть реактивні сили або момент від сил опору тієї робочої машини, якій надає руху цей двигун.

При цьому, якщо колінчастий вал двигуна і головний вал робочої машини з'єднати за допомогою муфти, то матимемо у якості зрівноважуючого моменту прикладений до валу момент від сил опору робочої машини.

А якщо колінчастий вал двигуна з'єднати з головним валом робочої машини за допомогою зубчастої передачі, то матимемо за зрівноважуючу силу, що прикладена до зубчастого колеса валу двигуна, зведену силу від усіх сил опору робочої машини.

І навпаки, при силовому розрахунку ведучої ланки робочої машини зрівноважуваними силою або моментом будуть сила або момент, які розвиває двигун і які прикладені до ведучої ланки робочої машини.

На підставі вищевказаного проведемо силовий аналіз ведучої ланки заданого плоского механізму.

Для цього намалюємо механізм I класу в певному масштабі довжин μ_l (рис. 5.14, а).

Будемо вважати, що кривошип l зрівноважений і його центр мас S_1 знаходиться в точці O .

До цієї точки прикладемо силу тяжіння \overline{G}_1 кривошипа.

Оскільки прискорення точки O дорівнює нулю, то сила інерції кривошипа \overline{F}_{I_1} також дорівнює нулю.

В точці O на кривошип l буде діяти з боку стояка 0 реакція \overline{F}_{10} .

Покажемо цю невідому реакцію \overline{F}_{10} на плані механізму і прикладемо також до точки A кривошипа реакцію \overline{F}_{12} , яка діє на нього з боку ланки 2 (рис. 4.97, а).

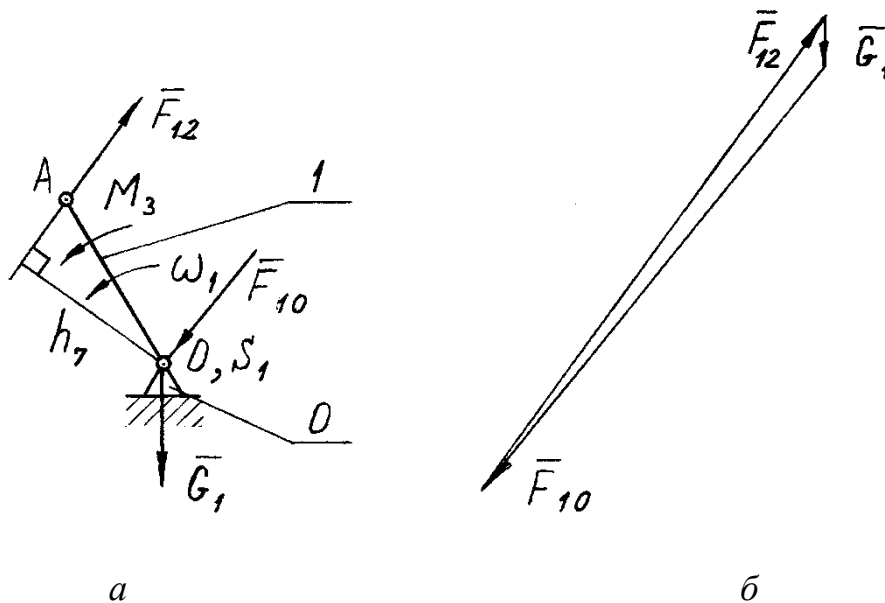


Рис. 4.97

Реакція \bar{F}_{12} за величиною дорівнює знайденій реакції \bar{F}_{21} , але має протилежний з нею напрям:

$$\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}.$$

З боку решти машинного агрегату, на кривошип буде діяти зрівноважуючий момент M_3 .

Величину зрівноважуючого моменту M_3 знайдемо із аналітичного рівняння рівноваги кривошипа I (алгебраїчної суми моментів всіх сил відносно точки O):

$$\Sigma M_O = 0; M_3 - F_{12} h_7 \mu_1 = 0,$$

де h_7 , мм, – довжина плеча сили \bar{F}_{12} , що визначається графічно на плані механізму у вибраному масштабі μ_1 .

З останнього рівняння знайдемо:

$$M_3 = F_{12} h_7 \mu_1.$$

Якщо отримане значення моменту M_3 буде від'ємним, треба змінити його напрям на протилежний, а якщо ні – то напрям залишається без зміни як на розрахунковій схемі (рис. 4.97, а).

Реакцію в кінематичній парі \bar{F}_{10} знаходимо з плану сил (рис. 4.97, б) відповідно до векторного рівняння рівноваги кривошипа I :

$$\Sigma \bar{F}_i = 0; \quad \bar{F}_{12} + \bar{G}_1 + \bar{F}_{10} = 0.$$

У вибраному масштабі сил μ_F із довільної точки на площині відкладаємо спочатку вектор \bar{F}_{12} , а від його кінця – вектор \bar{G}_1 .

Сполучаючи на плані сил кінець вектора \bar{G}_1 з початком \bar{F}_{12} , отримаємо реакцію \bar{F}_{10} .

Величина знайденої реакції \bar{F}_{10} буде:

$$F_{10} = l_{F_{10}} \cdot \mu_F,$$

де $l_{F_{10}}$, мм, – довжина відрізка на плані, що зображає реакцію \bar{F}_{10} .

Напрямок вектора \bar{F}_{10} має бути таким, щоб побудований силовий багатокутник був замкненим.

19.10. Важіль М.Є. Жуковського

Якщо при силовому розрахунку плоского механізму достатньо визначити тільки зрівноважуючу силу або зрівноважуючий момент без знаходження реакцій в кінематичних парах, то можна скористатись теоремою (методом) жорсткого важеля М.Є. Жуковського.

Прикладом таких задач є: визначення потужності та типу двигуна, моменту інерції маховика, характеристики регулятора та інші задачі динаміки.

В таких задачах співвідношення між силами, прикладеними до ланок механізму (включаючи і сили інерції), можна дістати, застосувавши теорему Жуковського: якщо для механізму, що перебуває в русі, побудувати план швидкостей, а потім вектори усіх активних сил та сил інерції, які прикладені в різних точках механізму, повернути на 90° в один і той же бік та перенести в однойменні точки плану швидкостей, то сума моментів цих сил відносно полюса буде дорівнювати нулю.

Замість сил зручніше повертати на 90° план швидкостей, а сили прикладати так, як вони показані на розрахунковій схемі механізму.

Тоді теорему Жуковського можна сформулювати наступним чином: *якщо до плану швидкостей, повернутого на 90° , у відповідних точках прикласти всі зовнішні сили (і моменти), сили інерції (і моменти сил інерції), а також зрівноважуючу силу (момент) і розглядати план швидкостей як жорсткий важіль, закріплений у полюсі, то під дією цих сил і моментів він буде перебувати в рівновазі, а сума моментів сил відносно полюса дорівнюватиме нулю.*

Отже рівновазі механізму відповідає рівновага повернутого плану швидкостей, який розглядається як “жорсткий важіль”, що шарнірно

закріплений в полюсі плану.

Доведення теореми ґрунтується на принципі можливих переміщень. При цьому для системи, що стаціонарні в'язі, які не залежать від часу, можливі переміщення співпадають із дійсними елементарними переміщеннями.

Згідно з цим

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot d\bar{S}_i \cos \alpha_i = 0,$$

де $d\bar{S}_i$ – дійсне елементарне переміщення точки, до якої прикладена сила \bar{F}_i ; α_i – кут між напрямком сили \bar{F}_i і переміщенням $d\bar{S}_i$.

Поділимо попередній вираз на dt і отримаємо

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \frac{d\bar{S}_i}{dt} \cdot \cos \alpha_i = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \cdot \bar{v}_i \cos \alpha_i = \sum_{i=1}^n N_i.$$

де \bar{v}_i – швидкість точки, до якої прикладена сила \bar{F}_i ; $\bar{v}_i \cos \alpha_i$ – проекція швидкості на лінію дії сили; N_i – миттєва потужність сили \bar{F}_i .

Нехай до якої-небудь ланки механізму (наприклад до шатуна AB) в точці K прикладена задана сила \bar{F}_i (рис.4.98, *a*).

Перенесемо цю силу в точку k на план швидкостей, який повернутий на 90° (рис.4.98, *б*).

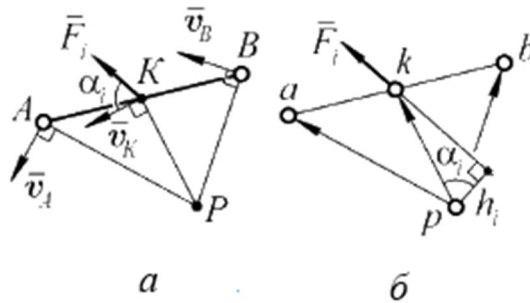


Рис. 4.98

Тоді потужність сили \bar{F}_i у цьому випадку може бути визначена як

$$\begin{aligned} N_i &= F_i \cdot \frac{dS_i}{dt} \cdot \cos \alpha_i = F_i \cdot v_K \cos \alpha_i = \\ &= F_i (pk \cdot \mu_v) \cos \alpha_i = F_i \cdot h_i \cdot \mu_v, \end{aligned}$$

де h_i – перпендикуляр, який проведений із полюса p плану швидкостей на лінію дії сили \bar{F}_i .

Для інших ланок механізму цей вираз також буде справедливим. В результаті, якщо механізм знаходиться у рівновазі, то сума елементарних

робіт як і сума потужностей усіх його зовнішніх сил, включаючи сили інерції та зрівноважуючу силу, що прикладені до ланок механізму, має дорівнювати нулю.

Тоді для механізму у стані його рівноваги можна записати:

$$\sum_{i=1}^n N_i = \mu_v \cdot \sum_{i=1}^n F_i \cdot h_i = 0. \quad (4.129)$$

Скоротимо праву частину рівняння (4.131) на постійний множник $\mu_v \neq 0$ і отримаємо

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot h_i = 0. \quad (4.130)$$

Останній вираз саме і доводить, якщо механізм під дією заданих сил і зрівноважуючої сили перебуває у стані рівноваги, то сума моментів цих сил, перенесених з механізму у відповідні точки повернутого на 90° плану швидкостей, відносно полюса дорівнює нулю.

Такий повернутий на 90° план швидкостей і називається жорстким важелем Жуковського.

Отже застосування важеля Жуковського дозволяє визначити шукану силу за допомогою тільки одного рівняння моментів, а у випадку застосування методу плану сил необхідно провести повний силовий розрахунок механізму.

Відзначимо, що метод Жуковського можна застосовувати для знаходження величини будь-якої сили, якщо точка прикладання та лінія дії цієї сили задані, а також відомі лінії дії, величини та точки прикладання усіх інших сил, які діють на ланки механізму.

З наведеного випливає така послідовність визначення зрівноважуючої сили за способом Жуковського:

- креслять кінематичну схему механізму у заданому положенні та вибраному масштабі з прикладеними усіма зовнішніми силами. Моменти замінюють парами сил;

- будують план швидкостей, повернутий на 90° ;

- до однойменних точок повернутого плану прикладають усі зовнішні сили, сили інерції, а також зрівноважуючу силу, зберігаючи їх напрям;

- складають рівняння суми моментів усіх сил відносно полюса і визначають зрівноважуючу силу.

При використанні жорсткого важеля Жуковського також потрібно прийняти до уваги наступне:

1. Реакції, що визначені без урахування сил тертя, до важеля не прикладаються.

2. У якості жорсткого важеля Жуковського можна використати

план швидкостей без його повороту, але тоді необхідно повернути на 90° в одну сторону усі сили, що прикладаються до важеля.

3. У випадку, якщо на ланку діє момент сили, цей момент потрібно представити у вигляді пари сил, які переносяться у відповідні точки важеля.

Розглянемо застосування даного методу жорсткого важеля на прикладі силового розрахунку кривошипно-повзунного механізму (рис. 4.99, а).

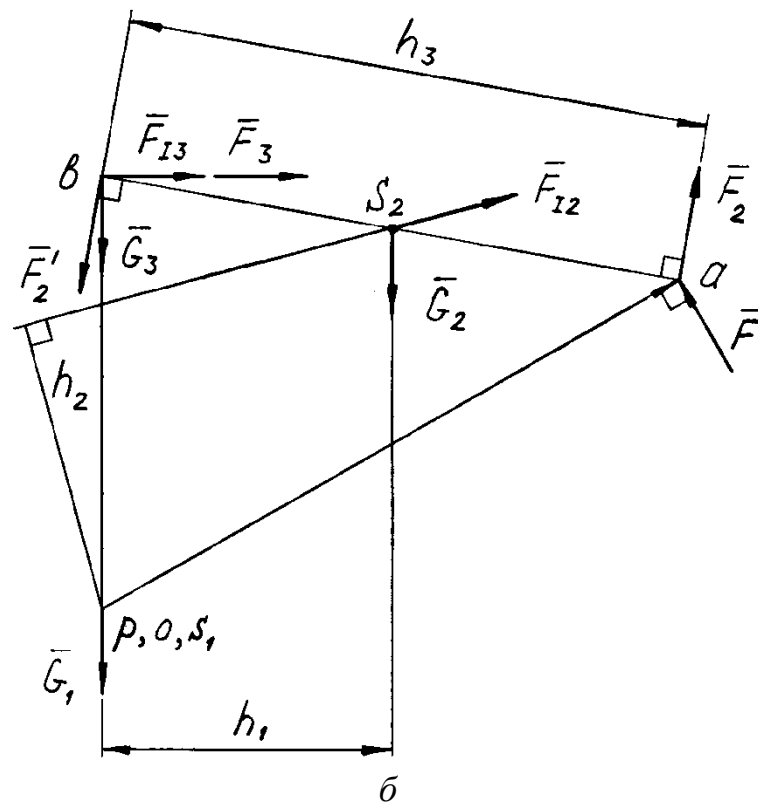
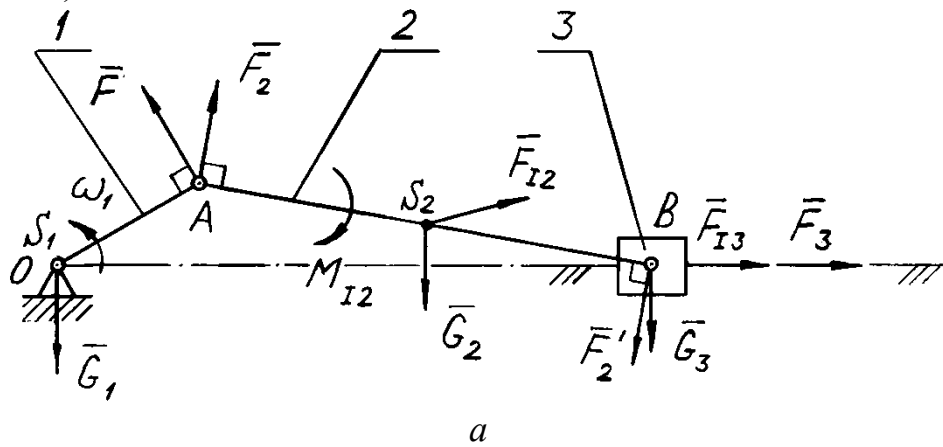


Рис. 4.99

Прикладемо до механізму сили тяжіння, сили інерції та момент сил інерції ланки 2, а також силу корисного опору \bar{F}_3 .

Момент сил інерції M_{I_2} шатуна представимо еквівалентною парою сил \bar{F}_2, \bar{F}'_2 , величина кожної з яких буде дорівнювати:

$$F_2 = F'_2 = \frac{M_{I_2}}{l_{AB}},$$

де l_{AB} , м, – довжина ланки 2.

Прикладемо також до точки A кривошипа зрівноважуючу силу \bar{F}_3 , яка спрямована перпендикулярно до OA .

Побудуємо план швидкостей для заданого положення механізму і повернемо його на 90° за чи проти стрілки годинника так, щоб пряма ab плану була паралельна прямій AB кінематичної схеми механізму.

Збільшимо масштаб зображення повернутого плану швидкостей і отримаємо жорсткий важіль Жуковського (рис. 4.99, б).

У відповідні точки важеля перенесемо паралельно активні сили і сили інерції без урахування реакцій в'язей.

Ці точки є однойменними точками кінематичної схеми механізму.

Розглянемо рівновагу даного жорсткого важеля під дією заданої системи сил і знайдемо величину сили \bar{F}_3 .

Із аналітичного рівняння рівноваги жорсткого важеля (алгебраїчної суми моментів всіх сил відносно полюса p):

$$\Sigma M_p = 0; F \cdot pa + F_2 h_3 - G_2 h_1 - F_{I_2} h_2 - (F_{I_3} + F_3) \cdot pb = 0,$$

де h_1, h_2, h_3, pa, pb , мм, – довжина плечей сил на важелі.

Звідки

$$F_3 = \frac{-F_2 h_3 + G_2 h_1 + F_{I_2} h_2 + (F_{I_3} + F_3) \cdot pb}{pa}.$$

Величина зрівноважуючого моменту M_3 відповідно буде складати:

$$M'_3 = F \cdot l_{OA},$$

де l_{OA} , м, – довжина кривошипа 1.

Аналогічно розраховуються і інші плоскі механізми із одним ступенем рухомості.

Запитання для самоконтролю

1. Що вивчає динаміка механізмів і машин?
2. Сформулюйте визначення першої і другої задач динаміки.
3. Дайте визначення робочих машин або двигунів. Наведіть приклади їх механічних характеристик.
4. Як класифікують сили, що діють на ланки механізмів? Наведіть приклади.
5. З якою метою проводять силовий розрахунок механізмів?
6. В чому полягає умова статичної визначеності плоского кінематичного ланцюга?
7. Чи є групи Ассура статично визначеними?
8. Назвіть послідовність проведення кінетостатичного дослідження плоских важільних механізмів.
9. Які види силового розрахунку Ви знаєте?
10. Який принцип механіки покладений в основу кінетостатичного силового розрахунку? Які силові фактори при цьому враховують?
11. Запишіть рівняння кінетостатики для однієї з ланок механізму.
12. Що таке план сил і для чого його використовують при силовому розрахунку?
13. Схематично, без розрахунків, провести силовий аналіз груп Ассура в наведеному механізмі при іншому розташуванні ланок.
14. Які силові параметри визначають при кінетостатичному дослідженні ведучої ланки механізму?
15. Що таке зрівноважуюча сила або зрівноважуючий момент? До якої ланки вони прикладені?
16. Сформулюйте теорему Жуковського.
17. Як використовують жорсткий важіль Жуковського при кінетостатичних дослідженнях плоских механізмів?

РОЗДІЛ 20. ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

Розглянемо тепер другу задачу динаміки механізмів і машин або задачу динамічного аналізу, коли за заданими зовнішніми силами треба визначити закон руху початкової (вхідної) ланки.

Але в задачу визначення руху ланок механізмів і машин входять не тільки питання з'ясування характеру цього руху. Сюди відносяться і питання про способи забезпечення руху заданим умовам. Такі задачі направлені на вирішення проблем нерівномірності і регулювання руху механізмів і машин.

20.1. Методи дослідження руху механізмів і машин

Для розв'язку задачі вивчення закону руху механізмів і машин під дією заданих сил необхідно скласти рівняння руху системи і розв'язати його відносно невідомого кінематичного параметра.

У цілому при визначенні закону руху ланок використовують рівняння, які називаються *рівняннями руху механізму і машини*.

Число цих рівнянь дорівнює числу ступенів вільності.

Такі рівняння руху можуть бути представлені у різних формах.

У самому загальному випадку для знаходження рівнянь руху можна застосувати *диференціальні рівняння Лагранжа другого роду в узагальнених координатах*.

У якості узагальнених координат тут приймають незалежні параметри, що визначають положення механізму, наприклад, кути повороту ведучих ланок або переміщення деяких їх точок. Число рівнянь Лагранжа буде дорівнювати числу ступенів вільності.

Такі рівняння мають наступний вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = Q_i, \quad (4.131)$$

де T – кінетична енергія механізму або машини, що залежить від маси його ланок, швидкостей ведучих ланок та їх положення; q_i – узагальнена координата; \dot{q}_i – узагальнена швидкість; Π – потенціальна енергія системи; Q_i – узагальнена сила, що відповідає узагальненій координаті q_i .

Третя складова в рівнянні Лагранжа $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$ враховує дію на механізм

сил, які мають потенціал, наприклад, сил тяжіння, сил пружності ланок тощо. Цими силами можна знехтувати, коли їх вплив на закон руху незначний (у випадку малої ваги по відношенню до інших діючих зовнішніх сил та значної жорсткості ланок, при якій деформація ланок несуттєва).

Далі не будемо враховувати сили ваги та сили пружності, що мають потенціал, тобто будемо вважати, що $\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$ і тоді рівняння Лагранжа матиме вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad (4.132)$$

При розрахунках механізмів і машин, принцип дії яких пов'язаний із використанням сил пружності, сил тяжіння ланок, таке припущення некоректне.

Рівняння руху також можна отримати на основі застосування теореми про зміну кінетичної енергії.

В інтегральній або як ще говорять, енергетичній формі для механізмів і машин із одним ступенем вільності це рівняння має вигляд

$$\sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n T_i - \sum_{i=1}^n T_{i0}, \quad (4.133)$$

де n – число рухомих ланок механізму; A_i – робота усіх зовнішніх (по відношенню до механізму) сил, які діють на i -у ланку на кінцевому переміщенні за заданий проміжок часу; T_i, T_{i0} – кінетична енергія i -ї ланки у кінці та на початку заданого проміжку часу відповідно.

Рівняння (4.133) ще можна отримати із диференціальних рівнянь руху ланок шляхом їх інтегрування.

При цьому диференціальні рівняння руху ланок містять другі похідні від координат по часу. Після інтегрування знайдені рівняння будуть містити тільки координати та їх перші похідні. Ці рівняння називають першими інтегралами. Одне з них, яке отримують із теореми про зміну кінетичної енергії, називається інтегралом енергії. Тому рівняння (4.133) також називають *рівнянням руху у формі інтегралу енергії*.

Нажаль, вищевказані способи визначення закону руху механізмів і машин досить складні і громіздкі внаслідок необхідності урахування кожної з n рухомих ланок. Такі розрахунки викликають труднощі навіть для плоских механізмів із невеликою кількістю ланок.

Але задача визначення закону руху може бути суттєво спрощена, якщо перейти до динамічної моделі механізму або машини.

Отже, вивчення динаміки механізму або машини повинно починатися з вибору їх динамічної моделі.

Вибір динамічної моделі того чи іншого об'єкта залежить у першу чергу від його конструктивних особливостей, мети дослідження та характеру задачі, що розглядається.

Найбільш простим способом ідеалізації є перехід від реального механізму або машини до такого, що містить лише механізми з жорсткими ланками.

При цьому виходять з таких вже відомих припущень: усі ланки, які є твердими тілами рахуються абсолютно твердими; гнучкі ланки (паси, муфти і т.п.) – нерозтяжні; рідкі – такі, що не стискаються; усі кінематичні пари ідеально реалізують рівняння в'язей, якими вони описуються; відсутні зазори, поверхні вищих кінематичних пар, що дотикаються не деформуються і т.п.

В жорстких машинних агрегатів число ступенів вільності (тобто число незалежних параметрів, які однозначно визначають положення усіх ланок механічної системи) співпадає з числом ступенів рухомості.

Так, наприклад, в жорсткому машинному агрегаті з одним двигуном координати усіх точок є функціями однієї узагальненої координати. При цьому, як вже було зазначено вище, тут дослідження руху машинного агрегату з урахуванням пружності ланок тут не розглядається.

Перший етап динамічного дослідження полягає в спрощенні вихідного об'єкта, тобто у заміні його деякою моделлю (схемою), у якій намагаються відобразити найбільш суттєві властивості розглядуваної механічної системи.

Кожній фізичній моделі відповідає своя математична модель, тобто система диференціальних, інтегральних або інтегрально-диференціальних рівнянь, за допомогою яких здійснюється математичне описання математичного об'єкту.

Третім етапом динамічного розрахунку є розв'язання рівнянь, отриманих при складанні математичної моделі. При цьому використовуються як аналітичні так і чисельні методи.

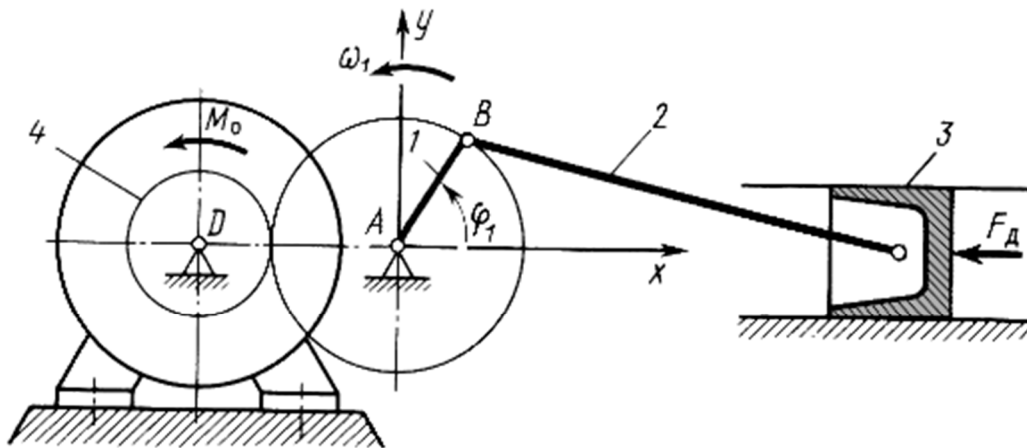
20.2. Динамічна модель машинного агрегату

Машинний агрегат являє собою сукупність машини-двигуна, механізму передач та робочої машини. Це, переважно, багатоланкова система, яка навантажена багатьма силами та моментами, прикладеними до різних ланок.

Наприклад, на рис. 4.100, наведена силова установка, в якій двигун внутрішнього згорання приводить в рух через зубчасту передачу вал

робочої машини – відцентрового насосу або іншої робочої машини.

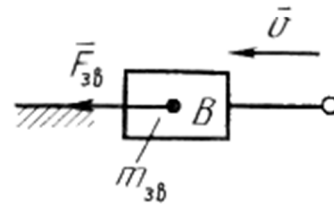
На ланки такого машинного агрегату під час руху діють різні силові фактори: до поршня 3 прикладена рушійна сила двигуна – F_D , до ротора 4 робочої машини прикладений момент сил корисного опору – M_O , до усіх ланок прикладені сили тяжіння, а в усіх кінематичних парах діють сили тертя.



а



б



в

Рис. 4.100

Характер дії цих сил різний: деякі залежать від положення чи швидкості ланок, інші постійні. При цьому кожна ланка має свою масу, момент інерції. Своїми діями прикладені сили надають механізму той чи інший закон руху. Визначення закону руху такої складної багатоланкової системи становить непросту задачу.

У той же час для механізму, що має один ступінь рухомості, задачу можна вважати розв'язаною, якщо буде відомий закон руху однієї ланки, яка таким чином буде початковою. Закон руху інших ланок і точок

механізму після цього можна без значних зусиль визначити методами кінематичного аналізу.

Отже для отримання розв'язку цієї задачі треба застосувати динамічну модель машинного агрегату, замінивши весь складний багатоланковий механізм однією умовною рухомою ланкою.

Виберемо за таку ланку кривошип I (рис. 4.100, *a*) та виділимо її разом із стояком (рис. 4.100, *б*).

При цьому будемо вважати, що момент інерції J_{36} і момент сил M_{36} умовної ланки як динамічної моделі, будуть такими, що її закон руху повністю співпадатиме з законом руху реальної ланки I заданого механізму, тобто для будь-якого моменту часу буде справедливою рівність

$$\omega_1 = \omega_M, \quad (4.134)$$

де ω_1 – кутова швидкість кривошипу I заданого механізму, ω_M – кутова швидкість умовної ланки (її динамічної моделі).

Тепер, якщо визначити закон руху цієї простої динамічної моделі (рис. 4.100, *б*), то автоматично стане відомим дійсний закон руху початкової ланки заданого механізму.

Треба підкреслити, що заданий механізм має у своєму складі кривошип, а тому саме його доцільно вибрати за рухому ланку динамічної моделі.

Отже побудова динамічної моделі машинного агрегату полягає в заміні заданого багатоланкового механізму, навантаженого довільною системою сил та моментів, простою динамічною моделлю (рис. 4.100, *б*) – однією умовною рухомою ланкою із стояком.

При цьому, всі сили і моменти, що прикладені до заданого механізму, замінені, як правило, одним зведеним моментом, що прикладений до умовної ланки.

Зведений момент M_{36} має бути еквівалентом до всього навантаження, яке прикладене до машинного агрегату.

Так само і маси, а також моменти інерції всіх ланок машинного агрегату замінені моментом інерції умовної ланки – зведеним моментом інерції J_{36} .

Таким чином, побудова динамічної моделі передбачає зведення усіх сил і моментів сил (визначення M_{36}) і зведення усіх мас і моментів інерції (визначення J_{36}).

Вибрана динамічна модель буде адекватна заданому механізму, якщо при зведенні сил була витримана умова рівності елементарних робіт усіх сил і моментів, прикладених до ланок реального механізму, і зведеної сили. Так само при зведенні мас – умова рівності кінетичних енергій мас

реального механізму і зведеного моменту інерції моделі.

Отже побудова динамічної моделі дає зручну можливість при розв'язанні задач динаміки розглядати не весь складний машинний агрегат з багатьма ланками, що мають різні маси та на які діють різні сили, а одну умовну ланку з однією еквівалентною масою (чи моментом інерції) із прикладеною до неї, як правило, однією силою (чи моментом).

В загальному випадку розрізняють дві динамічні моделі: із розподіленою масою (рис. 4.100, б), та із зосередженою масою (рис. 4.100, в). Остання застосовується, переважно, якщо до складу механізму не входить жодна ланки, яка здійснює обертальний рух.

20.3. Зведення сил, моментів сил, мас і моментів інерції

Як було зазначено вище, для полегшення задачі визначення закону руху ланок механізму можна застосувати метод, при якому закон руху вхідної ланки можна одержати, не розглядаючи ланки всього механізму.

При цьому заданий механізм із одним ступенем вільності, що має n рухомих ланок, треба замінити на еквівалентний, який би складався із однієї рухомої ланки, підбраної так, щоб складене для неї рівняння руху мало такий самий розв'язок, як і для заданого механізму.

Такий метод називається методом зведення, а ланка, яка замінює собою заданий механізм, називається *ланкою зведення*.

Аналогічно всі сили і моменти сил, що діють на різні ланки механізму, можна замінити однією *зведеною силою* $\bar{F}_{3\epsilon}$ або одним *зведеним моментом сил* $M_{3\epsilon}$, які прикладені до ланки зведення.

Бажано, щоб ланка зведення здійснювала прості види руху (поступальний або обертальний навколо свого центру мас). Звичайно у якості ланки зведення вибирають початкову ланку механізму (повзун або кривошип).

У випадку поступального руху ланки зведення (рис. 6.1, в) рівняння руху заданого механізму можна замінити тотожним рівнянням поступального руху однієї зведеної ланки – повзуна.

Маса цього повзуна буде зосереджена в одній умовній точці – *точці зведення* і називається *зведеною масою* $m_{3\epsilon}$.

В результаті динамічна модель механізму буде представляти собою матеріальну точку із зведеною масою $m_{3\epsilon}$, яка рухається під дією зведеної сили $\bar{F}_{3\epsilon}$.

Рівняння Лагранжа для цієї моделі прийме вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial T}{\partial s} = F_{36}, \quad (4.135)$$

де s – лінійне переміщення ланки зведення, яке взяте у якості узагальненої координати q_i .

У випадку обертального руху ланки зведення (рис. 4.100, б) рівняння руху заданого механізму можна замінити тотожним рівнянням обертального руху однієї зведеної ланки – кривошипа.

Момент інерції цієї ланки відносно осі обертання називається *зведеним моментом інерції* J_{36} .

Прикладемо також до зведеної ланки *зведений момент сил* M_{36} .

В результаті динамічна модель механізму буде представляти собою зведену ланку (кривошип) із зведеним моментом інерції J_{36} , яка рухається під дією зведеного моменту сил M_{36} .

Рівняння Лагранжа для цієї моделі буде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi} = M_{36}, \quad (4.136)$$

де ϕ – кутове переміщення ланки зведення, яке взяте у якості узагальненої координати q_i .

Визначимо величини зведеної сили \bar{F}_{36} і зведеного моменту сил M_{36} . Для цього скористаємось умовою еквівалентності заданого механізму і його наведених динамічних моделей за потужністю. Тобто потужність зведеної сили (зведеного моменту сил), що прикладені до ланки зведення, має дорівнювати потужності усіх діючих на заданий механізм сил і моментів сил.

$$N_{36} = \sum_{i=1}^n N_i, \quad (4.137)$$

де i, n – відповідно номер і кількість рухомих ланок заданого механізму; N_i – потужність усіх сил і моментів сил, які прикладені до i -тої ланки.

Враховуючи, що всі сили, які діють на i -ту ланку заданого механізму, можна звести до однієї сили і одного моменту, праву частину в (6.7) можна записати як

$$\sum_{i=1}^n N_i = \sum_{i=1}^n F_i v_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \omega_i, \quad (4.138)$$

де F_i, M_i – сила і момент, які діють на i -ту ланку заданого механізму; v_i –

швидкість точки прикладання сили F_i ; α_i – кут між векторами сили \bar{F}_i і швидкості \bar{v}_i ; ω_i – кутова швидкість i -тої ланки.

Тоді окремо для випадків поступального та обертального руху ланки зведення рівність (6.7) буде мати вигляд:

$$F_{3\bar{e}} \cdot v = \sum_{i=1}^n F_i v_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \omega_i,$$

$$M_{3\bar{e}} \cdot \omega_1 = \sum_{i=1}^n F_i v_i \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \omega_i,$$

де v , ω_1 – відповідно лінійна і кутова швидкості ланок зведення (повзуна і кривошипа).

Звідки зведена сила та зведений момент сил будуть дорівнювати

$$F_{3\bar{e}} = \sum_{i=1}^n F_i \frac{v_i}{v} \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \frac{\omega_i}{v}, \quad (4.139)$$

$$M_{3\bar{e}} = \sum_{i=1}^n F_i \frac{v_i}{\omega_1} \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \frac{\omega_i}{\omega_1}. \quad (4.140)$$

Таким чином, *зведеною силою називають силу, яка умовно прикладена до ланки зведення у точці зведення і потужність якої дорівнює потужності усіх діючих на заданий механізм сил і моментів сил.*

Відповідно *зведеним моментом сил називають момент сил, який умовно прикладений до ланки зведення і потужність якого дорівнює потужності усіх діючих на заданий механізм сил і моментів сил.*

Аналогічно можна визначити зведену масу і зведений момент інерції. Для цього скористаємось умовою еквівалентності заданого механізму і його динамічних моделей за кінетичною енергією.

Тобто кінетична енергія ланки зведення має дорівнювати кінетичній енергії всього механізму.

$$T_{3\bar{e}} = \sum_{i=1}^n T_i, \quad (4.141)$$

де i , n – відповідно номер і кількість рухомих ланок заданого механізму; T_i – кінетична енергія i -тої ланки.

Враховуючи, що у загальному випадку плоскопаралельного руху n ланок механізму, кінетична енергія може бути зведена до суми кінетичних енергій поступальної і обертальної складових руху кожної i -тої ланки, отримаємо для правої частини в (4.141):

$$\sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_{S_i}^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{J_{S_i} \omega_i^2}{2}, \quad (4.142)$$

де m_i , ω_i – маса та кутова швидкість i -тої ланки заданого механізму; v_{S_i} – швидкість центра мас i -тої ланки, J_{S_i} – момент інерції i -тої ланки відносно її центра мас.

Тоді для випадку поступального та випадку обертального руху ланки зведення рівність (4.141) буде такою:

$$\frac{m_{36} v^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_{S_i}^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{J_{S_i} \omega_i^2}{2},$$

$$\frac{J_{36} \omega_1^2}{2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_{S_i}^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{J_{S_i} \omega_i^2}{2},$$

де m_{36} , – зведена маса; J_{36} – зведений момент інерції; v , ω_1 – лінійна і кутова швидкості ланок зведення (повзуна і кривошипа).

Звідки зведена маса та зведений момент інерції механізму будуть дорівнювати:

$$m_{36} = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{v_{S_i}}{v} \right)^2 + \sum_{i=1}^n J_{S_i} \left(\frac{\omega_i}{v} \right)^2. \quad (4.143)$$

$$J_{36} = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{v_{S_i}}{\omega_1} \right)^2 + \sum_{i=1}^n J_{S_i} \left(\frac{\omega_i}{\omega_1} \right)^2. \quad (4.144)$$

Таким чином, зведеною масою механізму називають масу, яку треба зосередити в даній точці механізму (точці зведення), щоб кінетична енергія цієї точки дорівнювала кінетичній енергії всього механізму.

Відповідно зведеним до ланки моментом інерції J_{36} механізму називають такий момент інерції, з яким ланка зведення має кінетичну енергію, що дорівнює кінетичній енергії всього механізму в цілому.

Треба зауважити, що рівняння (4.139), (6.140), (4.143), (4.144) містять тільки відношення швидкостей, які не змінюються зі зміною швидкості v_{36} або ω_{36} ланки зведення.

Отже зведена сила (зведений момент сил) і зведена маса (зведений момент інерції) не залежать від величин швидкостей v_{36} , ω_{36} ланки зведення, але залежать від її положення (узагальненої координати q_i). Тому їх може бути подано через відповідні відрізки плану швидкостей. Цей план можна побудувати для довільно вибраної кутової швидкості ланки

зведення у невизначеному масштабі.

Таким чином, зведені сили, моменти сил, маси і моменти інерції можливо визначити ще до розв'язання рівняння руху, не знаючи швидкості ланки зведення. В цьому полягає основна перевага методу зведення.

Для практичного застосування розглянемо рівняння (4.135) і (4.136).

Якщо зведеною ланкою механізму є повзун, то його кінетична енергія при лінійному переміщенні s

$$T_{36} = \frac{m_{36} \cdot \dot{s}^2}{2},$$

Після диференціювання отримаємо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} &= m_{36} \dot{s}; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) &= m_{36} \ddot{s} + \frac{dm_{36}}{ds} \dot{s}^2; \\ \frac{\partial T}{\partial s} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{dm_{36}}{ds} \dot{s}^2.\end{aligned}$$

Підставимо отримані результати в рівняння (4.135):

$$m_{36} \ddot{s} + \frac{dm_{36}}{ds} \cdot \frac{\dot{s}^2}{2} = F_{36},$$

або зробивши заміну позначення параметрів $\dot{s} = v$, $s = \nu$, будемо мати

$$m_{36} a + \frac{dm_{36}}{ds} \cdot \frac{v^2}{2} = F_{36}, \quad (4.145)$$

Рівняння (4.145) називається *рівнянням руху механізму у диференціальній формі для зведених сил*.

Якщо зведеною ланкою є кривошип, то його кінетична енергія при кутовому переміщенні φ

$$T_{36} = \frac{J_{36} \dot{\varphi}^2}{2},$$

По аналогії із попередніми перетвореннями, отримаємо із рівняння (4.136):

$$J_{36} \varepsilon + \frac{dJ_{36}}{d\varphi} \cdot \frac{\omega^2}{2} = M_{36}, \quad (4.146)$$

Рівняння (4.146) називається *рівнянням руху механізму у*

диференціальній формі для зведених моментів сил.

Для визначення дійсного закону руху ланки зведення необхідно проінтегрувати рівняння (4.145) або (4.146).

При цьому треба мати на увазі, що зведені маси (зведені моменти інерції) можуть бути сталими або змінними величинами.

У більшості важільних і кулачкових механізмах вони є тільки функцією положення початкової ланки (узагальненої координати).

У механізмах із постійним співвідношенням швидкостей (зубчасті, фрикційні, пасові, гвинтові тощо) зведені маси і моменти інерції сталі.

Що стосується сил (моментів сил), що діють на ланки механізму, то вони можуть бути залежними не тільки від положення початкової ланки, але і від інших показників. Вони можуть бути функцією швидкості (грунтообробні, зернозбиральні машини), а можуть ще залежати і від часу роботи (косарки, жниварки). У таких випадках рівняння (4.145) або (4.146) будуть нелінійними, розв'язати які можливо лише наближеними методами.

Аналітичний розв'язок рівнянь (4.145) або (4.146), причому лише у квадратурах, а не в скінченому вигляді, можливий лише тоді, коли існують залежності $F_{зв.} = F_{зв.}(s)$ або $M_{зв.} = M_{зв.}(\varphi)$, тобто коли зведені сили або зведені моменти сил, що діють на машину, залежать тільки від положення її рухомих частин (наприклад двигун внутрішнього згоряння при умові, що опір при роботі машини залишається майже незмінним).

Таким чином, якщо визначаються закони руху реальних механізмів, коли функції зведених величин не можуть бути виражені аналітичним шляхом, застосовують числові методи інтегрування диференціальних рівнянь.

20.4. Рівняння руху машинного агрегату

Для розв'язання другої задачі динаміки і визначення закону руху початкової ланки із урахуванням сил, що діють на ланки механізму, використовують рівняння руху машинного агрегату.

Як вже було зазначено вище, рівняння руху можуть бути записані в *енергетичній або інтегральній формі*, а також у *диференціальній формі*.

Для механізмів з одним ступенем вільності найпростіше отримати рівняння руху в енергетичній або інтегральній формі.

В загальному випадку, згідно з (4.133), рівняння руху машинного агрегату, як сукупності двигуна, передаточних механізмів і механізму робочої машини, можна представити через закон зміни його кінетичної енергії або інтеграла енергії:

$$\sum A = A_{p.c.} - A_{on.} = T - T_0, \quad (4.147)$$

де $A_{p.c.}$, $A_{on.}$ – відповідно сумарна робота усіх рушійних сил і сил опору; T і T_0 – кінетична енергія машини в кінці і на початку руху.

Враховуючи те, що сумарна робота сил опору $A_{on.}$ складається із роботи сил корисного опору $A_{к.с.}$ і шкідливого опору $A_{ш.с.}$, можемо записати:

$$A_{p.c.} - A_{к.с.} - A_{ш.с.} = T - T_0. \quad (4.148)$$

Останнє рівняння є рівнянням руху машинного агрегату в енергетичній або інтегральній формі у загальному вигляді.

Для практичного його використання можна всі сили і моменти сил, а також маси і моменти інерції ланок звести до ланки зведення.

В результаті дане загальне рівняння руху буде представлене у формі інтегрального рівняння для зведених сил або інтегрального рівняння для зведених моментів сил.

Для цього в першому випадку треба визначити сумарну потужність N всіх сил, діючих на машинний агрегат, через зведену силу $F_{зв.}$ і лінійну швидкість v точки на ланці зведення:

$$N = F_{зв.} \cdot v.$$

Звідки сумарна елементарна робота всіх сил за елементарний проміжок часу dt буде дорівнювати:

$$dA = Ndt = F_{зв.} v dt = F_{зв.} ds,$$

де ds – елементарне прирощення дугової координати точки зведення.

Відповідно повна робота за кінцевий проміжок часу $\Delta t = t - t_0$ буде визначатись рівнянням:

$$\sum A = \int_{s_0}^S F_{зв.} ds,$$

де s і s_0 – кінцеве і початкове значення дугової координати точки зведення.

Таким чином, остаточно рівняння руху машинного агрегату в інтегральній формі для зведених сил буде мати вигляд:

$$\int_{s_0}^S F_{зв.} ds = \frac{1}{2} (m_{зв} v^2 - m_{зв.0} v_0^2), \quad (4.149)$$

де $m_{зв}$, $m_{зв.0}$ – відповідно зведена маса машини в кінці і на початку руху, v , v_0 – лінійна швидкість повзуна (точки на ланці зведення) в кінці і на

початку руху.

Аналогічно через роботу зведеного моменту всіх сил, що діють на машину, можна отримати рівняння руху в інтегральній формі для зведених моментів сил.

Повна робота зведеного моменту сил за час повороту ланки зведення на кут $\varphi_0 - \varphi$ буде

$$\sum A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{зв} d\varphi,$$

а рівняння руху машинного агрегату в інтегральній формі рівняння моментів сил матиме вигляд:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{зв} d\varphi = \frac{I}{2} (J_{зв} \omega^2 - J_{зв0} \omega_0^2), \quad (4.150)$$

де $M_{зв}$ – зведений момент усіх сил в машині; φ, φ_0 – кут повороту кривошипа (ланки зведення) в кінці та на початку руху, $J_{зв}, J_{зв0}$ – зведений момент інерції машини в кінці і на початку руху; ω, ω_0 – кутова швидкість ланки зведення в кінці і на початку руху.

Взагалі в отриманому інтегральному рівнянні (4.150) верхня межа φ інтегрування вважається змінною.

У випадку, якщо все навантаження, що прикладене до машини, залежить тільки від його положення і не залежить від ω , то рівняння (4.150) можна розв'язати безпосередньо відносно величини кутової швидкості ω ланки зведення:

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{зв} d\varphi}{J_{зв}} + \frac{J_{зв0}}{J_{зв}} \omega_0^2}. \quad (4.151)$$

При заданих функціях $J_{зв}, M_{зв}$ і відомій швидкості ω_0 в початковий момент часу, рівняння (4.151) дозволяє визначити значення ω при різних переміщеннях ланки зведення і таким чином отримати дійсний закон руху машини.

Якщо дослідження механізму починається з моменту пуску і $\omega_0 = 0$, то вираз (4.151) буде мати вигляд

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{зв} d\varphi}{J_{зв}}}. \quad (4.152)$$

Якщо ж всі сили і маси зводяться до вибраної точки зведення, то лінійну швидкість v цієї точки можна визначити із інтегрального рівняння сил (4.149):

$$v = \sqrt{\frac{2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} F_{36} ds}{m_{36}} + \frac{m_{360}}{m_{36}} v_0^2}. \quad (4.153)$$

При початковій швидкості $v_0 = 0$ також будемо мати

$$v = \sqrt{\frac{2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} F_{36} ds}{m_{36}}}. \quad (4.154)$$

Треба зауважити, що рівняння руху механізму в енергетичній або інтегральній формі (4.149) і (4.150) використовують переважно у випадках, коли зведені силові фактори залежать від положень ланок. В інших випадках використовують рівняння руху машини виду (4.145) або (4.146) у диференціальній формі.

Такі диференціальні рівняння можна отримати, наприклад, продиференціювавши рівняння (4.149) або (4.150) відповідно по параметру s або φ .

Розглянемо для прикладу рівняння (4.150) при $\omega_0 = 0$. В результаті його диференціювання по φ отримаємо

$$M_{36} \cdot d\varphi = d\left(\frac{J_{36} \cdot \omega^2}{2}\right),$$

або

$$M_{36} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{J_{36} \cdot \omega^2}{2} \right).$$

Враховуючи, що в загальному випадку змінною величиною є не тільки ω , але й J_{36} , останнє рівняння може бути продиференційоване як функція цих двох незалежних змінних $\omega = \omega(\varphi)$ і $J_{36} = J_{36}(\varphi)$:

$$M_{36} = J_{36} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\omega^2}{2} \right) + \frac{dJ_{36}}{d\varphi} \cdot \frac{\omega^2}{2}.$$

При цьому похідна складної функції буде

$$\frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\omega^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega^2}{2} \right) \frac{dt}{d\varphi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\omega^2}{2} \right) \frac{1}{\omega} = \frac{d\omega}{dt}.$$

Тоді остаточно отримаємо:

$$M_{3\epsilon} = J_{3\epsilon} \frac{d\omega}{dt} + \frac{dJ_{3\epsilon}}{d\varphi} \cdot \frac{\omega^2}{2}, \quad (4.155)$$

де $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ – кутове прискорення ланки зведення.

Як бачимо, отримане диференціальне рівняння аналогічне рівнянню (4.146) і є *рівнянням руху механізму у диференціальній формі для зведених моментів сил*, оскільки шукана змінна величина – кутова швидкість ω ланки зведення, знаходиться під знаком похідної.

За умови, коли $\omega = const$, рівняння (4.155) набуде спрощеного вигляду:

$$M_{3\epsilon} = \frac{dJ_{3\epsilon}}{d\varphi} \cdot \frac{\omega^2}{2}. \quad (4.156)$$

У випадках, коли досліджуваний механізм має $J_{3\epsilon} = const$, а також на початку руху, коли $\omega = 0$ також отримаємо:

$$M_{3\epsilon} = J_{3\epsilon} \frac{d\omega}{dt} = J_{3\epsilon} \cdot \varepsilon. \quad (4.157)$$

Для визначення кутового прискорення ланки зведення можна розв'язати рівняння (4.155) відносно $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$:

$$\varepsilon = \frac{M_{3\epsilon}}{J_{3\epsilon}} - \frac{\omega^2}{2J_{3\epsilon}} \cdot \frac{dJ_{3\epsilon}}{d\varphi}. \quad (4.158)$$

Аналогічно, якщо сили та маси машини зводяться до точки на ланці зведення, то в результаті диференціювання рівняння (4.149) по параметру лінійного переміщення s отримаємо

$$F_{3\epsilon} = m_{3\epsilon} \frac{dv}{dt} + \frac{dm_{3\epsilon}}{ds} \cdot \frac{v^2}{2}, \quad (4.159)$$

де $\frac{dv}{dt} = a$ – лінійне прискорення точки на ланці зведення.

Отримане диференціальне рівняння аналогічне рівнянню (4.145) і є *рівнянням руху механізму у диференціальній формі для зведених сил*,

оскільки шукана змінна величина – лінійна швидкість v точки на ланці зведення, знаходиться під знаком похідної.

Із цього диференціального рівняння також можна отримати при $v = const$:

$$F_{36} = \frac{dm_{36}}{ds} \cdot \frac{v^2}{2}, \quad (4.160)$$

при $m_{36} = const$, а також на початку руху, коли $v = 0$:

$$F_{36} = m_{36} \frac{dv}{dt} = m_{36} \cdot a, \quad (4.161)$$

а для визначення лінійного прискорення точки на ланці зведення можна розв'язати рівняння (6.29) відносно $\frac{dv}{dt} = a$:

$$a = \frac{F_{36}}{m_{36}} - \frac{v^2}{2m_{36}} \cdot \frac{dm_{36}}{ds}. \quad (4.162)$$

Треба зазначити, що похідні $\frac{dJ_{36}}{d\varphi}$ і $\frac{dm_{36}}{ds}$ можуть бути обчислені за допомогою чисельного диференціювання із використанням ЕОМ, або графічним диференціюванням. Якщо це не можливо треба застосовувати аналітичні методи розрахунку.

У цілому зауважимо, що в більшості випадків диференціальні рівняння руху (4.155) і (4.159) можуть бути проінтегровані лише чисельними методами.

Точний розв'язок диференціальних рівнянь руху машини як і інтегральних рівнянь руху, можна тримати лише тоді, коли силові фактори, що діють на ланки механізму, є функціями положень цих ланок.

20.5. Дослідження основних режимів руху машинного агрегату

Дослідження динаміки машин полягає, в першу чергу, у визначенні та аналізі часткових розв'язків, наведених вище інтегральних і диференціальних рівнянь руху, що відповідають характерним режимам роботи.

Для аналізу характерних режимів роботи машинного агрегату розглянемо його енергетичний баланс.

При цьому використаємо загальне рівняння руху машинного

агрегату в енергетичній формі, яке виражене через закон зміни кінетичної енергії його рухомих частин.

У цілому розрізняють три характерні стадії руху машинного агрегату: *пуск або розбіг, усталений рух і вибіг, що закінчується зупинкою.*

Графічна залежність зміни кінетичної енергії за час t запуску, роботи і зупинки машинного агрегату на цих трьох характерних стадіях руху представлена на рис. 4.101.

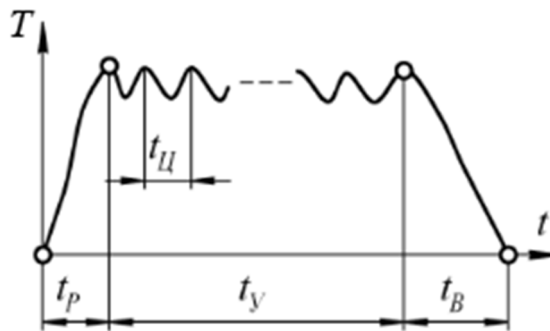


Рис. 4.101

При цьому на першій стадії t_p – стадії *розбігу* швидкість ведучої ланки зростає від нуля до швидкості усталеного руху.

Так як на початку руху кінетична енергія $T_0 = 0$, то із загального рівняння руху машинного агрегату маємо:

$$A_{p.c.} - A_{к.c.} - A_{ш.c.} = T,$$

або

$$A_{p.c.} = A_{к.c.} + A_{ш.c.} + T. \quad (4.163)$$

Тобто, на стадії розбігу енергія рушійних сил витрачається не тільки на подолання корисних і шкідливих сил опору, але і на збільшення кінетичної енергії машини. Тому робота рушійних сил тут має бути більше сумарної роботи сил опору.

Скорочення часу розбігу можна досягти шляхом збільшення потужності двигуна і зменшення сил шкідливого опору.

Часто для цієї мети на стадії розбігу робоче навантаження (корисний опір технологічного процесу) в машинах також знімають (холостий хід).

В такому разі:

$$A_{p.c.} = A_{ш.c.} + T. \quad (4.164)$$

На другій стадії t_y – стадії *усталеного руху* швидкість ведучої ланки лишається постійною, або коливається біля свого середнього значення.

Такі коливання у більшості випадків носять періодичний (циклічний) характер із постійним значенням параметрів циклу за період $t_{Ц}$.

При цьому зміна кінетичної енергії машини за весь період усталеного руху t_y або за період, кратний циклу зміни швидкості, дорівнює нулю.

Тоді загальне рівняння руху машини буде мати вигляд:

$$A_{p.c.} = A_{к.c.} + A_{ш.c.} \quad (4.165)$$

Тобто, на стадії усталеного руху енергія рушійних сил витрачається тільки на подолання корисних і шкідливих сил опору. Чим меншою буде робота шкідливих сил опору (сил тертя і т.п.), тим корисніше буде витрачатись енергія в машині.

При цьому робота рушійних сил має дорівнювати сумарній роботі сил опору. Порушення цього балансу приведе до зміни кінетичної енергії машини, тобто, до порушення усталеного руху машини.

На третій стадії t_B – стадії *вибігу* двигун машини відключається і швидкість ведучої ланки машини зменшується до нуля. При зупинці кінетична енергія машини $T = 0$.

Робота рушійних сил на цій стадії $A_{p.c.} = 0$ (двигун відключений).

Тоді загальне рівняння руху машини буде мати вигляд:

$$A_{к.c.} - A_{ш.c.} = T_0. \quad (4.166)$$

Таким чином, машина може зупинитись, коли вся кінетична енергія її рухомих частин буде витрачена на подолання сил корисного і шкідливого опору.

Час вибігу можна скоротити шляхом додаткового збільшення сил шкідливого опору (гальмування).

В такому разі:

$$A_{к.c.} - A_{ш.c.} - A_{з.c.} = T_0, \quad (4.167)$$

де $A_{з.c.}$ – робота гальмівних сил.

Всі вищенаведені загальні рівняння руху машини ще називають *рівняннями енергетичного балансу машини*, так як вони встановлюють необхідний розподіл енергії, який потрібний для кожної стадії її руху.

20.6. Коефіцієнт нерівномірності руху машини

Однією з головних ознак роботи машини в усталеному режимі є рівномірність її ходу.

Задачу регулювання ходу машини для забезпечення його необхідної

рівномірності можна досягти шляхом зменшення коливань кутової швидкості головного валу ведучої ланки до допустимих меж у відповідності до вимог технологічного процесу.

Розглянемо причини виникнення нерівномірності ходу машини в період її усталеного руху.

За повний період циклу усталеного руху робота рушійних сил в машині дорівнює роботі сил опору.

При цьому середнє значення зведеного моменту рушійних сил дорівнює середньому значенню зведеного моменту сил опору:

$$A_p - A_{on} = 0,$$

$$M_{зв.р} - M_{зв.оп} = 0.$$

Але в дійсності на протязі одного циклу оберту зведені моменти $M_{зв.р}$, $M_{зв.оп}$ періодично змінюються в залежності від кута повороту φ ведучої ланки, що приводить до періодичної зміни балансу робіт рушійних сил і сил опору.

Тому, не зважаючи на те, що кутові швидкості на початку і в кінці періоду циклу однакові, головний вал ведучої ланки машини обертається нерівномірно.

В результаті графічна залежність кутової швидкості початкової ланки від її кута повороту $\omega = \omega(\varphi)$ або від часу $\omega = \omega(t)$ має наступний вигляд (рис. 4.102).

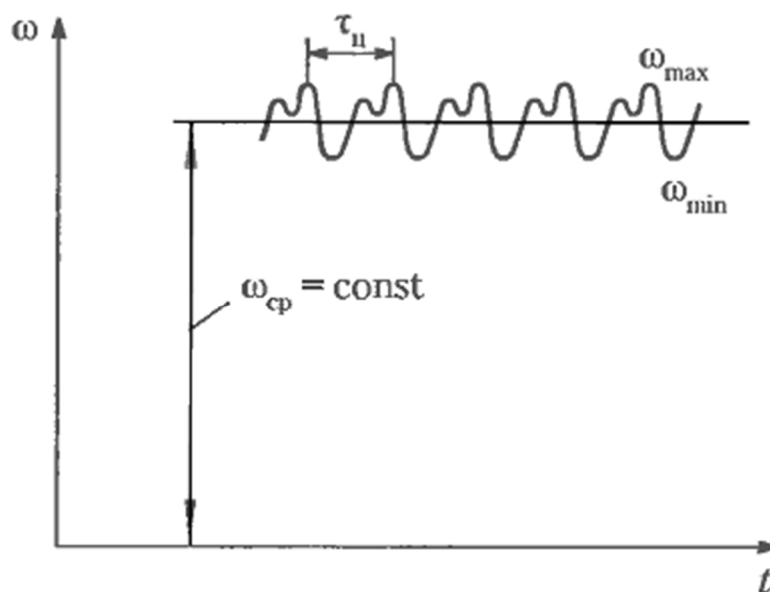


Рис. 4.102

Час, за який кутова швидкість початкової ланки знову прийме своє першопочаткове значення, а потім характер її зміни знову буде повторюватись, називають часом циклу τ_{ω} або скорочено – циклом.

Такі коливання кутової швидкості з періодичною зміною своєї величини за один цикл оберту головного валу називаються *періодичними*.

Періодичні коливання кутової швидкості виникають в машинах, в яких сили, діючі на ланки, змінюються періодично в певній залежності від кута повороту ведучої ланки (двигуни внутрішнього згорання, поршневі насоси і т.п.). Величина цих коливань залежить, в першу чергу, від конструктивних особливостей машини.

Для характеристики коливань швидкості машини в період усталеного руху використовують наступні два критерія:

- середня (номінальна) швидкість

$$\omega_c = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}, \quad (4.168)$$

- коефіцієнт нерівномірності руху:

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_c}, \quad (4.169)$$

де ω_{max} , ω_{min} – відповідно максимальна, мінімальна кутова швидкість головного валу (рис. 4.102).

Коефіцієнт нерівномірності руху δ характеризує розмах коливань кутової швидкості по відношенню до її середнього значення. Очевидно, що чим менше δ , тим більш рівномірно рухається початкова ланка.

Проектуючи певний клас машин, необхідно забезпечувати для цього класу коливання кутової швидкості головного валу в певних границях, які встановлені завдяки багаторічній інженерній практиці.

Допустимі межі зміни коефіцієнта нерівномірності руху для кожного типу машин визначаються експериментально і наведені в довідковій літературі.

Наприклад, для насосів – від 1/5 до 1/30, для двигунів внутрішнього згорання – від 1/80 до 1/100, для генераторів змінного струму – від 1/200 до 1/300.

Коефіцієнт нерівномірності є величина досить мала. Саме тому це дозволяє прийняти середнє значення кутової швидкості як середнє арифметичне з її максимального і мінімального значень.

Звичайно, при проектуванні механізму задаються наперед бажаними для механізму значеннями коефіцієнта нерівномірності руху та середньої швидкості обертання головного валу.

В усталеному режимі працюють дуже багато машин. Найкращі

умови для роботи таких машин – абсолютно рівномірне обертання їх головного вала.

Але в реальних умовах їх робота характеризується параметрами середньої кутової швидкості і коефіцієнтом нерівномірності руху.

Для практичного застосування запишемо вирази (4.168) і (4.169) наступним чином:

$$\omega_{max} - \omega_{min} = \delta \omega_c, \quad (4.170)$$

$$\omega_{max} + \omega_{min} = 2\omega_c, \quad (4.171)$$

Спочатку отримані рівняння складемо почленно, а результат поділимо навпіл. Тоді одержимо наступний вираз:

$$\omega_{max} = \omega_c \left(1 + \frac{\delta}{2} \right).$$

Далі від рівняння (4.171) віднімемо почленно рівняння (4.170) і результат знову поділимо навпіл. Тепер отримаємо вираз

$$\omega_{min} = \omega_c \left(1 - \frac{\delta}{2} \right).$$

Возведемо у квадрат ω_{max} і отримаємо

$$\omega_{max}^2 = \omega_c^2 \left(1 + 2 \cdot \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{4} \right) = \omega_c^2 \left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4} \right).$$

Із певним припущенням можна прийняти

$$\omega_{max}^2 = \omega_c^2 (1 + \delta). \quad (4.172)$$

Возвівши у квадрат ω_{min} , аналогічно можна отримати

$$\omega_{min}^2 = \omega_c^2 (1 - \delta). \quad (4.173)$$

Таким чином, максимальні і мінімальні значення кутової швидкості в період усталеного руху можна визначити через їх середнє значення і коефіцієнт нерівномірності руху як

$$\omega_{max} = \omega_c \sqrt{1 + \delta}, \quad (4.174)$$

$$\omega_{min} = \omega_c \sqrt{1 - \delta}. \quad (4.175)$$

Отже швидкість початкової ланки механізму при усталеному русі є змінною величиною і коливаються навколо свого середнього значення. Такі коливання під час усталеного руху бувають двох різних типів: *періодичні та неперіодичні*.

Періодичними коливаннями швидкостей машини називаються коливання, при яких швидкості всіх ланок машини в усіх їхніх положеннях мають цілком певні цикли, після закінчення яких ці швидкості набувають щоразу своїх початкових значень.

Неперіодичні коливання швидкостей залежать від різних причин: раптової зміни корисних або шкідливих опорів, включення в машину додаткових мас і т.п.

Так, раптова зміна навантаження на машину спричиняє раптове збільшення або зменшення швидкості головного вала машини і, оскільки ці коливання не мають певного циклу, то вони називаються неперіодичними.

У більшості машин спостерігаються обидва види коливань швидкості.

Колівання швидкості обох типів небажані як з точки зору динаміки машини, так і виконання нею технологічного процесу.

Колівання швидкості спричиняють у кінематичних парах додаткові динамічні тиски, що знижують коефіцієнт корисної дії машини, довговічність та надійність її роботи.

Оскільки коливання швидкості повністю усунути неможливо, необхідно по можливості їх зменшити.

Задача про регулювання швидкостей під час усталеного руху машини або механізму має суттєве практичне значення в техніці, оскільки в більшості машин цей час є робочим часом її руху, тобто проміжком часу, протягом якого машина долає виробничі опори.

Розглянемо шляхи розв'язування цієї задачі.

Відомо, що маса є мірою інертності тіла і всі ланки механізму мають інертність. Ця властивість полягає в тому, що чим інертніше матеріальне тіло, тим повільніше проходить зміна його швидкості, яка викликана дією прикладених до нього сил.

Отже, щоб отримати обертання головного вала з нерівномірністю, що не перевищує заданої величини, інертність цього вала з усіма зв'язаними з ним деталями необхідно зробити достатньо великою. Практично, це збільшення інертності досягається посадкою на один із валів машини додаткової деталі, що має певний момент інерції. Ця деталь називається маховиком і представляє собою колесо з великим моментом інерції.

Підбираючи момент інерції маховика, можна забезпечити обертання головного вала машини із заданим коефіцієнтом нерівномірності.

Дія маховика полягає у тому, що при перевищенні роботи рушійних сил над роботою сил опору ($A_p > A_{on}$) маховик прийме на себе надлишок кінетичної енергії механізму і, завдяки своєму великому моменту інерції,

не дасть швидкості надмірно зрости. Коли ж буде спостерігатись нерівність $A_p < A_{on}$, маховик буде віддавати накопичену кінетичну енергію, протидіючи зменшенню швидкості.

Маховик є ніби акумулятором кінетичної енергії машини. Таким чином, основне призначення маховика є обмеження коливань кутової швидкості в межах, що встановлені величиною коефіцієнта нерівномірності δ .

Акумулююча здатність маховика використовується не лише для забезпечення допустимої нерівномірності ходу машини.

В деяких машинах (у яких корисне навантаження періодично змінюється в значних межах) маховик дозволяє використовувати накопичену енергію для подолання пікових корисних навантажень без збільшення потужності двигуна.

Маховик неодмінно застосовується в машинах ударної дії – молотах, дробарках і т.ін., допомагаючи електродвигуну при його пікових навантаженнях. В автотранспорті маховик сприяє зрушенню машини з місця.

Регулювання періодичних коливань швидкості здійснюється за допомогою маховика виконаного, як правило, у вигляді колеса з розвинутим ободом, який має велике значення моменту інерції.

Регулювання неперіодичних коливань за допомогою маховика можливо здійснити, якщо вони незначні.

При значних неперіодичних коливаннях встановлюють механізми, які називаються регуляторами – які регулюють закони зміни рушійних сил або сил опору.

Треба відмітити, що неперіодичні коливання в машині не пов'язані з її конструкцією і викликані зміною балансу між роботою рушійних сил і сил опору внаслідок зміни на тривалий час режиму роботи машини (наприклад, збільшення або зменшення робочого навантаження або зміни підведеної енергії).

20.7. Механічний коефіцієнт корисної дії

Для оцінки ефективності роботи машини в енергетичному відношенні в теорії механізмів і машин використовують поняття механічного коефіцієнта корисної дії (ККД).

Як відомо з динаміки, коефіцієнт корисної дії характеризує відносну кількість енергії, що використовується за прямим призначенням.

Взагалі коефіцієнт корисної дії дорівнює відношенню корисної роботи або середньої потужності до витраченої:

$$\eta = \frac{A_{кор}}{A_{витр}} = \frac{N_{кор}}{N_{витр}}.$$

Враховуючи, те що корисна робота в машині – це робота подолання усіх сил корисного опору (сил опору технологічного процесу), а витрачена робота – робота рушійних сил, то механічний коефіцієнт корисної дії машини можна визначити із співвідношення:

$$\eta = \frac{A_{к.с.}}{A_{р.с.}} = \frac{N_{к.с.}}{N_{р.с.}} < 1. \quad (4.176)$$

ККД машини є однією із важливіших характеристик її якості і раціональності. Чим більша величина η , тим більша частина енергії витрачається в машині корисно і тим менше доля втрат на шкідливий опір.

На збільшення величини ККД впливають фактори, які пов'язані з конструкцією машини і її експлуатацією: наприклад, застосування підшипників кочення замість ковзання, а також застосування мастил.

Із врахуванням (4.165) попередній вираз для механічного коефіцієнта корисної дії можна записати як

$$\eta = \frac{A_{р.с.} - A_{ш.с.}}{A_{р.с.}} = 1 - \frac{A_{ш.с.}}{A_{р.с.}}. \quad (4.177)$$

Відношення абсолютних значень робіт шкідливих сил $A_{ш.с.}$, які не пов'язані із робочим процесом, до роботи рушійних сил $A_{р.с.}$ називається коефіцієнтом втрат ψ в машині або механізмі.

Згідно з цим остання формула буде мати наступний вигляд

$$\eta = 1 - \psi. \quad (4.178)$$

Отже, якщо робота усіх рушійних сил машини буде дорівнювати роботі усіх шкідливих сил опору, що не пов'язані з робочим процесом, ($A_{р.с.} = A_{ш.с.}$), то ККД буде нульовим.

При цьому рух машини буде можливим, але корисна робота не здійснюватиметься.

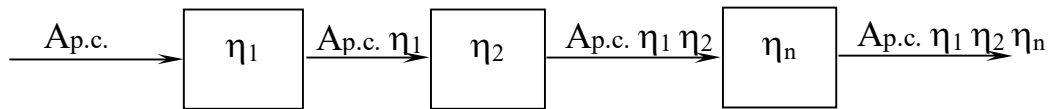
Такий рух машини називається холостим.

Випадок отримання від'ємного значення ККД означає самогальмування або заклинювання механізму машини і неможливість його руху у потрібному напрямку.

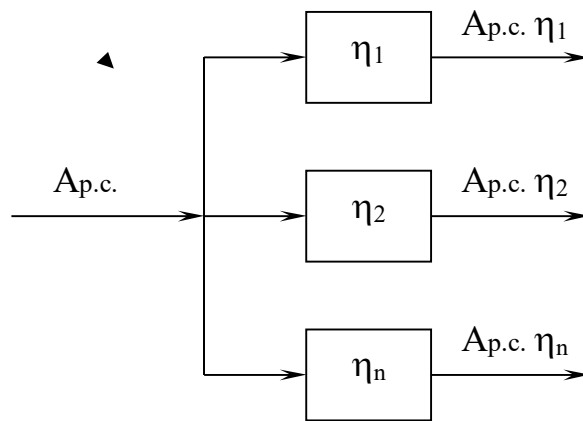
Так як машина може мати декілька різних механізмів, то визначення її ККД зводиться до попереднього розрахунку ККД кожного з механізмів. Потім, в залежності від способу кінематичного з'єднання цих механізмів, визначають загальний ККД усієї машини.

У цілому існує три способи з'єднання механізмів: послідовне, паралельне і змішане.

Якщо машина складається із n послідовно з'єднаних механізмів, то кожен із наступних механізмів машини отримує рух від відомої ланки попереднього механізму (рис. 4.103, *a*).



a



б

Рис. 4.103

Загальний ККД такої машини η дорівнює добутку ККД усіх механізмів, що входять до її складу:

$$\eta = \frac{A_{p.c.} \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \dots \cdot \eta_n}{A_{p.c.}} = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_n. \quad (4.179)$$

Оскільки кожен із співмножників даного рівняння буде менший за одиницю, то ККД усієї системи механізмів буде меншим будь-якого окремого ККД елемента системи. Це означає, що із збільшенням механізмів, що утворюють машину, ККД її буде зменшуватись.

Якщо машина складається із n паралельно з'єднаних механізмів, то

кожен з цих механізмів має одне і теж загальне джерело енергії (рис. 4.103, б).

За такого способу утворення системи механізмів загальний ККД η буде меншим від найбільшого η_{max} із ККД складових механізмів і більшим від найменшого η_{min} з них:

$$\eta_{max} < \eta < \eta_{min}.$$

Отже при паралельному з'єднанні механізмів, за інших рівних умов, є можливість отримати вищий ККД, ніж при послідовному з'єднанні.

Якщо ж усі ККД складових механізмів однакові за величиною, то загальний ККД системи буде дорівнювати кожному з них.

Таким чином, загальний ККД машини η при паралельному з'єднанні складових механізмів із однаковими ККД дорівнює ККД кожного механізму, що входить до її складу:

$$\eta = \frac{A_{p.c.} \cdot \eta_1}{A_{p.c.}} = \frac{A_{p.c.} \cdot \eta_2}{A_{p.c.}} = \dots = \frac{A_{p.c.} \cdot \eta_n}{A_{p.c.}} = \eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_n. \quad (4.180)$$

При змішаному з'єднанні механізмів визначення ККД складової системи виражається через окремі ККД складових механізмів та буде залежати від кількості послідовних і паралельних гілок, їх розташування та розподілу механічної енергії всередині кожної з них.

20.8. Аналіз зміни кінетичної енергії машинного агрегату

Для подальшого отримання рівнянь руху машинного агрегату в інтегральній формі проведемо аналіз зміни його кінетичної енергії в процесі руху.

При цьому будемо вважати, що усі силові фактори, які діють на ланки машинного агрегату, зведені до його початкової ланки і залежать лише від її положення, тобто від кута її повороту φ .

Отже нехай будуть задані зведені моменти рушійних сил $M_{зв.p}(\varphi)$ і зведені моменти сил опору $M_{зв.оп}(\varphi)$ машинного агрегату у вигляді графічних залежностей від кута повороту φ ланки зведення (рис. 4.104).

Дані графічні залежності охоплюють усі стадії руху машинного агрегату: розбігу t_p , усталеного руху t_y , вибігу t_B і мають масштаб зведених моментів μ_M та кута повороту μ_φ ланки зведення.

Розв'язок даної задачі проведемо графічним способом.

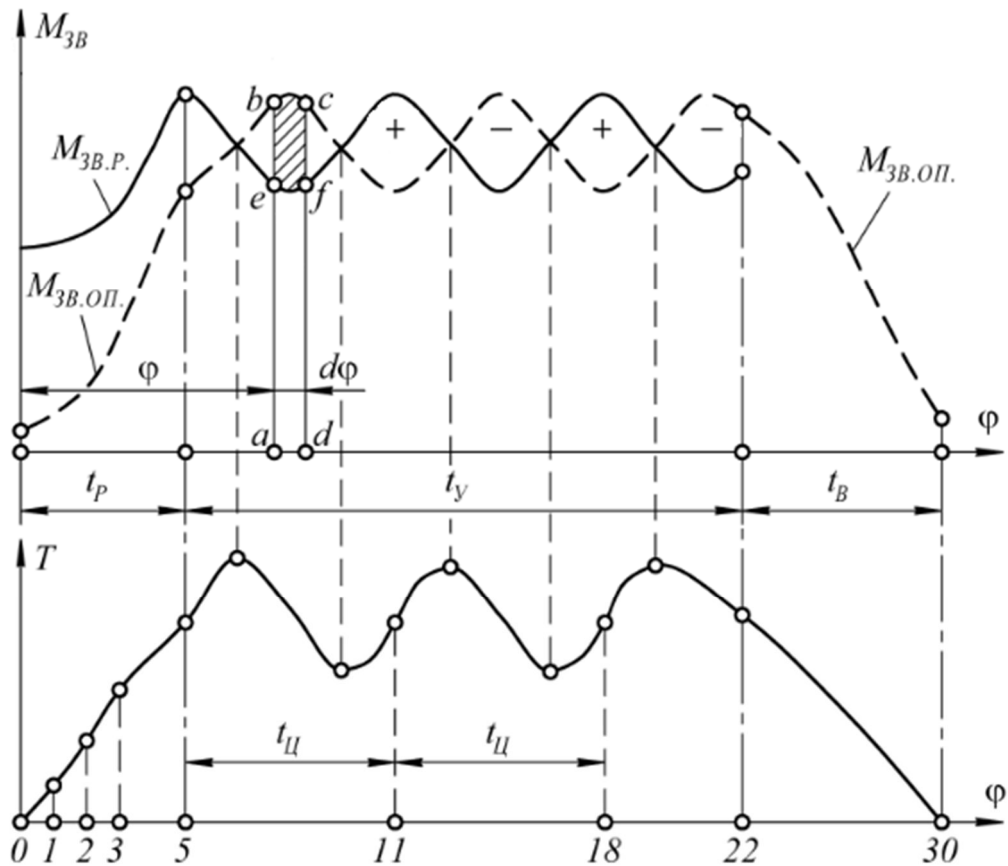


Рис. 4.104

Для цього на графіку функції $M_{3B.OP.}$ виділимо нескінченно малу криволінійну площу $abcd$ величиною dS_{on} .

Тоді

$$M_{3B.OP.} \cdot d\varphi = dS_{on} \cdot \mu_M \cdot \mu_\varphi,$$

або

$$dA_{3B.OP.} = dS_{on} \cdot \mu_M \cdot \mu_\varphi = dS_{on} \cdot \mu_A, \quad (4.181)$$

Отже елементарна площа $abcd$ величиною dS_{on} являє собою у деякому масштабі $\mu_A = \mu_M \cdot \mu_\varphi$ елементарну роботу $dA_{3B.OP.}$ зведеного моменту сил опору механізму при повороті його ланки зведення на кут $d\varphi$.

Аналогічно елементарна площа $aefd$ величиною dS_p на графічній залежності $M_{3B.P.}$ представляє собою елементарну роботу $dA_{3B.P.}$ зведеного моменту рушійних сил на тому ж переміщенні $d\varphi$ і в тому ж масштабі μ_A :

$$dA_{зв.р} = dS_p \cdot \mu_M \cdot \mu_\varphi = dS_p \cdot \mu_A, \quad (4.182)$$

Тоді елементарна робота усіх сил, що прикладені до механізму на тому самому переміщенні, як різниця між елементарними роботами зведених сил опору і рушійних сил ($dA_{зв.он} - dA_{зв.р}$), дорівнює приросту кінетичної енергії машини при повороті ланки зведення на кут $d\varphi$:

$$d\left(\frac{J_{зв} \omega^2}{2}\right) = dA_{зв.он} - dA_{зв.р},$$

Розглянутий у даному випадку приріст кінетичної енергії в інтервалі розглянутого кута $d\varphi$ буде від'ємним, так як за абсолютними значеннями $dA_{зв.он} > dA_{зв.р}$ (рис. 4.104). При інших значеннях кута φ , де $dA_{зв.он} < dA_{зв.р}$ приріст кінетичної енергії буде додатним.

Отже робота зведеного моменту сил при повороті кута ланки зведення від θ до φ буде дорівнювати:

$$A_{зв} = \int_0^\varphi (M_{зв.он} - M_{зв.р}) d\varphi. \quad (4.183)$$

Ця робота відповідає алгебраїчній сумі площ S_i між кривими зведених моментів сил опору і рушійних сил на діаграмі.

Треба зазначити, що отримані площі S_i беруться із додатним знаком, якщо $M_{зв.он} > M_{зв.р}$ і з від'ємним, якщо $M_{зв.он} < M_{зв.р}$.

У цілому знаходження загальної величини площі S , яка знаходиться між двома графіками $M_{зв.он}$ і $M_{зв.р}$ на деякому інтервалі зміни кута повороту ланки зведення, дозволяє методом графічного інтегрування визначити роботу всіх заданих сил на цьому ж інтервалі.

Цю роботу можна розрахувати за формулою

$$A_{зв} = S \cdot \mu_M \mu_\varphi. \quad (4.184)$$

Так, на рис.4.104. представлений графік роботи від початку руху машини до її зупинки.

Відповідно до основного рівняння руху машини (4.147) цей графік одночасно представляє собою також діаграму приросту кінетичної енергії ΔT .

В даному випадку, оскільки в моменти пуску і зупинки кутова швидкість ланки зведення дорівнює нулю, то приріст кінетичної енергії ΔT за весь час роботи машини дорівнює нулю і отриманий графік представляє собою криву T кінетичної енергії.

20.9. Визначення кутової швидкості ланки зведення графічним способом

Для аналізу закону руху початкової ланки машини у випадку, коли залежність $M_{зв.он}$ задана у вигляді графіка, інтегральне рівняння (4.150) також доводиться розв'язувати графічно.

Покажемо, як визначається кутова швидкість ω за час одного оберту ланки зведення машини або один цикл її роботи при усталеному русі.

Спочатку розглянемо побудову графіків робіт і приросту кінетичної енергії для робочої машини.

Будемо вважати, що для неї задана тільки графічна залежність зведеного моменту сил опору $M_{зв.он}(\varphi)$.

Треба зазначити, що у загальному випадку задається ще і графічна залежність зведеного моменту рушійних сил $M_{зв.р}(\varphi)$.

Отже спочатку побудуємо задану графічну залежність $M_{зв.он}(\varphi)$ в певному масштабі зведених моментів μ_M і кута повороту μ_φ ланки зведення (рис. 4.105).

При цьому вісь абсцис, на якій будемо відкладати кут повороту ланки зведення, розіб'ємо на рівні відрізки і позначимо точками $0, 1, 2, \dots$, які будуть відповідати номеру положення робочої машини.

Відповідно до цих положень по осі ординат відкладемо абсолютні значення величин зведених моментів сил опору $M_{зв.он}(\varphi)$, які умовно позначимо знаком "-", так як ці зведені моменти є моментами сил опору.

Треба зазначити, що для двигуна в цій задачі так само буде задана графічна залежність, тільки зведених моментів рушійних сил $M_{зв.р}(\varphi)$, і величини цих моментів ми також будемо відкладаємо по осі ординат, але із позначкою "+", так як ці зведені моменти є моментами рушійних сил.

Тому на рис. 4.105 без дужок будуть показані графічні залежності та їх знаки для робочій машині, а в дужках – для двигуна.

Для побудови графіку роботи $A_{он} = A_{он}(\varphi)$ сил опору робочої машини застосуємо метод графічного інтегрування функції $M_{зв.он}(\varphi)$. Відмітимо, що принципи графічного диференціювання і інтегрування є протилежними за послідовністю побудов і докладно були розглянуті при кінематичному дослідженні механізмів графічними методами.

Для проведення графічного інтегрування функції $M_{зв.он}(\varphi)$ кожную ділянку її осі абсцис $01, 12, 23, \dots$ ділимо навпіл і коректуємо це ділення, провівши горизонталі так, щоб площі криволінійних трикутників (заштриховані) між горизонталі та графіком $M_{зв.он}(\varphi)$ були приблизно однаковими.

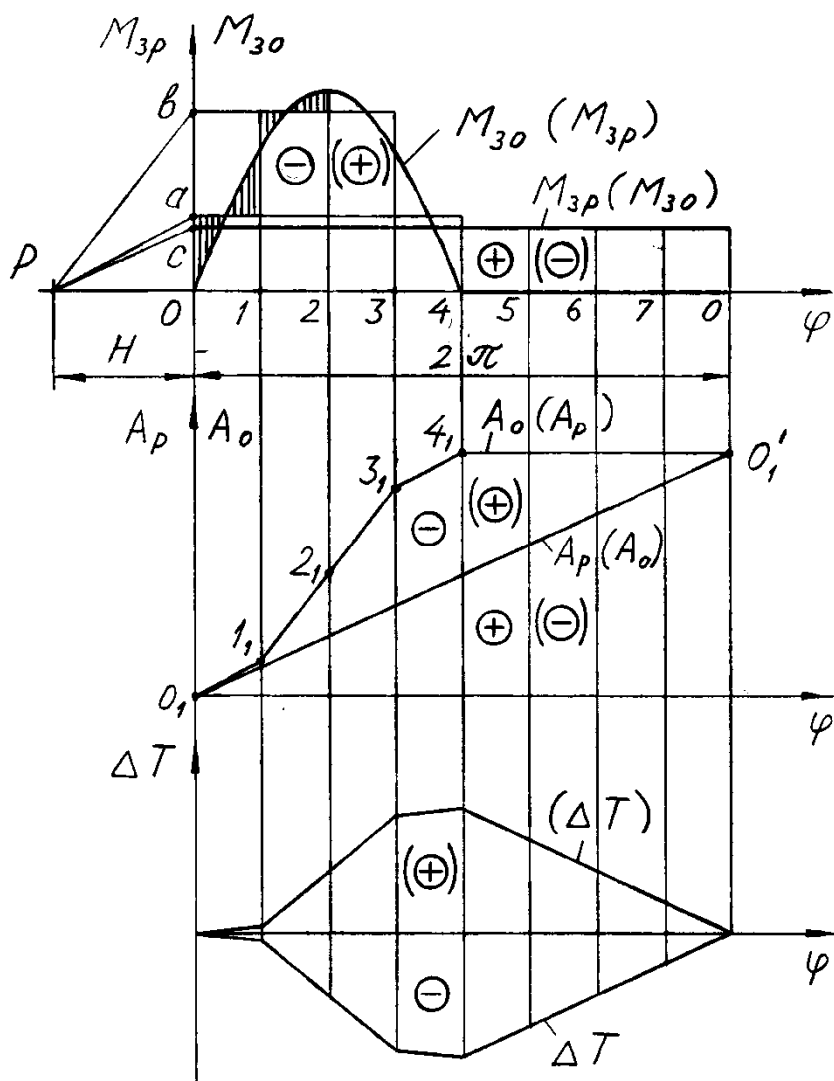


Рис. 4.105

Далі знаходимо точки перетину цих горизонталей з віссю ординат, у даному випадку – це точки a, b, c, d, \dots .

Проводимо полюсну відстань PO , з'єднуємо точки a, b, c, d, \dots із полюсом P і отримуємо промені Pa, Pb, Pc, Pd, \dots .

Під даною діаграмою будуємо нову систему координат і ділимо вісь абсцис на такі ж інтервали, як і на попередньому графіку.

З початку нової системи координат проводимо у першому інтервалі лінію $0I_1$ паралельно до променя Pa , з кінця відрізка $0I_1$ проводимо у другому інтервалі відрізок I_12_1 паралельно променю Pb , з кінця відрізка I_12_1 проводимо у третьому інтервалі відрізок 2_13_1 паралельно променю Pc , і т.д. для усіх інтервалів.

Отриману ламану лінію $abcd\dots$ замінюємо пивною лінією і одержуємо графік шуканої інтегральної кривої – діаграми роботи $A_{on} = A_{on}(\varphi)$ сил опору робочої машини.

Масштаб отриманої діаграми робіт як відомо, буде визначатись наступним виразом

$$\mu_A = \mu_M \mu_\varphi \cdot H.$$

де H – довільно вибрана полюсна відстань PO на діаграмі.

Далі знайдемо роботу $A_p = A_p(\varphi)$ рушійних сил робочої машини.

Із умов енергетичного балансу зрозуміло, що на початку і в кінці циклу усталеного руху машини робота рушійних сил A_p має дорівнювати дорівнює роботі сил опору A_{on} :

$$A_p = A_{on}.$$

Якщо зведений момент рушійних сил не заданий, то будемо вважати, що робота $A_p = A_p(\varphi)$ рушійних сил робочої машини змінюється за лінійним законом. Тоді, з'єднавши точки 0_1 і $0'_1$ початку і кінця діаграми A_{on} , знаходимо лінійну графічну залежність $A_p = A_p(\varphi)$.

Для отримання графіка зведеного моменту рушійних сил робочої машини отриману залежність $A_p = A_p(\varphi)$ графічно продиференціюємо.

Для цього на діаграмі зведених моментів із полюса P проводимо паралельно лінійному графіку A_p промінь до перетину його з віссю ординат. Із отриманої точки перетину c проводимо горизонталь, яка і є графіком зведеного моменту рушійних сил $M_{зв.p}(\varphi)$. Як бачимо в даному випадку ця графічна залежність є сталою величиною: $M_{зв.p}(\varphi) = const$.

Далі побудуємо графічну залежність приросту кінетичної енергії робочої машини $\Delta T = \Delta T(\varphi)$.

Як відомо, приріст кінетичної енергії робочої машини визначається різницею роботи рушійних сил і сил опору:

$$\Delta T = A_p - A_{on}.$$

Тоді віднімаючи відповідно від ординат побудованого графіка роботи рушійних сил $A_p = A_p(\varphi)$ ординати графіка роботи сил опору $A_{on} = A_{on}(\varphi)$, можна отримати діаграму приросту кінетичної енергії робочої машини $\Delta T = \Delta T(\varphi)$, масштаб якої

$$\mu_{\Delta T} = \mu_A.$$

При знаходженні графічних залежностей для двигуна, коли заданий тільки зведений момент рушійних сил $M_{зв.p}(\varphi)$, усі графічні побудови будуть аналогічними.

При цьому, якщо за абсолютною величиною зведені моменти $M_{зв.p}$ і $M_{зв.он}$ взяти ідентичними, то для робочої машини і двигуна величини інших моментів, робіт, кінетичних енергій, а також їх знаки поміняються містами.

Такий випадок, коли розглядуваною машиною буде двигун на рис. 6.6 показаний у дужках.

Далі, після отримання закону зміни кінетичної енергії $\Delta T = \Delta T(\varphi)$, визначимо, наприклад, для двигуна закон руху його початкової ланки.

Для цього треба побудувати діаграму енергомаси $\Delta T = \Delta T(J_{зв})$ у вигляді графічної залежності зміни кінетичної енергії машини від її зведеного моменту інерції. Така діаграма носить назву відомого австрійського вченого Віттенбауера, який запропонував її для визначення кутової швидкості ланки зведення.

Для отримання діаграми Віттенбауера потрібно з графіків приросту кінетичної енергії $\Delta T = \Delta T(\varphi)$ і зведеного моменту інерції $J_{зв} = J_{зв}(\varphi)$ виключити спільний параметр φ . Тому для зручності діаграми $\Delta T = \Delta T(\varphi)$ і $J_{зв} = J_{зв}(\varphi)$ розташуємо під кутом 90° (рис. 6.7).

Далі із кожної точки i_1 , $i = 0, 1, 2, \dots$, графіка $J_{зв} = J_{зв}(\varphi)$ проводимо вертикаль, а з точки i_2 графіка $\Delta T = \Delta T(\varphi)$ – горизонталь.

На перетині кожної з цих двох точок знаходимо точку i , яка відповідає номеру положення механізму.

Сполучимо отримані точки i для різних положень плавною лінією і отримаємо шукану графічну залежність $\Delta T = \Delta T(J_{зв})$ як на рис. 4.106.

Як бачимо, побудована крива у режимі усталеного руху описує замкнену траєкторію.

За допомогою отриманої діаграми енергомаси або діаграми Віттенбауера $\Delta T = \Delta T(J_{зв})$ можна встановити залежність $\omega = \omega(\varphi)$ кутової швидкості ланки зведення як функції кута повороту φ .

Для цього спочатку треба перейти від графічної залежності $\Delta T = \Delta T(J_{зв})$ до $T = T(J_{зв})$.

Це легко зробити, змістивши вісь абсцис діаграми вниз на величину початкового значення кінетичної енергії при $\varphi = 0$ і $\omega = \omega_0$:

$$T(\omega_0) = J_{зв}(0) \frac{\omega_0^2}{2}.$$

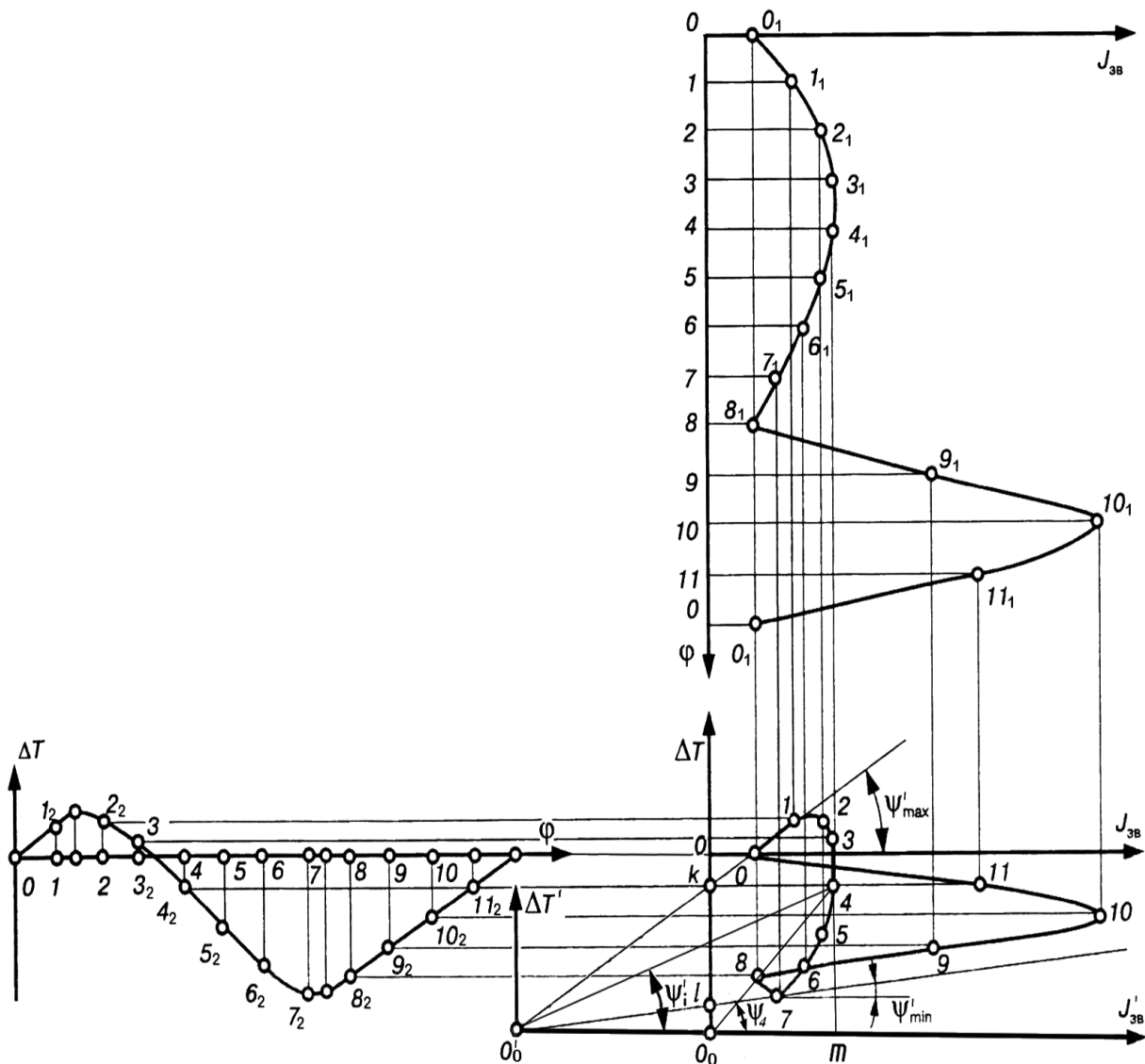


Рис. 4.106

Для цього від початку координат діаграми відкладемо вниз відрізок OO_0 , довжина якого у масштабі μ_T відповідає початковому значенню кінетичної енергії $T(\omega_0)$:

$$|OO_0| = \frac{T(\omega_0)}{\mu_T},$$

де $\mu_T = \mu_A$ – масштабний коефіцієнт діаграми.

В результаті отримана точка O_0 буде визначати початок координат графічної залежності $T = T(J_{3B})$.

Далі виберемо на діаграмі довільну точку (наприклад точку 4) і з'єднаємо її із початком координат O_0 . Кут нахилу отриманого відрізка $O_0 4$ до осі абсцис відповідно буде ψ_4 .

Із врахуванням того, що кінетична енергія машини в даному положенні буде

$$T_4 = J_{36.4} \frac{\omega_4^2}{2},$$

можна отримати наступний вираз для кутової швидкості ланки зведення для 4-го її положення

$$\omega_4 = \sqrt{2 \frac{T_4}{J_{36.4}}} = \sqrt{2 \frac{|O_0 k| \cdot \mu_T}{|O_0 m| \cdot \mu_J}},$$

де $|O_0 k|$, $|O_0 m|$ – довжини відрізків, які відповідають значенням T_4 і $J_{36.4}$ на діаграмі енергомаси.

Оскільки відношення відрізків

$$\frac{|O_0 k|}{|O_0 m|} = \operatorname{tg} \psi_4,$$

то остаточно будемо мати

$$\omega_4 = \sqrt{2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_4},$$

Аналогічно можна визначити швидкість ланки зведення в інших i -х положеннях механізму:

$$\omega_i = \sqrt{2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_i}. \quad (4.185)$$

Таким чином, за допомогою графіка $T = T(J_{36})$ можна отримати залежність $\omega = \omega(\varphi)$ ланки зведення машини і дослідити її рух.

Зрозуміло, що максимальним ω_{max} і мінімальним ω_{min} значенням кутової швидкості ланки зведення на діаграмі енергомаси будуть відповідати максимальні і мінімальні значення кутів нахилу її дотичних до осі абсцис.

При цьому чим менша буде різниця між ω_{max} і ω_{min} , тим менші будуть коливання кутової швидкості ланки зведення в процесі усталеного руху машини в межах одного циклу.

20.10. Визначення моменту інерції маховика за діаграмою Віттенбауера

Розрахунок маховика зводиться до визначення його моменту інерції, який має забезпечити умови відхилення кутової швидкості ведучої ланки машини в заданих межах.

Як вже було з'ясовано раніше, в процесі усталеного руху машини в межах одного циклу кутова швидкість ланки зведення буде коливатись від максимального ω_{max} до мінімального ω_{min} значень, відповідно до максимальних і мінімальних значень кінетичної енергії машини

$$T_{max} = J_{зв. max} \cdot \frac{\omega_{max}^2}{2}; \quad (4.186)$$

$$T_{min} = J_{зв. min} \cdot \frac{\omega_{min}^2}{2}. \quad (4.187)$$

При цьому максимальні і мінімальні значення цих кутових швидкостей можна знайти із (4.185), як

$$\omega_{max} = \sqrt{2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_{max}}, \quad (4.188)$$

$$\omega_{min} = \sqrt{2 \frac{\mu_T}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi_{min}}, \quad (4.189)$$

де ψ_{max} і ψ_{min} – відповідно максимальні і мінімальні значення кутів нахилу дотичних, що проведені до діаграми Віттенбауера, і відраховуються від горизонтальної осі абсцис.

З останніх двох рівнянь бачимо, що

$$\operatorname{tg} \psi_{max} = \frac{\mu_T}{2 \cdot \mu_J} \omega_{max}^2, \quad (4.190)$$

$$\operatorname{tg} \psi_{min} = \frac{\mu_T}{2 \cdot \mu_J} \omega_{min}^2, \quad (4.191)$$

З іншого боку, для забезпечення рівномірності ходу при періодичних коливаннях на ведучий вал машини встановлюють масивне махове колесо з важким ободом – маховик, який має великий момент інерції.

При цьому граничні значення кутових швидкостей ω_{max} і ω_{min} мають розраховуватись згідно виразів (4.188) і (4.189) за заданими коефіцієнтами нерівномірності руху і середньою кутовою швидкістю ведучої ланки:

$$\omega_{max} = \omega_c \sqrt{1 + \delta},$$

$$\omega_{min} = \omega_c \sqrt{1 - \delta}.$$

Підставивши ці вирази в (4.190) і (4.191), отримаємо

$$tg \psi_{max} = \frac{\mu_T}{2 \cdot \mu_J} \omega_c^2 (1 + \delta), \quad (4.192)$$

$$tg \psi_{min} = \frac{\mu_T}{2 \cdot \mu_J} \omega_c^2 (1 - \delta), \quad (4.193)$$

Із останніх двох виразів знаходимо кути ψ_{max} і ψ_{min} . Ці кути будуть відповідати заданим умовам забезпечення рівномірності руху ведучої ланки за рахунок збільшення її моменту інерції на величину J_M моменту інерції встановленого на ній маховика:

Для знаходження цього додаткового моменту інерції маховика J_M до діаграми енергомаси достатньо провести дотичні під знайденими кутами ψ_{max} і ψ_{min} (рис. 4.106).

На перетині цих дотичних буде знаходитись початок координат O'_0 діаграми виду $T = T(J_{зв} + J_M)$.

Тоді момент інерції маховика можемо розрахувати як

$$J_M = |O'_0 O_0| \cdot \mu_J, \quad (4.194)$$

де $|O'_0 O_0|$ – довжина відрізка на діаграмі, що відповідає величині моменту інерції маховика J_M у заданому масштабі μ_J .

При цьому кутова швидкість ланки зведення із врахуванням встановленого маховика, наприклад, для того ж 4-го її положення можна знайти за виразом

$$\omega'_4 = \sqrt{2 \frac{\mu_T}{\mu_J} tg \psi'_4}, \quad (4.195)$$

де ψ'_4 – кут нахилу до осі абсцис відрізка $O'_0 4$.

Аналогічно для будь-якого i -го положення кутова швидкість ланки зведення при наявності на ній махового колеса визначається як

$$\omega'_i = \sqrt{2 \frac{\mu_T}{\mu_J} tg \psi'_i}, \quad (4.196)$$

де ψ'_i – кут нахилу до осі абсцис відрізка $O'_0 i$, який з'єднує початок O'_0

діаграми $T = T(J_{зв} + J_M)$ з i -ю точкою цієї діаграми.

Треба зауважити, що при невеликих значеннях заданого коефіцієнта нерівномірності руху δ різниця між кутами може бути незначною. Отже точка O'_0 перетину дотичних може вийти за межі креслення.

У цьому випадку можна визначити відрізок kl між точками перетину дотичних з віссю ΔT .

Довжина цього відрізка буде

$$\begin{aligned} |kl| &= |kO_0| - |lO_0| = |O'_0O_0| \cdot \operatorname{tg} \psi_{\max} - |O'_0O_0| \cdot \operatorname{tg} \psi_{\min} = \\ &= |O'_0O_0| \cdot (\operatorname{tg} \psi_{\max} - \operatorname{tg} \psi_{\min}). \end{aligned}$$

Підставляючи в останній вираз значення $\operatorname{tg} \psi_{\max}$ і $\operatorname{tg} \psi_{\min}$ із формул, (4.192) і (4.193) можна отримати

$$|kl| = |O'_0O_0| \cdot \frac{\mu_J}{2\mu_T} \omega_c^2 (1 + \delta - (1 - \delta)) = |O'_0O_0| \cdot \frac{\mu_J}{\mu_T} \omega_c^2 \cdot \delta.$$

Із врахуванням того, що $|O'_0O_0| \cdot \mu_J = J_M$, можемо записати

$$|kl| = J_M \frac{\delta}{\mu_T} \omega_c^2. \quad (4.197)$$

Звідки момент інерції маховика визначається як

$$J_M = \frac{|kl| \cdot \mu_T}{\omega_c^2 \delta}.$$

Масу і розміри маховика в подальшому можна знайти в залежності від його моменту інерції із відомої формули динаміки:

$$J_M = \frac{mD^2}{4}, \quad (4.198)$$

де m – рівномірно розподілена по ободу маса маховика, D – діаметр інерції (діаметру кола, описаного центром ваги перерізу обода маховика).

Таким чином, маховик внаслідок свого значного моменту інерції збільшує інерційність механічної системи, що і усуває значні періодичні зміни кутової швидкості.

Чим більший момент інерції маховика тим краще стабілізується кутова швидкість. Маховик накопичує кінетичну енергію на ділянках циклу, де робота і зведений момент рушійних сил перевищують роботу і зведений момент сил опору, і віддає енергію на ділянках циклу, де це співвідношення протилежне. Тобто маховик являється механічним акумулятором енергії машини.

20.11. Регулятори швидкості

Якщо для забезпечення рівномірності ходу при періодичних коливаннях на вал кривошипа машини встановлюють маховик, то при неперіодичних коливаннях для регулювання рівномірності ходу машини застосовують спеціальні регулюючі пристрої – *регулятори швидкості*.

Регулятори швидкості автоматично стабілізують неперіодичні коливання кутової швидкості ведучих ланок в заданих межах.

Робота регуляторів заснована на принципі зворотного зв'язку. При цьому регулювання швидкості обертання ведучого валу машини здійснюється шляхом зміни подачі енергії до двигуна або шляхом зміни опору на відомому валу машини. В свою чергу двигун під час роботи діє на регулятор, який керує роботою двигуна.

Регулювання за принципом зворотного зв'язку може бути прямим, коли регулятор впливає безпосередньо на керуючий орган двигуна, і непрямим, коли регулятор керує через допоміжні пристрої.

У випадку непрямого регулювання може застосовуватись не механічний вплив двигуна на зворотній зв'язок, а електричний, гідравлічний, пневматичний.

Існують також *відцентрові, гальмівні і електричні* регулятори.

У машинобудуванні найбільш поширені відцентрові регулятори. Гальмівні і електричні регулятори у більшості випадків застосовуються для приладів точної механіки.

Розглянемо, наприклад, відцентровий регулятор, принцип дії якого заснований на використанні сили інерції обертальних мас A для регулювання подачі палива або електроенергії до двигуна (рис. 4.107).

Наприклад, зменшення зовнішнього навантаження утворює в машині надлишок рушійної сили. Це приводить до збільшення швидкості обертання вала двигуна машини, а відповідно, і регулятора, який зв'язаний з цим валом. Кулі A регулятора при цьому розвинути відцентрову силу інерції, яка зростає із збільшенням швидкості. Під впливом відцентрові сили кулі розходяться і системою важелів піднімають муфту B , що приведе до повороту дросельного клапану, зменшення подачі палива до двигуна і відповідно зменшення швидкості обертання вала. При зменшенні швидкості відбувається зворотний процес, подача палива збільшується, а відповідно збільшується і швидкість обертання вала двигуна.

Таким чином, задана швидкість обертання вала двигуна машини підтримується автоматично.

Забезпечення підтримки заданої кутової швидкості в регуляторі досягають підбором його відповідних параметрів: маси, розмірів, ланок важелів і т.ін.

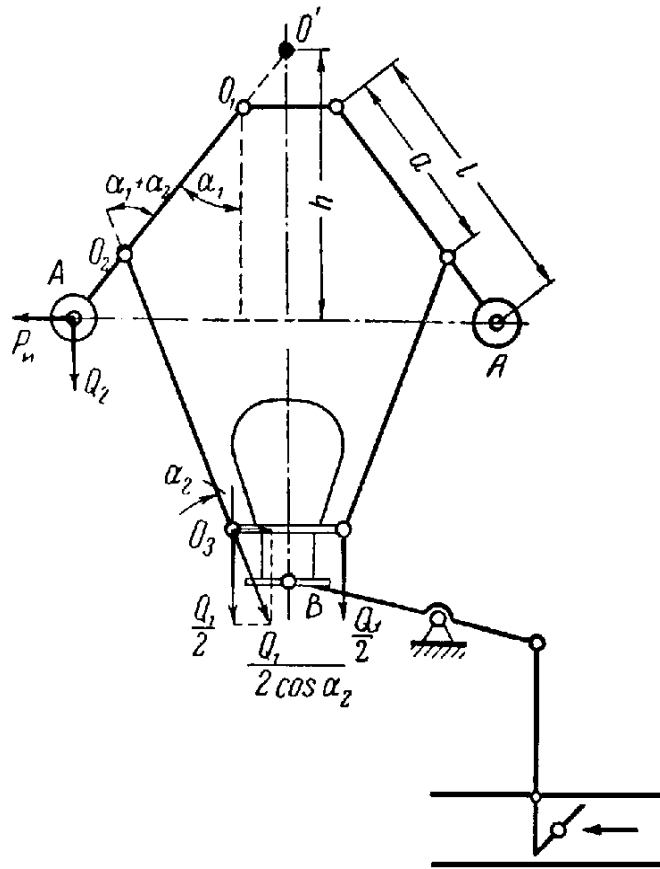


Рис. 4.107

Кінцевий вираз для визначення заданого числа обертів n (об/хв) вала двигуна машини в залежності від параметрів відцентрового регулятора має наступний вигляд:

$$n = 30 \cdot \sqrt{1 + \frac{Q_1 \cdot a}{Q_2 \cdot l}}, \quad (4.199)$$

де Q_1 – вага муфти з вантажем, Q_2 – вага кулі, a , l – довжина ланок регулятора, h – висота підйому муфти регулятора.

Важливою функцією регуляторів є його статична стійкість, яка полягає у намаганні регулятора повернути механічну систему в стан рівноваги, з якого вона була виведена, а також динамічна нестійкість, яка характеризується зміною регульованої кутової швидкості ведучого вала машини при зміні діючого на неї навантаження.

20.12. Аналітичний розв'язок рівнянь руху механізму

У випадку, коли залежність $M_{зв}(\varphi) = M_p(\varphi) - M_o(\varphi)$ задана в аналітичному вигляді, то рівняння руху машинного агрегату в інтегральній формі (4.150) можна розрахувати аналітично.

В результаті кутову швидкість ланки зведення у i -му положенні механізму можна визначити з рівняння (4.151):

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2}{J_{звi}} \int_{\varphi_o}^{\varphi_i} M_{зв} d\varphi + \frac{J_{звo}}{J_{звi}} \omega_o^2}.$$

Зрозуміло, якщо задані аналітичні функції $M_p = M_p(\varphi)$, $M_o = M_o(\varphi)$, $J_{зв} = J_{зв}(\varphi)$, то для визначення кутової швидкості ω_i необхідно ще мати задане значення кутової швидкості ω_o на початку руху.

В момент пуску машини, коли $\omega_o = 0$, попередній вираз розраховують з формули (4.152):

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2}{J_{звi}} \int_{\varphi_o}^{\varphi_i} M_{зв} d\varphi},$$

де $M_{зв} = M_p - M_o$.

З наведених формул можна визначити значення кутової швидкості ланки зведення як функції її кута повороту, тобто $\omega = \omega(\varphi)$.

У випадку, коли зведений момент інерції $J_{зв} = const$, значення кутової швидкості ланки зведення в i -му положенні визначиться як

$$\omega_i = \sqrt{\frac{2}{J_{звi}} \int_{\varphi_o}^{\varphi_i} M_{зв} d\varphi + \omega_o^2}. \quad (4.200)$$

Для прикладу розглянемо визначення рівняння руху початкової ланки машинного агрегату.

При цьому будемо вважати, що зведений до головного валу момент сил опору змінюється за наступним законом $M_o = 10 \sin \varphi$ (де φ – кут повороту головного валу), а момент сил опору M_o діє тільки на протязі першої половини повороту.

На протязі другої половини повороту $M_o = 0$ (рис 4.108, а).

Рушійний момент від двигуна прикладається до головного валу, він діє протягом всього часу роботи і є величиною постійною $M_p = const$. Зведений момент інерції є величиною сталою і дорівнює $J_{зв} = 2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

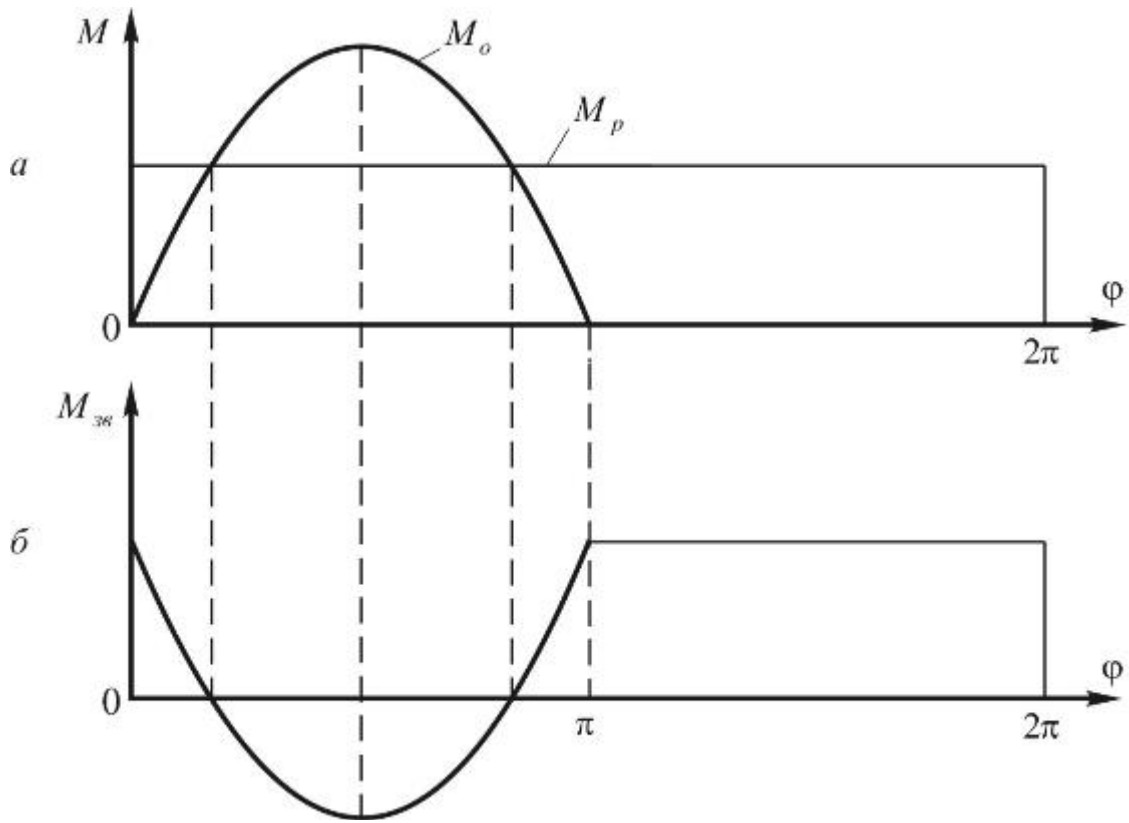


Рис. 4.108

Знайдемо закон зміни кутової швидкості ω головного валу машинного агрегату.

Для цього спочатку визначимо величину рушійного моменту M_p , на підставі того, що швидкість головного валу на початку і в кінці циклу усталеного руху рівні між собою.

Тобто в цей період роботу рушійних сил і сил опору можна прирівняти:

$$A_p = A_o.$$

В результаті будемо мати

$$A_p = M_p \varphi = M_p \cdot 2\pi;$$

$$A_o = \int_0^{\pi} M_o d\varphi = \int_0^{\pi} 10 \sin \varphi d\varphi = -10 [\cos \varphi]_0^{\pi} = 20 \text{ Дж}.$$

Отже

$$M_p \cdot 2\pi = 20 \text{ Дж},$$

або

$$M_p = \frac{20}{2\pi} = \frac{10}{\pi}.$$

Далі визначимо зведений момент сил, який діє на головний вал машинного агрегату.

Фактично за вхідною умовою тут будемо шукати два різних закони зміни зведеного моменту: на протязі першої половини повороту головного валу і на протязі другої половини.

На протязі першої половини повороту головного валу будемо мати наступний закон зміни зведеного моменту

$$M_{зв1} = M_p - M_o = \frac{10}{\pi} - 10 \sin \varphi = 10 \left(\frac{1}{\pi} - \sin \varphi \right).$$

На протязі другої половини повороту головного валу, коли за вхідною умовою $M_o = 0$, отримаємо

$$M_{зв2} = M_p - M_o = \frac{10}{\pi} - 0 = \frac{10}{\pi}.$$

На рис. 4.108, б побудовано отриману залежність зміни зведеного моменту $M_{зв}$ від кута повороту φ головного валу.

Тепер визначимо кутову швидкість ω головного валу.

В першій половині повороту головного валу при зміні кута φ в межах значень $[0 - \pi]$ будемо мати

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{2}{J_{зв}} (A_p - A_o) + \omega_0^2 = \frac{2}{J_{зв}} \int_0^\varphi M_{зв1} d\varphi + \omega_o^2 = \frac{2}{2} \int_0^\varphi 10 \left(\frac{1}{\pi} - \sin \varphi \right) d\varphi + 10^2 = \\ &= 10 \left[\frac{1}{\pi} \varphi + \cos \varphi \right]_0^\varphi + 10^2 = 10 \left(\frac{1}{\pi} \varphi + \cos \varphi + 9 \right). \end{aligned}$$

Звідки отримаємо

$$\omega_1 = \sqrt{10 \left(\frac{1}{\pi} \varphi + \cos \varphi + 9 \right)}.$$

Зокрема кутова швидкість головного валу в положенні $\varphi = \pi$ буде дорівнювати величині

$$\omega_1 = \sqrt{10 \left(\frac{1}{\pi} \cdot \pi + \cos \pi + 9 \right)} = 9,5 c^{-1}.$$

В другій половині повороту головного валу при зміні кута φ в межах значень $[\pi - 2\pi]$ отримаємо

$$\begin{aligned} \omega_2^2 &= \frac{2}{J_{36}} (A_p - A_o) + \omega_1^2 = \frac{2}{J_{36}} \int_{\pi}^{\varphi} M_{36II} d\varphi + \omega_1^2 = \frac{2}{2} \int_{\pi}^{\varphi} \frac{10}{\pi} d\varphi + 9,5^2 = \\ &= \left[\frac{10}{\pi} \varphi \right]_{\pi}^{\varphi} + 90 = \frac{10}{\pi} \varphi + 80. \end{aligned}$$

Отже

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{10}{\pi} \varphi + 80}.$$

Зокрема кутова швидкість головного валу в положенні $\varphi = 2\pi$ буде дорівнювати

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{10}{\pi} \cdot 2\pi + 80} = 10 c^{-1}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Які рівняння використовують при дослідженні руху механізмів і машин? Яким чином їх отримати?
2. Що розуміють під динамічною моделлю машинного агрегату?
3. З якою метою здійснюють зведення сил і моментів сил в механізмі?
4. Яка умова покладена в основу зведення сил і моментів сил?
5. Яка умова покладена в основу заміни мас і моментів інерції при зведенні?
6. Що називають зведеною силою і зведеним моментом сил?
7. Що називають зведеною масою і зведеним моментом інерції?
8. Напишіть диференціальне рівняння руху механізму для зведених сил і моментів сил.
9. Напишіть рівняння руху механізму в інтегральній формі для зведених сил і моментів сил.
10. Які три характерні стадії руху машинного агрегату Ви знаєте? Дайте їх характеристику.
11. Назвіть причини виникнення нерівномірності ходу машини в період її усталеного руху.

-
12. Як оцінити нерівномірність ходу машини? Як її можна зменшити?
 13. Як визначити ККД при послідовному і паралельному з'єднанні механізмів в машині?
 14. Які фактори впливають на періодичні і неперіодичні коливання вхідної ланки машини?
 15. Як побудувати графіки робіт і приросту кінетичної енергії?
 16. Поясніть принцип побудови діаграми енергомаси.
 17. Яким чином визначити кутову швидкість кривошипа за допомогою діаграми енергомаси?
 18. За яких умов визначають момент інерції маховика? Наведіть послідовність розрахунків.
 19. Яким чином забезпечують рівномірність ходу валу кривошипа при неперіодичних коливаннях?
 20. Як визначити кутову швидкість кривошипа із рівняння руху машинного агрегату аналітичним шляхом?

РОЗДІЛ 21. ТЕРТЯ І ЗНОС В МЕХАНІЗМАХ І МАШИНАХ

Під час роботи машин і механізмів має місце явище, яке перешкоджає рухові його ланок та супроводжується розсіюванням механічної енергії. Це явище називається *тертям*.

Енергія, що витрачається на тертя, перетворюється у теплоту. Одночасно з цим відбувається згладжування шорстких дотичних поверхонь і поступове зношення (спрацювання).

Підраховано, що біля третини світових енергетичних ресурсів даремно витрачається на роботу, що пов'язана з тертям.

Цілком зрозуміло, що бажано щоб ці втрати були мінімальними. Також відомо, що більше 80% деталей машин виходять з ладу через зношення. При цьому відомо, що забезпечити міцність деталей простіше та дешевше, ніж забезпечити їх стійкість проти спрацювання.

З іншого боку, тертя – корисне явище, на використанні сил тертя ґрунтується робота багатьох машин і механізмів (рух транспортних засобів, пасової та фрикційної передач, фрикційних муфт, зчеплень, гальм).

Треба відмітити, що галузь науки, яка охоплює комплекс питань, пов'язаних із вивченням тертя, аналізом спрацювання деталей машин, називається *триботехнікою*.

21.1. Основні поняття про тертя і його види

З самого моменту виникнення теорії механізмів і машин як науки тертя було одним з перших розглянутих питань.

При дослідженні фізичних основ явища тертя розрізняють тертя зовнішнє та внутрішнє.

Зовнішнє тертя – це опір відносному переміщенню, що виникає між двома тілами у зонах дотику їхніх поверхонь, по дотичній до них, і яке супроводжується дисипацією енергії.

Внутрішнє тертя – це процеси, що проходять у твердих (рідких та газоподібних тілах) при їх деформації, які призводять до необоротного розсіювання механічної енергії.

У теорії механізмів і машин розглядається лише зовнішнє тертя.

Сили тертя – це сили, що виникають у кінематичних парах при відносному русі ланок. Вони обумовлені реакціями в'язей і є складовими цих реакцій.

Тертя вважається складним фізичним явищем, для пояснення якого запропоновані дві гіпотези: механічну та молекулярну.

Згідно з першою гіпотезою, тертя виникає внаслідок деформацій

невеликих виступів і западин які неодмінно є на поверхнях тертя, як би при цьому вони не були добре виготовлені.

Згідно з іншою гіпотезою процес тертя полягає у подоланні існуючих та виникнення нових, сил молекулярної взаємодії у зонах фактичного контакту тіл.

Таким чином, сила тертя виникає внаслідок механічного зачеплення, пружно-пластичної деформації та молекулярної взаємодії контактуючих елементів поверхонь тертя.

Природа виникнення тертя до цього часу ще не досить вивчена. Експериментальні дослідження показують, що тертя є складний комплекс механічних, фізичних і хімічних явищ, які проявляються в різних умовах по різному.

В курсі ТММ розглядається не природа тертя і процеси які відбуваються при терті, а способи визначення сил тертя в кінематичних парах.

Залежно від характеру відносного руху елементів кінематичних пар розрізняють наступні види тертя: тертя ковзання (тертя першого роду); тертя кочення (тертя другого роду); тертя вертіння. Інколи ще розрізняють тертя кочення з проковзуванням та тертя при вібропереміщеннях.

Для зменшення сил тертя та інтенсивності спрацювання елементів кінематичних пар використовують мастила.

За станом поверхонь тертя розрізняють два види тертя: сухе тертя (без мастила) і тертя з мастилом.

В технічній літературі часто трапляється і такий поділ – сухе тертя та рідинне (в'язке) тертя.

Сухе – це тертя, що виникає на поверхнях вільних від будь-яких сторонніх речовин.

Рідинне – це тертя, при якому поверхні тертя повністю розділені шаром мастила.

Сили сухого та рідинного тертя мають різну природу, тому методи їх розрахунку також різні.

Крім того, інколи ще розрізняють проміжні види тертя: граничне, напівсухе і напіврідинне.

Тертя в кінематичних парах механізмів характеризується силами тертя і моментами сил тертя. Сили тертя діляться на сили тертя спокою, сили тертя ковзання, сили тертя вертіння.

Сила тертя спокою виникає тоді коли необхідно зрушити одне тіло уздовж поверхні іншого і вона перешкоджає можливому руху.

Сила тертя ковзання виникає при ковзанні одного тіла уздовж поверхні іншого, вона направлена протилежно до цього руху.

Сила тертя кочення виникає у вищих кінематичних парах при

наявності відносного обертового руху ланок навколо осі або точки контакту.

Сила тертя вертіння виникає при взаємодії торцевих поверхонь ланок обертових кінематичних пар (підп'ятниках).

21.2. Тертя ковзання сухих тіл

Розглянемо розподіл сил при терті ковзання сухих тіл на прикладі, коли тіло знаходиться на горизонтальній площині. (рис. 4.109).

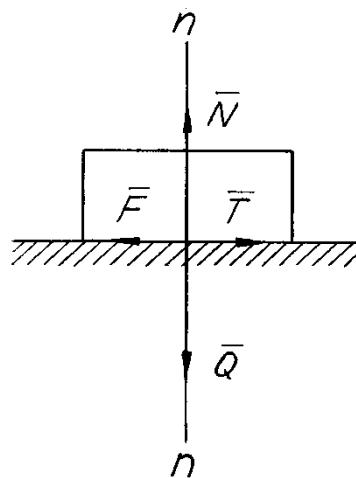


Рис. 4.109

Нехай повзун вагою \bar{Q} перебуває на горизонтальній площині у стані спокою:

$$Q = N.$$

Якщо прикласти до повзуна деяку невелику горизонтальну силу \bar{T} , він тим не менше залишається у спокої. Це свідчить про те, що на повзун, крім нормальної реакції \bar{N} , з боку площини діє ще одна сила – \bar{F} , яка зрівноважує прикладену силу \bar{T} . Тобто сила \bar{F} за величиною дорівнює силі \bar{T} і спрямована протилежно до неї:

$$F = T.$$

Ця горизонтальна складова реакції лежить у дотичній площині і є силою тертя ковзання спокою.

Таким чином, сила тертя, яка має місце при відносному спокої тіл, називається *силою тертя спокою* чи *силою статичного тертя*, а сам процес – *тертям спокою* або *статичним*.

Отже горизонтальна складова реакції площини на повзун \overline{F} зрівноважує прикладену до нього силу \overline{T} і зростає разом з нею доти, доки не порушиться рівновага. Це відбудеться тільки тоді, коли сила тертя \overline{F} досягне свого максимального значення F_{max} .

Тобто тертю руху передуює тертя спокою, а зусилля тертя між контактуючими поверхнями тіл виникають при їхньому відносному мікрозміщенні.

Сила тертя, яка перешкоджає ковзанню тіла, під час його руху, називається *силою тертя руху*, або *динамічною силою тертя ковзання*.

Як показують досліди, сила тертя руху менша від статичної сили тертя.

У більшості випадків користуються наближеними законами тертя ковзання, встановленими Г. Амонтоном і Ш. Кулоном.

1. Сила тертя при інших рівних умовах не залежить від площі дотику поверхонь тертя.

2. Максимальне значення сили тертя спокою прямо пропорційне до нормальної реакції \overline{N} (нормального тиску):

$$F_{Tmax} = f_c \cdot N. \quad (4.201)$$

де f_c – коефіцієнт тертя ковзання спокою.

Коефіцієнт тертя ковзання спокою є безрозмірною величиною, яка залежить матеріалу поверхонь тіл, що контактують, їх фізичного стану, тобто від величини і характеру шорсткості, наявності мастила, вологості і т.ін., величина цього коефіцієнта встановлюється експериментального і лежить між нулем і одиницею:

$$0 \leq f_c < 1.$$

Треба зазначити, що матеріали які мають високий коефіцієнт тертя, називаються фрикційними (гума, текстоліт, азбест, шкіра, тощо), а які низький коефіцієнт тертя – антифрикційними (бронза, латунь, бабіт, сірий чавун, капрон, і т.п.).

3. Сила тертя зростає із збільшенням часу попереднього контакту ланок.

Величину сили тертя руху визначають за формулою аналогічною до (4.201), підставивши в неї замість коефіцієнта тертя спокою f_c коефіцієнт тертя руху

$$F_T = f \cdot N. \quad (4.202)$$

де f – динамічний коефіцієнт тертя ковзання, безрозмірна величина, яка

визначається експериментально.

У технічних розрахунках вважають, що динамічний коефіцієнт тертя ковзання не залежить від відносної швидкості руху тіл.

Значення коефіцієнта тертя наведено у довідкових даних, при цьому як правило, приймають $f = 0,9f_c$.

Отже, сила тертя ковзання пропорційна нормальному тиску \bar{N} , прикладена на поверхні стику деталей і спрямована у бік, протилежний швидкості їхнього відносного руху.

Звичайно, сили тертя, що виникають на поверхні контактуючих тіл, завжди з'являються попарно: одна з них прикладена до одного тіла, а інша – до другого тіла і спрямована у зворотній бік.

21.3. Тертя в поступальній кінематичній парі

За своєю конструкцією поступальні кінематичні пари можуть бути плоскі (рис. 4.110, а), клинові (рис. 4.110, б) та циліндричні (рис. 4.110, в).

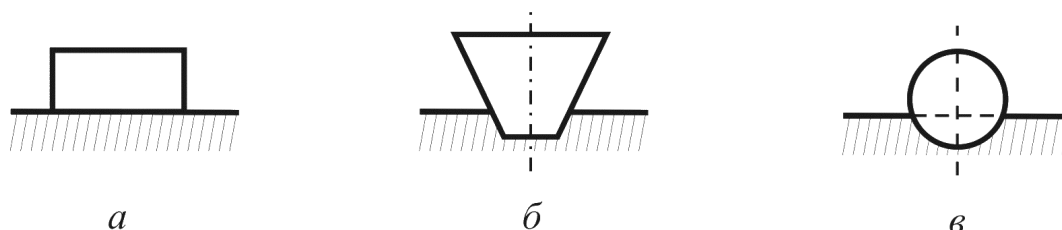


Рис. 4.110

У свою чергу, їх можна розділити на горизонтальні та похилі.

Розглянемо, наприклад, тертя в поступальній кінематичній парі (рис. 4.111).

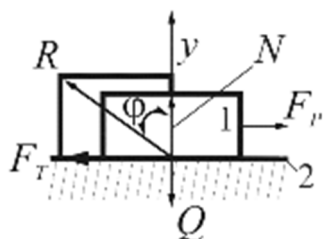


Рис. 4.111

Тут повзун 1 рухається по площині 2 під дією рушійної сили F_P і

несе корисне навантаження Q .

При рівномірному русі повзуна на нього, крім сил F_P і Q , діятиме ще нормальна реакція площини N і сила тертя F_T , яка спрямована в протилежний від руху повзуна бік.

Замінено сили F_T і N рівнодіючою реакцією R .

Ця реакція буде відхилена від нормалі $n - n$ на кут φ

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_T}{N} = f. \quad (4.203)$$

Отже

$$\operatorname{tg} \varphi = f,$$

або

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} f. \quad (4.204)$$

Тангенс кута тертя дорівнює коефіцієнту тертя ковзання.

Інакше кажучи, кутом тертя називається кут, тангенс якого дорівнює коефіцієнту тертя ковзання.

Розглянемо умову рівноваги повзуна I . Для цього складемо два рівняння рівноваги в проекціях відповідно на вертикальні і горизонтальні осі:

$$\begin{aligned} N - Q &= 0; \\ F_P - F_T &= 0. \end{aligned}$$

Звідки отримаємо

$$F_P = F_T = f_T N = f_T Q, \quad (4.205)$$

Якщо рушійна сила F_P має різний напрямок дії, то геометричне місце повної реакції утворює конічну поверхню, яка називається конусом тертя (рис. 4.112). Кут конуса тертя буде дорівнювати 2φ .

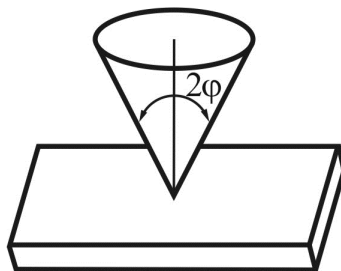


Рис. 4.112

На практиці також часто зустрічаються клинові кінематичні пари

(рис. 4.113) з кутом клина 2α .

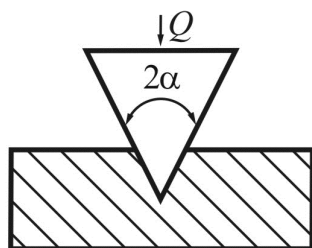


Рис. 4.113

Звичайно у цьому випадку коефіцієнт тертя ковзання збільшується і буде дорівнювати [14]

$$f' = \frac{f}{\sin \alpha}. \quad (4.206)$$

Цю властивість клинової пари широко використовують у техніці для збільшення сили тертя при передачі руху (пасові передачі, гвинтові з'єднання тощо).

В циліндричній кінематичній парі (рис. 4.114) коефіцієнт тертя ковзання визначається за формулою

$$f'' = \frac{f \cdot \alpha}{\sin \alpha}. \quad (4.207)$$

де α – кут загострення жолоба.

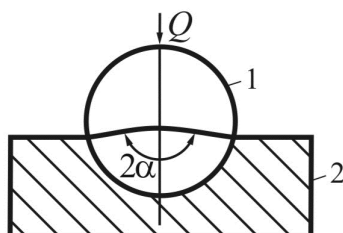


Рис. 4.114

На рис. 4.115, а показана поступальна кінематична пара яка виконана у вигляді похилої площини.

Тут при рівномірному русі повзуна вгору на нього діють три наступні сили: F_p , Q та R .

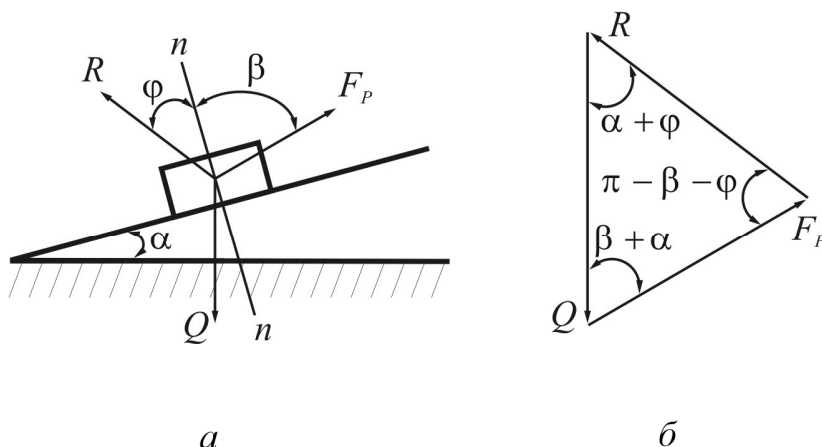


Рис. 4.115

Побудувавши план сил (рис. 4.115, б), згідно з векторним рівнянням

$$\bar{Q} + \bar{F}_p + \bar{R} = 0,$$

отримаємо наступну пропорцію

$$\frac{F_p}{\sin(\alpha + \varphi)} = \frac{Q}{\sin(\pi - \beta - \varphi)} = \frac{R}{\sin(\beta - \alpha)},$$

з якої знаходимо рушійну силу F_p .

Рушійна сила забезпечує рівномірний рух повзуна по похилій площині вгору

$$F_p = Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\beta + \varphi)}. \quad (4.208)$$

Кінематичні пари виконані у формі похилої площини мають самогальмівний ефект.

Для дослідження явища самогальмування під дією сил тертя розглянемо тіло 1 вагою Q , знаходиться на похилій площині 2 (рис. 4.116).

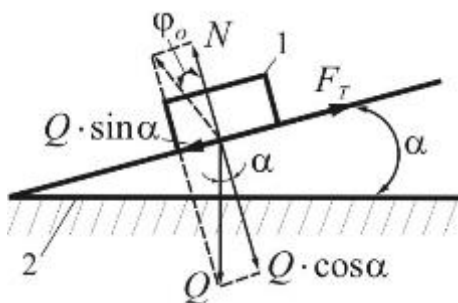


Рис. 4.116

Розкладемо силу Q на дві взаємоперпендикулярні складові: силу нормального тиску $Q \cos \alpha$, яка притискає тіло до площини, і рушійну

$Q \sin \alpha$ яка намагається визвати рух тіла по площині.

Позначимо через N нормальну реакцію площини на тіло, а через F_T – силу тертя.

Для рівноваги тіла на площині необхідно, щоб виконувалися наступні дві умови:

$$F_T = Q \cdot \sin \alpha ,$$

$$N = Q \cos \alpha .$$

З цих рівнянь знаходимо що

$$\frac{F_T}{N} = \operatorname{tg} \alpha ,$$

або

$$\operatorname{tg} \varphi_o = \operatorname{tg} \alpha , \quad (4.209)$$

де φ_o – кут тертя спокою.

Експериментальні дослідження показують, що рівновага тіла на похилій площині можлива тоді коли кут $\alpha \leq \varphi_o$.

Такі площини називаються самогальмівними.

Похилі площини входять до складу гвинтових і черв'ячних кінематичних пар.

21.4. Тертя в обертальній кінематичній парі

Опорні частини обертових валів і осей, в яких виникає тертя, називаються цапфами.

На рис. 4.117 показані цапфи, які виконані у вигляді шийок (A), а також у вигляді шипів (B, C).

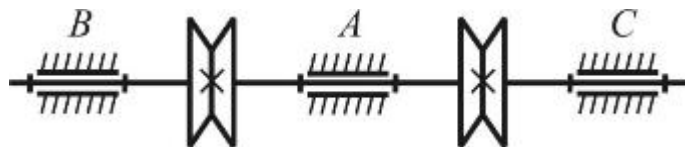


Рис. 4.117

Цапфи в яких опорна реакція збігається з віссю обертання називаються п'ятами.

Опори для шипів і шийок називають підшипниками, а для п'ят – підп'ятниками.

Розглянемо вал, що знаходиться в підшипнику, на який діє вертикальне навантаження Q і рушійний момент M_p (рис. 4.118).

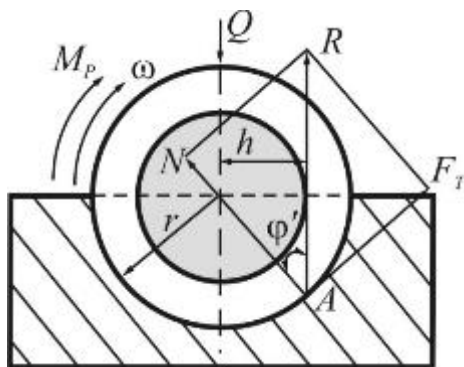


Рис. 4.118

Під дією рушійного моменту вал обертається із кутовою швидкістю ω .

Із боку підшипника на вал в деякій точці A діє нормальна реакція N і сила тертя F_T .

Обертальний момент M_p буде врівноважуватись парою сил Q і R . При цьому реакція R відхилиться від нормалі на кут тертя φ' .

Зведений кут тертя відрізняється від дійсного φ для матеріалу вала і підшипника і залежить від закону розподілу питомого тиску.

На рис. 7.11, *a* показаний закон розподілу питомого тиску для неприпрацьованих (нових) обертальних пар, а на рис. 7.11, *б* для припрацьованих.

Експериментально встановлено, що для неприпрацьованих обертальних пар фіктивний коефіцієнт тертя $f' = 1,57f$, а для припрацьованих – $f' = 1,27f$.

Визначимо момент тертя в обертальній парі:

$$M_T = R \cdot h,$$

Цей момент завжди буде спрямований проти рушійного моменту.

При цьому величина плеча h , як видно з рисунка, дорівнює

$$h = r \cdot \sin \varphi', \quad (4.210)$$

де r – радіус опорної частини вала.

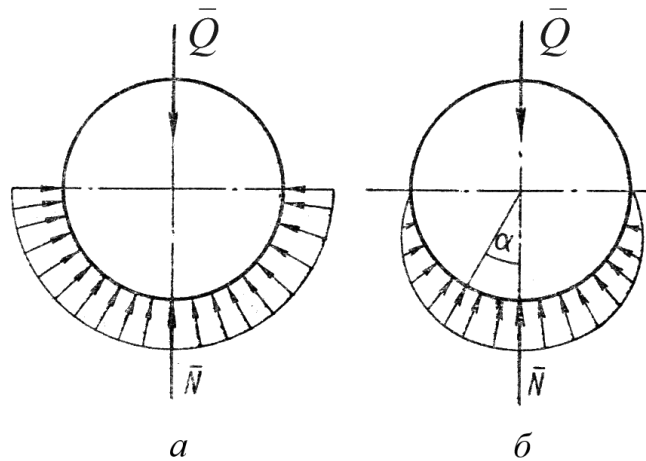


Рис. 7.119

Прийемо, що

$$\sin \varphi' \approx \operatorname{tg} \varphi' = f'.$$

Тоді з попереднього виразу отримаємо

$$h = r \cdot f'.$$

Підставивши отриманий вираз в (7.10) отримаємо формулу для визначення моменту тертя в обертальній парі

$$M_T = R \cdot r \cdot f'. \quad (4.211)$$

Цапфа виготовляється з твердішого матеріалу, ніж підшипник, тому можна вважати, що під час роботи зношується тільки підшипник, а цапфа поступово переміщується в глибину підшипника в напрямку дії сили Q .

Далі розглянемо поняття круга тертя. Для цього проаналізуємо рівняння (7.11).

Отже бачимо, що величина плеча h залежить тільки від радіуса валу r і від зведеного коефіцієнта тертя f' і для даної обертальної пари величина h стала.

Опишемо коло радіусом h (рис. 4.118). Це коло називається *кругом тертя*. Реакція R завжди буде до нього дотичною.

За аналогією коло тертя буде мати усі властивості конуса тертя.

Якщо зовнішнє навантаження буде проходити через коло тертя, то вал обертатиметься сповільнено або перебуватиме в стані спокою, а при дії сили Q поза цим колом вал отримає прискорений рух.

21.5. Тертя ковзання змащених тіл

Тертя ковзання змащених тіл або рідинне тертя має місце, якщо поверхні взаємодіючих ланок повністю розділені шаром мастила. При відносному русі ланок відбувається зсув окремих шарів мастила один відносно одного.

Отже, рідинне тертя зводиться до в'язкого зсуву шарів мастила. Воно визначається гідродинамічними явищами, що відбуваються в рухомому шарі мастила.

Для зручності технічних розрахунків рідинне тертя формально зводять до сухого.

Для цього вводять поняття коефіцієнта рідинного тертя f , який залежить від швидкості v шарів мастила відносно один одного, навантаження P і динамічного коефіцієнта в'язкості η , $H \cdot c / мм$, тобто

$$f = f(v, P, \eta).$$

Ньютоном була запропонована гіпотеза, що при плоскопаралельному русі сила тертя, яка необхідна для переміщення одного шару мастильної рідини паралельно другому, буде прямо пропорційна в'язкості мастила, площі ковзання і градієнту швидкості

$$F_{T.P.} = \mu \cdot S \cdot \frac{dv}{ds}, \quad (4.212)$$

де $F_{T.P.}$ – сила в'язкого зсуву; S – площа поверхні ковзання; μ – коефіцієнт абсолютної в'язкості; $\frac{dv}{ds}$ – градієнт швидкості (зміна швидкості за висотою мастильного шару).

Зв'язок між коефіцієнтом абсолютної в'язкості і відносної в'язкості E має наступний вигляд

$$\mu = 9,81 \cdot 10^{-6} \cdot \gamma \left(0,737E - \frac{0,635}{E} \right), \quad (4.213)$$

де γ – питома вага рідини, $н/м^3$.

Проф. М.П. Петров розробив гідродинамічну теорію тертя у підшипниках і сформулював основні вимоги, необхідні для існування рідинного тертя.

1. Мастильна рідина повинна утримуватись у певному клиновому зазорі між поверхнями ковзання (рис. 4.120).

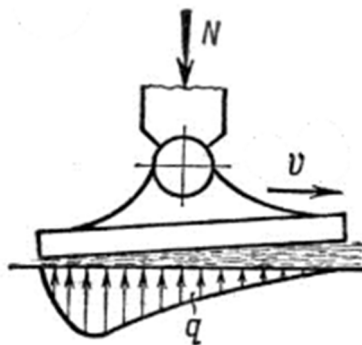


Рис. 4.120

2. При відносному ковзанні змащених поверхонь у шарі мастила повинен виникати і підтримуватись внутрішній тиск, зрівноважуючий зовнішнє навантаження, яке притискає поверхні ковзання одна до другої.
3. Мазильна рідина повинна повністю відокремлювати ковзні поверхні.
4. Шар мазильної рідини повинен змащувати поверхні тертя таким чином, щоб молекулярне зчеплення між частинами мастила і матеріалу було більшим ніж молекулярне зчеплення між частинами мазильної рідини.
5. Існує певна (критична) швидкість відносного ковзання тертьових поверхонь. Ця швидкість залежить від в'язкості мастила і величини зовнішнього навантаження. Критична швидкість приводить до того, що цапфа може відірватись від підшипника і "сплисти".

Більш детально розрахунок кінематичних пар при рідинному терті розглядається у спеціальних курсах.

21.6. Тертя кочення

Тертя кочення виникає у вищих кінематичних парах, наприклад, при відносному русі профілів зубчастих коліс, при русі кульок чи роликів по доріжках підшипників кочення та роликів по кулачках тощо.

Взагалі тертям кочення називають опір, який виникає при перекочуванні одного тіла по поверхні іншого.

Цей опір виникає головним чином від того, що тіла не є абсолютно твердими і завжди присутня деяка деформація в місцях їх стикання.

Досвід показує, що опір перекочуванню тіл залежить від пружних властивостей тіл, які стикаються, їх кривизни та сили притискання.

Фізичні явища, які викликають тертя кочення, вивчені недостатньо.

В технічних розрахунках використовують переважно дані, які одержані експериментально і проводились над різними конкретними об'єктами: котками, колесами, роликами та шариками в підшипниках тощо.

На подолання опору при перекочуванні тіл витрачається певна робота, яка йде переважно на деформацію стичних поверхонь.

Наприклад, якщо на коток, який лежить на горизонтальній площині (рис. 4.121, *a*), діє тільки сила \bar{N} то деформація котка і опорної поверхні будуть симетричні відносно лінії дії сили \bar{N} .

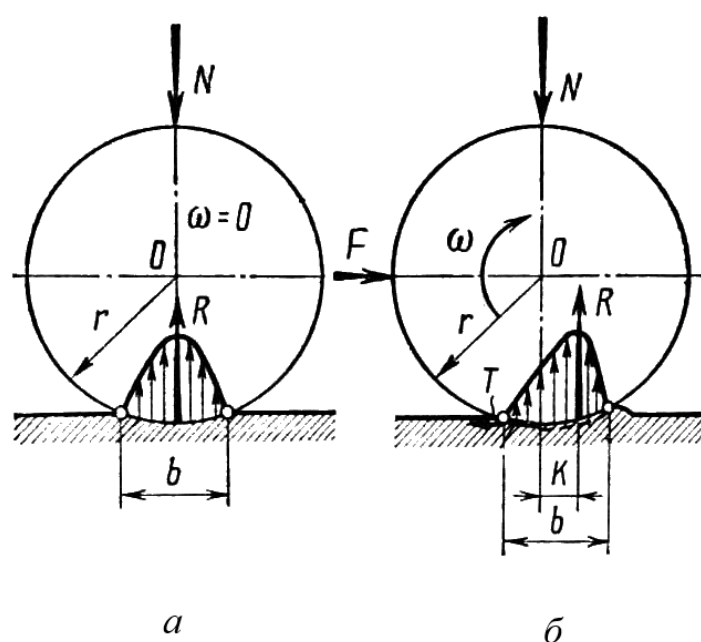


Рис. 4.121

В результаті деформації вони дотикаються не однією точкою (лінією), а по певній поверхні. Відповідно реакція з боку опорної поверхні розподіляється по всій площині контакту.

Згідно з положенням теорії пружності, напруження в зоні контакту розподіляться за еліптичним законом.

При цьому крива напружень симетрична, а значить, напрямком рівнодіючої \bar{R} цих напружень збігається з напрямком сили \bar{N} .

За модулем ці сили однакові і спрямовані в протилежні сторони:

$$\bar{R} = -\bar{N}.$$

Якщо на коток діє деяка горизонтальна сила \bar{F} (рис. 4.121, *б*), то деформація котка і опорної поверхні, буде вже несиметричною відносно

лінії дії сили \bar{N} . Відповідно, розподіл напружень відносно лінії дії сили \bar{N} також буде несиметричним з максимумом, який зміститься у бік руху котка.

Отже, рівнодіюча напружень \bar{R} буде зміщена в бік руху на деяку величину k (рис. 7.121, б).

Величину k називають *плечем сили тертя кочення* чи *коефіцієнтом тертя кочення*. Вона має розмірність довжини, мм.

Досліди показують, що при чистому коченні циліндричного тіла момент опору кочення (або момент тертя кочення) буде дорівнювати

$$M_{Т.К.} = k \cdot N, \quad (4.214)$$

де роль коефіцієнта пропорційності відіграє коефіцієнт тертя кочення, або плече тертя кочення k .

Треба відмітити, якщо коефіцієнт тертя кочення k вимірюється в одиницях довжини, то коефіцієнт тертя ковзання є безрозмірною величиною. При цьому коефіцієнт тертя кочення k визначає максимальне значення зміщення нормальної реакції \bar{R} відносно лінії дії сили \bar{N} .

Моментом тертя кочення, відповідно є момент пари сил \bar{R} , \bar{N} , що виникає під час кочення або при намаганні котити коток по поверхні іншого тіла. Модуль цієї пари сил залежить від активних сил і може приймати значення в межах від нуля до певної максимальної величини:

$$0 < M_{Т.К.} \leq M_{Тmax}.$$

В свою чергу коефіцієнт тертя кочення залежить від пружних властивостей матеріалів тіл тертя, стану їх поверхні та радіусів кривизни.

На практиці, як правило, користуються значеннями, які знайдені експериментально.

Наприклад, для сталевого колеса та рейки приймають $k = 0,05$ мм, для загартованих сталених шариків і роликів – 0,01 мм, чавуну по чавуну – 0,05 мм, дерева по сталі – 0,3–0,4 мм, дерева по дереву – 0,5–0,8 мм.

Визначимо рушійну силу \bar{F} , яку треба прикласти до котка, щоб він рівномірно перекочувався по площині при деякому моменті опору M .

Із рівняння рівноваги моментів сил, що діють на коток відносно точки контакту, маємо

$$F \cdot r = k \cdot N,$$

звідки рушійна сила буде

$$F = \frac{k}{r} \cdot N, \quad (4.215)$$

де r – радіус котка.

Треба відмітити, що втрати енергії при терті кочення, як правило, значно менші, ніж при терті ковзання. Тому при розв'язанні виробничих задач в механізмах і машинах намагаються по можливості замінити тертя ковзання тертям кочення. Для цього широко використовуються колеса, підшипники кочення, шарики або роликові напрямні тощо.

Наприклад, для переміщення важких тіл (обладнання великогабаритних вантажів, редукторів тощо) на невеликій відстані використовують котки у вигляді циліндричних стержнів чи труб.

Визначимо величину силу \bar{F} , яку необхідно прикласти до платформи з вантажем для її рівномірного руху по горизонтальній поверхні на котках (рис. 4.122).

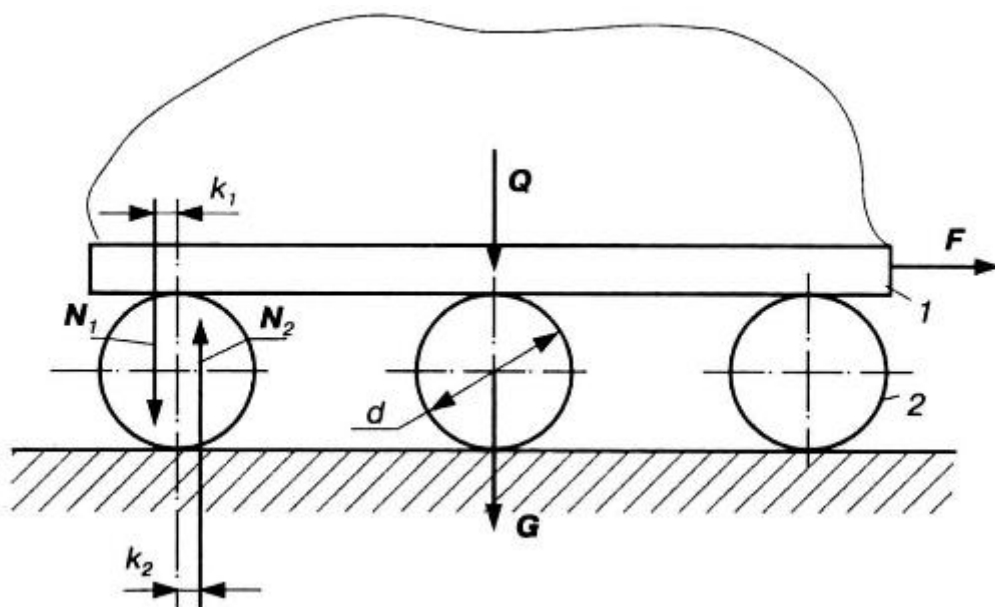


Рис. 4.122

При переміщенні платформи на котках, момент сил тертя звичайно визначається за формулою моменту опору при коченні.

Але в даному випадку момент тертя кочення має дві складові: перша складова моменту виникає у нижніх точках дотику котків при коченні котка по нерухомій опорній поверхні, а друга складова моменту виникає у верхніх точках дотику котків з платформою при коченні платформи на котках:

$$M_{Т.К.} = k_1 \cdot N_1 \cdot n + k_2 \cdot N_2 \cdot n, \quad (4.216)$$

де $N_1 = \frac{Q}{n}$, $N_2 = \frac{Q}{n} + G$ – зусилля нормального тиску відповідно у верхній і нижній точках дотику котків з опорною поверхнею; G – величина сили

тяжіння котка; n – кількість котків; k_1, k_2 – відповідно коефіцієнти опору кочення у верхніх та нижніх точках дотику котків.

Величина необхідної рушійної сили \bar{F} може бути знайдена з рівняння моментів відносно полюса миттєвого обертання, тобто точки нижнього контакту котка з опорною поверхнею:

$$F \cdot d = Qk_1 + (Q + nG)k_2,$$

звідки

$$F = Q \frac{k_1}{d} + (Q + nG) \frac{k_2}{d}, \quad (4.217)$$

Якщо вагою котків знехтувати то значення рушійної сили можна знайти як

$$F = f^* Q, \quad (4.218)$$

де $f^* = \frac{k_1 + k_2}{d}$ – зведений коефіцієнт тертя при переміщеннях на котках.

Наприклад, при однаковому матеріалі платформи та опорної поверхні будемо мати:

$$f^* = \frac{k}{r},$$

де $k = k_1 = k_2$.

Із формули (4.217) видно, що збільшуючи радіус котків, можна зменшити силу опору переміщення на котках.

Треба відмітити, що при заданих величинах k_1 і k_2 зв'язок між f^* та r носить гіперболічний характер.

В іншому випадку при переміщенні по горизонтальній опорній поверхні колісної пари платформи (рис. 4.123) виникає одночасно момент тертя кочення і момент тертя ковзання.

Момент сил опору кочення в кінематичних парах, де відбувається дотик опорної поверхні з колесами, визначається за формулою як для випадку чистого кочення:

$$M_{Т.К.} = k \cdot Q, \quad (4.219)$$

де k – коефіцієнт опору коченню коліс по опорній поверхні; Q – величина сили тяжіння платформи.

Момент опору тертя ковзання в буксових вузлах (підшипниках ковзання) колісної пари, через які навантаження передається від платформи до коліс, можна визначити за наступною формулою

$$M_T = n \left(\frac{Q}{n} + G \right) f^* \frac{d}{2} = (Q + nG) f^* r, \quad (4.220)$$

де G – сила тяжіння колеса; n – кількість коліс; d – діаметр цапфи колеса; f^* – коефіцієнт тертя ковзання у буксовому вузлі (підшипнику ковзання).

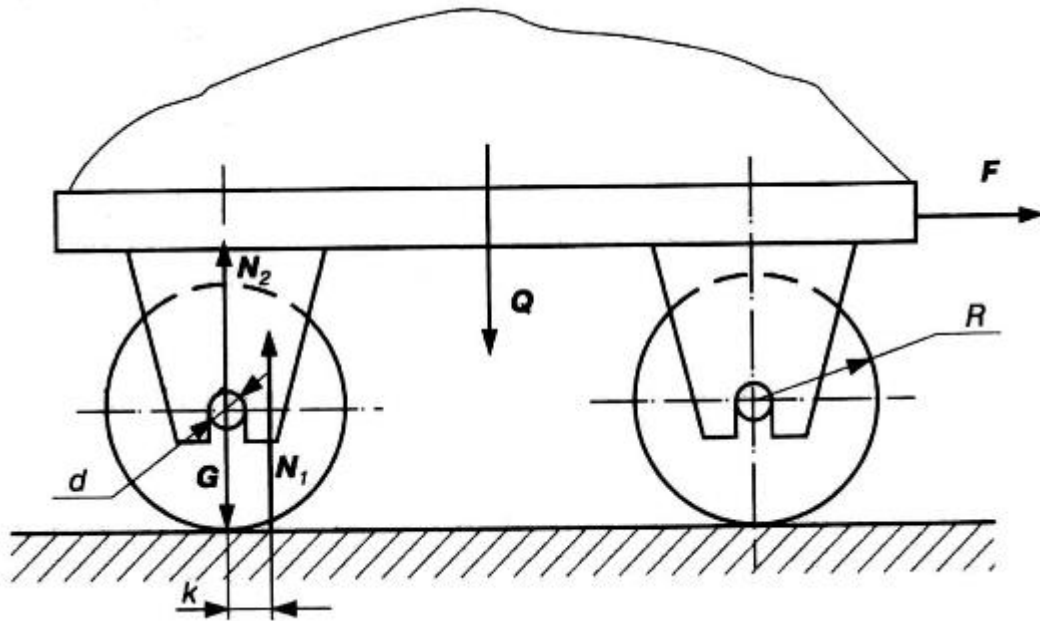


Рис. 4.123

Таким чином, загальний момент опору переміщення платформи на колесах по горизонтальній опорі буде дорівнювати

$$M = Qk + (Q + nG) f^* r, \quad (4.221)$$

Якщо при цьому знехтувати вагою роликів ($G = 0$), то отримаємо наступну формулу:

$$M = Q(k + f^* r), \quad (4.222)$$

Отже рушійна сила, що забезпечить рівномірний рух платформи визначається із умови рівності моменту рушійних сил сумі моментів сил опору ковзанню та коченню

$$F = \frac{k + f^* r}{R} Q = f' \cdot Q, \quad (4.223)$$

де $f' = \frac{k + f^* r}{R}$ – зведений коефіцієнт тертя при переміщеннях плити на

напрямних роликах; R – радіус колеса.

Слід відмітити, що задача переміщення верхньої плити на напрямних роликах (рис. 4.124) розв’язується аналогічно розглянутій.

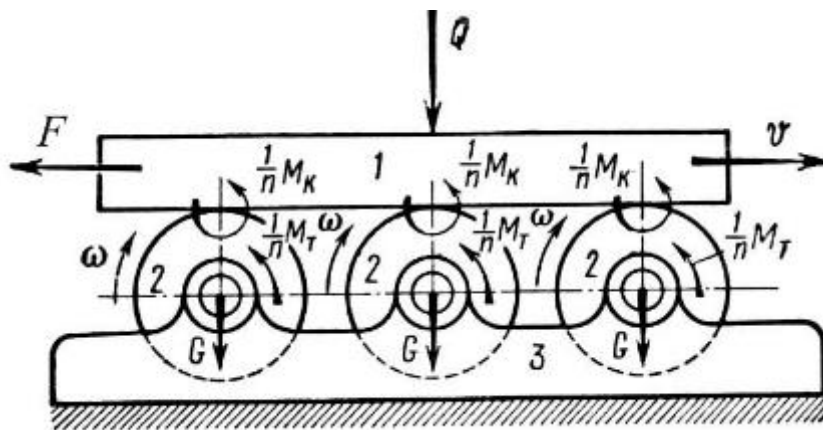


Рис. 4.124

У цьому випадку для переміщення верхньої плити також необхідно подолати не лише сили тертя кочення між роликками і плитою, але й сили тертя в цапфі ролика у підшипнику ковзання станини.

Тертя спостерігається також в зубчастих і кулачкових механізмах.

Так при роботі зубчастих механізмів зуб одного колеса ковзає і одночасно котиться по поверхні зуба другого колеса. Точно таке ж явище ковзання і кочення спостерігається і під час взаємодії кулачка з плоским штовхачем.

Сила, з якою зубці коліс або штовхачі з кулачком притискаються один до одного, викликає появу тертя ковзання, внаслідок чого реакція відхиляється від загальної нормалі на кут тертя φ , як це спостерігається в поступальних і обертальних кінематичних парах.

Наявність кочення одного профілю по другому профілю приводить до появи тертя кочення.

Опір, який виникає внаслідок перекошування елементів пар з кутовою швидкістю ω_{12} , можна врахувати шляхом введення моменту тертя кочення $M_{Т.К.}$, який завжди спрямований протилежно кутовій швидкості ω_{12} (рис. 4.125).

Визначити такий момент тертя кочення $M_{Т.К.}$ можна як

$$M_{Т.К.} = N_{12} \cdot k = \frac{R_{12}}{\sqrt{1 + f^2}} k, \quad (4.224)$$

де k – коефіцієнт тертя кочення; f – коефіцієнт тертя ковзання.

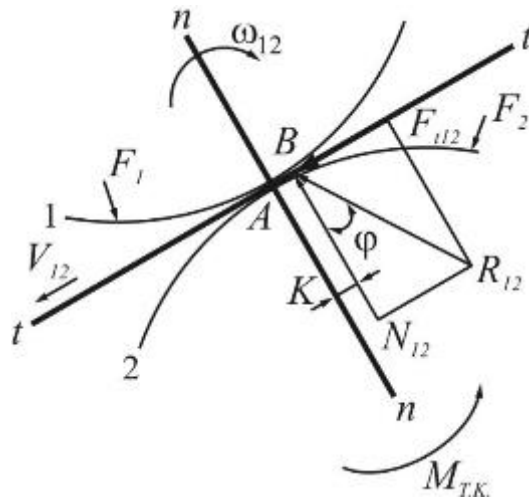


Рис. 4.125

Треба зазначити, що при силовому розрахунку механізмів з урахування сил тертя в кінематичних парах застосовують наступні два методи.

Перший є наближеним методом і називається методом зведення сил тертя. Цей метод передбачає спочатку визначення реакцій в кінематичних парах без урахування сил тертя, потім визначення сил тертя по закону Кулона і втрат потужності на подолання цих сил тертя.

Другий метод є точним методом і називається методом кутів тертя. Він базується на тому положенні, що реакції в кінематичних парах відхиляються від дійсних напрямків на кут тертя. Враховуючи цей факт, виконується силовий розрахунок механізмів.

І перший і другий методи цілком підходять для практичних розрахунків. Але перший метод не можна використовувати при силовому розрахунку самогальмівних механізмів.

Більш детально питання силового розрахунку механізмів з урахуванням сил тертя в кінематичних парах розглянуто у [1, 20].

21.7. Знос елементів кінематичних пар

В процесі експлуатації механізмів машин неминуче відбувається зношування їх елементів кінематичних пар [40].

Зношення або спрацювання зменшує міцність деталей і точність механізмів, підвищує навантаження на підшипники, збільшує вібрацію і шум. Значне спрацювання часто буває причиною порушення працездатності механізмів і може призвести навіть до поломки деталей і

виходу машин з ладу.

Тому при проектуванні механізмів для того щоб правильно вибрати конструктивні та мастильні матеріали важливо знати форму та величину поверхні тертя, розрахувати епюру зносу. Важливо також виявити деталі і вузли, які потрібно міняти або ремонтувати раніше від інших.

Отже, розрахунок очікуваного зносу має забезпечити необхідний ресурс і надійність роботи механізмів та машин.

Розглянемо види зношування в кінематичних парах, які спостерігаються при роботі механізмів і машин.

У цілому зношування – це процес руйнування та відокремлення матеріалу від поверхні твердого тіла, який проявляється в поступовій зміні розмірів і форми тіла, при цьому можуть змінюватися і властивості поверхневих шарів матеріалу.

Розрізняють наступні основні види зношування:

- механічне як результат механічної взаємодії тіл;
- корозійно-механічне як механічна взаємодія тіл, що супроводжується хімічною або електричною взаємодіями;
- абразивне як результат різання або дряпання твердих частинок, що знаходяться в зоні тертя у вільному або закріпленому стані;
- ерозійне як результат дії потоку рідини або газу;
- зношування від втомленості як викришування частин матеріалу поверхневого шару при періодично змінних навантаженнях (цей вид зношування характерний для вищих кінематичних пар);
- зношування при заїданні як результат схоплення, глибинного виривання матеріалу, переносу його з однієї поверхні тертя на іншу.

Треба відмітити, що заїдання або схоплення характеризується сильним місцевим нагрівом через високі швидкості ковзання і великі питомі тиски. Такому виду зношування частіше за все піддаються незагартовані тертьові поверхні кінематичної пари з однорідних матеріалів.

Зношування відрізняють і за характером деформації поверхневого шару:

- зношування при пружному контакті;
- зношування при пластичному контакті;
- зношування при мікрорізанні.

Фізична модель зношування приймається наступною: при ковзанні мікровиступу перед ним виникає лобовий валик матеріалу, що деформується і знаходиться під дією напружень стиску. За мікровиступом внаслідок сил тертя матеріал розтягується. Отже, матеріал тертьових тіл зазнає знакозмінних деформацій, багаторазове повторення яких

призводить до нагромадження в них пошкоджень мікроструктури і відокремлення частинок матеріалу. Експериментальні дослідження показують, що матеріал руйнується не відразу, а лише після кількох циклів роботи.

При цьому існують дві стадії зношування. Перша стадія зношування відбувається в процесі припрацювання поверхні тертя. Друга стадія відбувається в процесі нормального експлуатаційного зносу, коли після припрацювання замість вихідної шорсткості поверхні, яку мали після виготовлення, утворюється деяка нова рівноважна шорсткість, яка надалі суттєво не змінюється [43].

Іншими словами, в процесі зношування вихідний (технологічний) мікрорельєф перетворюється в експлуатаційний із зміненими параметрами шорсткості, наприклад середнього арифметичного відхилення профілю.

Для зменшення часу припрацювання за дослідними даними потрібно визначити параметри рівноважної шорсткості і вибрати відповідний вид технологічної обробки поверхні тертя, який буде найближчим до такої шорсткості. Використання більш гладкої вихідної поверхні, ніж експлуатаційна з меншим значенням шорсткості на стадії припрацювання, як з'ясувалось, не вигідне, оскільки підвищується вартість виготовлення і при цьому також може збільшитись час припрацювання.

З точки зору кількісної оцінки зношування може визначатись в одиницях довжини, об'єму або маси. Існують також граничний і допустимий зноси.

Граничний знос – це знос, який відповідає граничному стану виробу або його частині, що зношується.

Допустимий знос – це знос, при якому виріб зберігає працездатність.

Граничний знос елементів пар визначається рядом критеріїв, з яких основними є наступні:

- порушення внаслідок зносу працездатності механізму – поломка деталей, тобто втрата міцності, заклинювання, втрата необхідної точності;
- недопустиме погіршення експлуатаційних характеристик машини (зниження якості виробів, збільшення вібрації та шуму через зазори, що з'явилися у кінематичних парах тощо).

Під час рідинного тертя, коли товщина шару мастильного матеріалу, що розділяє тертьові поверхні, більша від суми їх найбільших нерівностей, знос буде незначним.

Графічне зображення розподілення зносу по поверхні тертя або по певному її розрізу називається епюрою зносу.

Знос оцінюється товщиною шару зруйнованого матеріалу δ (лінійний знос) або його масою.

Швидкість зношування визначається величиною зносу за одиницю часу:

$$\gamma = \frac{d\delta}{dt} = kp^m v_k^n, \quad (4.225)$$

де k – коефіцієнт зносу, який чисельно дорівнює γ при $p = v_k = 1$; p – питомий тиск у відповідній точці поверхні тертя; v_k – відносна швидкість ковзання у цій же точці; m – показник ступеню, що залежить від виду взаємодії поверхонь контакту (пружний чи пластичний контакт або мікрорізання), який коливається в границях 1–3; n – показник ступеню, що залежить від виду зношування.

Так, для припрацьованих елементів кінематичних пар вважають $m = 1$, $n = 1$.

В результаті можна отримати

$$\gamma = \frac{d\delta}{dt} = kp v_k. \quad (4.226)$$

Інтенсивність зношування – це зношування, яке припадає на одиницю шляху тертя:

$$\gamma_s = \frac{d\delta}{ds},$$

де s – відносне переміщення або шлях тертя.

Отже

$$\gamma_s = \frac{d\delta}{ds} \frac{ds}{dt} = \gamma_s v_k. \quad (4.227)$$

Величини γ і γ_s , визначаються експериментально за середніми значеннями p і v_k , а потім за формулою (4.222), підраховується коефіцієнт зносу k .

Згідно з [50] інтенсивність зношування γ_s може змінюватися в досить широких межах, приблизно від $\gamma_s = 10^{-22}$ (знос 0,001 мкм на 1 км шляху тертя, тобто незначна величина) до $\gamma_s = 10^{-12}$ (знос 1 мм на 1 м шляху тертя, тобто значна величина).

Властивість матеріалу чинити опір зношуванню за певних умов тертя, що оцінюється величиною, яка обернена швидкості або інтенсивності зношування, називається зносостійкістю.

На зносостійкість впливають твердість матеріалів, їх пружні властивості, режим роботи (навантаження, швидкість, температура), зовнішні умови (змащування, навколишнє середовище), конструктивні

особливості вузла тертя.

Треба зазначити, що в останній час великої уваги приділяють матеріалам деталей машин, що призначені для роботи у вузлах тертя без спеціального мастильного середовища: матеріалам на основі полімерів (в підшипниках, зубчастих колесах, кулачків і т.ін.), вуглеграфітні матеріали (ущільнювальні елементи, вкладиші), металокерамічні матеріали (деталі вузлів тертя, що працюють при високих температурах) та інші.

Для підвищення зносостійкості тертьових поверхонь нових деталей широко застосовуються різні хіміко-термічні покриття і обробка деталей машин. З цією ж метою використовується пластична деформація поверхневих шарів, при якій підвищується твердість і клас шорсткості поверхні (обкатка та розкатка циліндричних і плоских поверхонь, прошивання, калібровка тощо).

Приймається до уваги і можливість заміни деталей при ремонті машини, коли ремонт спрощується і дешевшає, якщо зношена деталь проста і легко може бути замінена (наприклад втулка або вкладиш).

Іноколи виявляється вигіднішим не заміна, а відновлення і збільшення терміну служби деталей шляхом нарощення зношених поверхонь тертя газовим або електродуговим наплавленням, газовою або електричною металізацією, плазмовим напиленням та іншими способами.

Знос у загальному випадку при змінних p і v_k можна визначити за формулою

$$\delta = k \int_0^{t_p} p v_k dt, \quad (4.228)$$

де t_p – час роботи.

Для зручності розрахунків в механізмах з одним ступенем вільності формулу (4.224) доцільно перетворити, ввівши узагальнену координату φ і узагальнену кутову швидкість $\omega = \dot{\varphi}$.

Тоді знос за один цикл роботи, для якого $\varphi = \varphi_u$, можна визначити за формулою

$$\delta_u = k \int_0^{\varphi_u} p \frac{v_k}{\omega} d\varphi, \quad (4.229)$$

де $\frac{v_k}{\omega} = \frac{v_k(\varphi)}{\omega}$ – аналог швидкості ковзання (або передаточна функція $\frac{ds}{d\varphi}$)

у розглядуваній точці елемента кінематичної пари.

Якщо взяти число за циклів роботи n_u , то знос можна виразити як

$$\delta = \delta_u \cdot n_u. \quad (4.230)$$

За останньою формулою за заданими значеннями граничного зносу можна знайти число циклів роботи, яке необхідне для визначення ресурсу роботи механізму або машини.

Детальніше питання тертя і зношування деталей машин розглядається в роботах [10, 30, 41, 43, 50].

Запитання для самоконтролю

1. Що представляє собою сила тертя?
2. Які види тертя Ви знаєте? Наведіть їх класифікацію.
3. Поясніть природу тертя ковзання.
4. В яких одиницях вимірюють коефіцієнт тертя ковзання?
5. В чому різниця сухого тертя від рідинного?
6. Наведіть умову рівноваги тіла при терті спокою.
7. Що являє собою динамічна сила тертя? Як його визначити?
8. Як визначити силу тертя в поступальній кінематичній парі?
9. Чому дорівнює коефіцієнт тертя клинової кінематичної пари?
10. Чому дорівнює коефіцієнт тертя в циліндричній кінематичній парі?
11. Як визначити момент тертя в обертальній кінематичній парі?
12. Наведіть основні вимоги, що необхідні для існування рідинного тертя.
13. Поясніть природу виникнення тертя кочення.
14. В яких одиницях вимірюють коефіцієнт тертя кочення?
15. Як зменшити рушійну силу при рівномірному переміщенні вантажу на котках по горизонтальній площині?
16. Якими методами можна врахувати сили тертя в кінематичних парах при силових розрахунках механізмів?
17. Які види зношування спостерігаються в елементах кінематичних пар?
18. Поясніть поняття граничного зносу і допустимого зносу.
19. Що таке зносостійкість? Які фактори впливають на зносостійкість?

РОЗДІЛ 22. ЗРІВНОВАЖЕННЯ І ВІБРОЗАХИСТ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

Як вже було з'ясовано раніше, при прискореному русі ланок механізмів силова дія машини на її станину, а потім через неї – на фундамент крім статичних складових містить змінні за величиною та напрямом динамічні складові. При усталеному русі такі динамічні складові змінюються циклічно. Це означає, що машина надає своїй станині періодичні збурення, які викликають її коливання і вібрацію.

Окрім того, динамічні складові навантаження, що виникають під час руху машини, збільшують тертя в опорах валів, підвищують спрацювання підшипників, створюють додаткові напруження в окремих частинах механізму машини, що призводить втомного руйнування металу тощо. Також дані динамічні навантаження збільшують коливання і вібрації ланок механізму у цілому і впливають на точність роботи та зменшують його ресурс.

Через вібрації деталей та надмірний шум ускладнюється діяльність обслуговуючого персоналу, а в окремих випадках для попередження шкідливого впливу вібрацій на організм людини необхідне спеціальне обладнання робочих місць.

Для усунення такого шкідливого впливу динамічних складових навантаження або як мінімум, для їх зменшення необхідно певним шляхом звести до нуля ці складові чи обмежити їхню амплітуду до певного допустимого значення.

Розв'язок цієї задачі відноситься до динамічного проектування механізму машинного агрегату і полягає у його зрівноваженні та віброзахисті.

Отже далі буде розглянуто динамічний вплив обертових ланок (роторів) на механізми машин, їх опори і способи усунення цього впливу для зрівноваження і віброзахисту.

22.1. Задача зрівноваження механізмів

В процесі проектування та виготовлення механізмів машин ставиться завдання про зрівноваження динамічних складових навантаження. При цьому необхідно добитися, щоб на ланки машини, її корпус і фундамент передавались тиски, які будуть по можливості сталими за величиною та напрямом.

Ця задача називається задачею про зрівноваження рухомих мас механізмів або про зрівноваження динамічних сил інерції. Розв'язати її

можна шляхом раціонального підбору та розміщення мас ланок.

У цілому задачу про зрівноваження сил інерції в механізмах машин можна поділити на дві окремі наступні задачі:

- зрівноваження окремих обертових ланок механізму (задача про зрівноваження додаткових динамічних тисків у кінематичних парах механізму).

- зрівноваження механізму у цілому (задача про зрівноваження динамічних навантажень на фундамент машин).

22.2. Зрівноваження обертових мас. Загальні положення

При великих кутових швидкостях обертання ланок виникають сили і моменти сил інерції, які у випадку незрівноваженості викликають додаткові динамічні навантаження.

При цьому розрізняють *статичну* і *динамічну незрівноваженість* тіл обертання. При чому динамічна незрівноваженість може бути *моментною* і *повною*.

Статична незрівноваженість спостерігається, коли центр маси тіла, що обертається, не співпадає з віссю його обертання.

Статична незрівноваженість може бути наслідком неточного виготовлення деталей, їх монтажу, неоднорідності матеріалу деталей, деформації і коробленні їх при термообробці, нерівномірності зносу та похибок при ремонті.

Розглянемо, наприклад, обертову ланку масою m , яка обертається із постійною кутовою швидкістю ω із зміщенням центра мас від осі обертання на величину r_S (рис. 4.126).

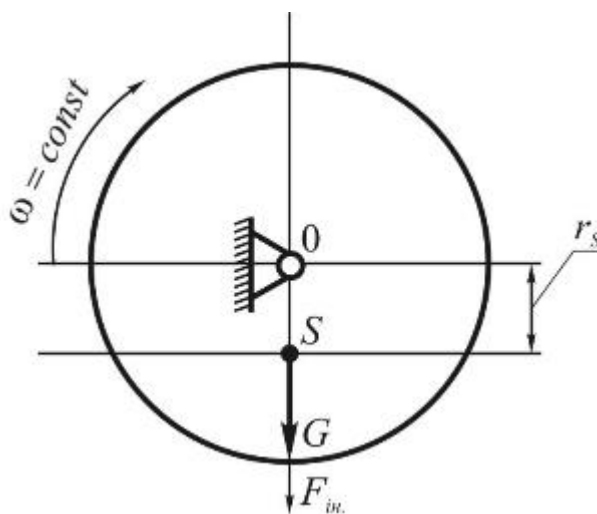


Рис. 4.126

Величину сили інерції, яка виникає внаслідок зміщення центра мас і діє на обертову ланку, можна визначити за відомою з теоретичної механіки формулою

$$F_{in} = m \cdot \omega^2 \cdot r_S. \quad (4.231)$$

Навіть при невеликому зміщенні центра мас сила інерції буде значно перевищувати силу тяжіння. Відповідно будуть збільшуватись і реакції в опорах. Крім цього треба враховувати, що на відміну від статичної дії сили тяжіння сили інерції, а відповідно, і динамічні реакції мають змінні напрямки і можуть викликати небажані коливання.

Характерно, що при умові $F_{in} \geq G$ має місце підкидання вгору обертової ланки при кожному її обертанні, тобто ланка буде “битися”.

Статична незрівноваженість характеризується *статичним дисбалансом*, який є векторною величиною і визначається як

$$\bar{D}_{cm} = m\bar{r}_S. \quad (4.232)$$

Динамічна незрівноваженість виникає, коли, наприклад, довжина вала набагато більша від його діаметра.

Для прикладу розглянемо вал, який має дві однакові маси, що розміщені на однаковій відстані від осі обертання вала OO_1 так, що лінія AB перетинає вісь обертання OO_1 в центрі її довжини (рис. 4.127).

При обертанні такої системи на кожен масу будуть діяти відцентрові сили інерції $\bar{F}_{in} = m\omega^2\bar{r}_S$, які створюватимуть момент пари сил інерції наступної величини

$$M_{in} = m\omega^2 r_S \cdot l, \quad (4.233)$$

де l – довжина вала по його осі між закріпленими масами.

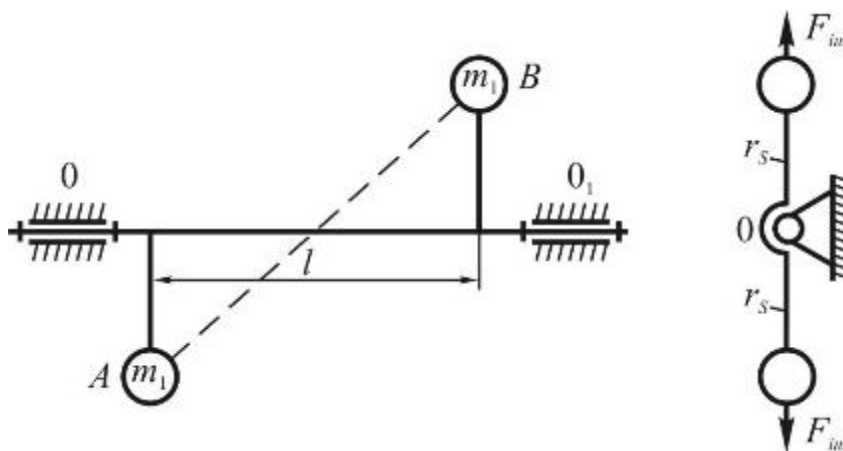


Рис. 4.127

Цей момент намагається повернути систему так, щоб лінія AB , яка проходить через центри мас, стала перпендикулярно до осі обертання.

Така динамічна незрівноваженість від моменту пари сил носить назву *моментної незрівноваженості* і характеризується *динамічним дисбалансом*, який є векторною величиною і визначається як

$$\bar{M}_D = m_1 \cdot \bar{r}_S l. \quad (4.234)$$

Момент сил інерції значно підсилює шкідливе навантаження на опори, викликаючи при цьому вібрацію, коливання та їх розхитування.

Треба відмітити, що у випадку, коли лінія AB не перетинає вісь обертання OO_1 в центрі її довжини, буде спостерігатись *повна динамічна незрівноваженість* розглянутої механічної системи.

Таким чином, ланку механізму будемо вважати *статично зрівноваженою*, якщо головний вектор сил інерції буде дорівнювати нулю

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_{in_i} = 0. \quad (4.235)$$

При цьому ланку механізму будемо вважати *повністю зрівноваженою* якщо головний вектор сил інерції і головний вектор моментів від сил інерції будуть дорівнювати нулю:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \bar{F}_{in_i} &= 0; \\ \sum_{i=1}^n \bar{M}_{in_i} &= 0. \end{aligned} \quad (4.236)$$

Зрозуміло, що зрівноважування ланок механізму можна виконати шляхом раціонального підбору та розміщення їх мас. Розглянемо це нижче на деяких прикладах.

22.2.1. Статичне зрівноваження однієї обертової маси

Розглянемо масу m_1 , що обертається із кутовою швидкістю ω навколо нерухомої осі обертання O (рис. 4.128).

Якщо центр маси m_1 знаходиться від осі обертання на відстані r_S , то виникає сила інерції, яка за величиною буде

$$F_{in} = m_1 r_S \cdot \omega^2.$$

Таку незрівноваженість можна усунути шляхом встановлення противаги – додаткової маси, яку розміщують на продовженні ланки.

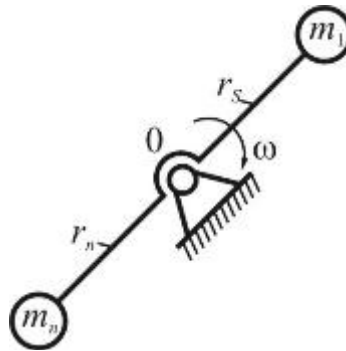


Рис. 4.128

Сила інерції противаги за величиною буде дорівнювати

$$F_{in_n} = m_n \cdot r_n \cdot \omega.$$

Отже для усунення статичної незрівноваженості треба так підібрати обертові маси, щоб виконувалась наступна умова:

$$F_{in} = F_{in_n}.$$

Тоді, прирівнюючи значення сил інерції маси і противаги із попередніх формул, запишемо

$$m_1 r_S \cdot \omega^2 = m_n r_n \omega^2.$$

Звідки, задавшись певною величиною r_n , можна знайти масу противаги:

$$m_n = m_1 \frac{r_S}{r_n}.$$

22.2.2. Статичне зрівноваження декількох обертових мас

Розглянемо тепер три маси) m_1, m_2, m_3 , які обертаються на одному валу із кутовою швидкістю ω (рис. 4.129).

За виразом (4.232) визначимо величини статичних дисбалансів цих мас:

$$D_1 = m_1 r_1;$$

$$D_2 = m_2 r_2;$$

$$D_3 = m_3 r_3.$$

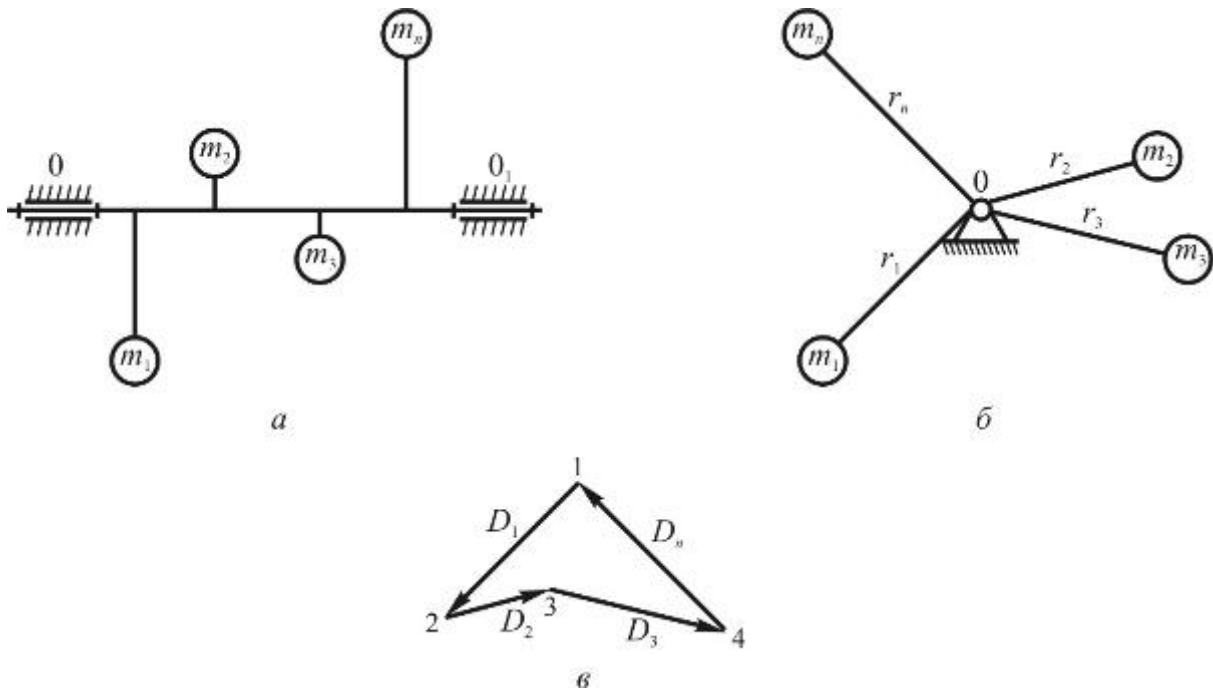


Рис. 4.129

Відповідно величина статичного дисбалансу протизваги визначиться аналогічно:

$$D_n = m_n r_n.$$

Дана механічна система буде статичною зрівноваженою, коли сума усіх її векторів дисбалансів дорівнюватиме нулю:

$$\sum_{i=1}^n \bar{D}_i = \bar{D}_1 + \bar{D}_2 + \bar{D}_3 + \bar{D}_n = 0. \quad (4.237)$$

Знайдемо вектор дисбалансу \bar{D}_n зрівноважуючої маси m_n геометричним способом.

Для цього побудуємо векторну суму дисбалансів на площині у вибраному масштабі μ_D . Отже із довільної точки 1 (рис. 4.129, в) у масштабі μ_D відкладаємо вектор дисбалансу \bar{D}_1 першої маси, який паралельний r_1 , з кінця цього вектора (точки 2) відкладаємо вектор дисбалансу \bar{D}_2 паралельно r_2 , а далі так само – вектор \bar{D}_3 .

Замикаючий вектор \bar{D}_n побудованого силового багатокутника на плані сил і буде дисбалансом протизваги, який зрівноважить цю механічну систему статично.

Величину знайденого дисбалансу можна знайти як

$$D_n = l_{4-1} \cdot \mu_D = m_n \cdot r_n, \quad (4.238)$$

де l_{4-1} – відрізок на плані векторів дисбалансів, мм; $\mu_D = \frac{D_1}{l_{1-2}}$ – масштаб плану векторів дисбалансів.

Задавшись довжиною r_n , можна визначити масу m_n противаги

$$m_n = \frac{l_{4-1} \cdot \mu_D}{r_n} = \frac{D_n}{r_n}, \quad (4.239)$$

Нанесемо отриману противагу m_n на обох проекціях: рис. 4.129, *б* – паралельно D_n , а на рис. 4.129, *а* – уздовж осі вала в довільному місці.

22.2.3. Динамічне зрівноваження декількох обертових мас

Треба відмітити, що статичного зрівноважування буде достатньо лише для тих ланок механізму, у яких діаметр набагато більший за їх довжину. Такими ланками є шків, маховики, зубчасті колеса тощо.

Інші обертові ланки, у яких довжина дорівнює діаметру або більша за нього, необхідно зрівноважувати повністю.

Існує три способи динамічного зрівноваження обертових мас:

- 1) спочатку виконується динамічне, а потім статичне зрівноваження;
- 2) спочатку виконується статичне, а потім динамічне зрівноваження;
- 3) проводять заміну повного зрівноваження статичним у двох площинах [35].

Розглянемо перший спосіб більш детально. Для цього дослідимо дві маси m_1 і m_2 , які обертаються у різних площинах (рис. 4.130).

Для того щоб виконати повне зрівноваження даної механічної системи, спочатку підрахуємо величини статичних дисбалансів D_1 , D_2 заданих мас за формулою (4.232).

Далі поряд із опорою A проведемо площину $I-I$ і визначимо відстань від цієї площини до кожної маси, що обертається.

За формулою (4.234) також підрахуємо величини динамічних дисбалансів M_1 і M_2 .

Запишемо векторне рівняння рівноваги динамічних дисбалансів

$$\sum_{i=1}^n \bar{M}_i = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_g = 0. \quad (4.240)$$

Знайдемо вектор зрівноважувального дисбалансу \bar{M}_g геометрично.

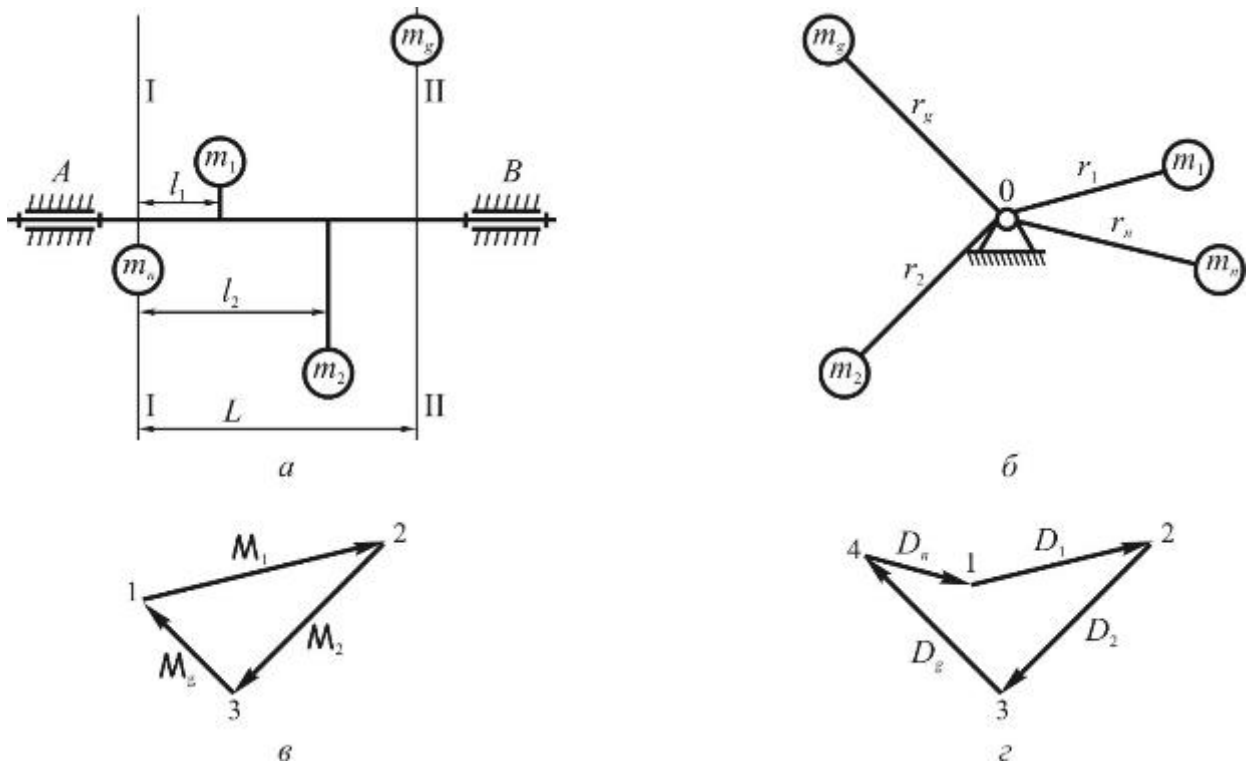


Рис. 4.130

Для цього на площині побудуємо векторну суму динамічних дисбалансів у вибраному масштабі μ_M (рис. 4.130, в).

Замикаючий вектор \overline{M}_g побудованого силового багатокутника на плані сил і буде динамічним зрівноважувальним дисбалансом даної системи.

При цьому довжина відрізка l_{3-1} у масштабі μ_M буде визначати величину вектора \overline{M}_g :

$$M_g = l_{3-1} \cdot \mu_M, \quad (4.241)$$

Тепер проведемо площину $II - II$ поряд з опорою B . Відстань між площинами $I - I$ і $II - II$ позначимо як L .

Визначимо величину дисбалансу противаги:

$$D_g = \frac{M_g}{L} = \frac{l_{3-1} \cdot \mu_M}{L} = m_g \cdot r_g. \quad (4.242)$$

Задавшись довжиною r_g , знаходимо масу противаги, яка має бути встановлена в площині $II-II$:

$$m_g = \frac{D_g}{r_g}. \quad (4.243)$$

Для того, щоб тепер зрівноважити систему статично, побудуємо план сил дисбалансів, використавши наступне векторне рівняння рівноваги:

$$\sum_{i=1}^n \bar{D}_i = \bar{D}_1 + \bar{D}_2 + \bar{D}_g + \bar{D}_n = 0. \quad (4.244)$$

Для знаходження вектору зрівноважувального дисбалансу \bar{D}_n геометрично на площині побудуємо векторну суму статичних дисбалансів у вибраному масштабі μ_D (рис. 4.130, з). Замикаючий вектор \bar{D}_n побудованого силового багатокутника на плані сил і буде статичним зрівноважувальним дисбалансом даної системи, а довжина відрізка l_{4-1} у масштабі μ_M буде визначати його величину:

$$D_n = l_{4-1} \cdot \mu_D = m_n \cdot r_n.$$

З останньої формули тепер можна визначити масу m_n статичної противаги, яка для того щоб не порушити динамічну рівновагу, має розміщуватись в площині $I-I$:

$$m_n = \frac{D_n}{r_n} = \frac{l_{4-1} \cdot \mu_D}{r_n}. \quad (4.245)$$

Таким чином, для повного зрівноважування даної системи даний спосіб потребує встановлення тільки двох противаг масами m_g і m_n . Тому у порівнянні з двома іншими способами цей спосіб вважається найбільш економічним.

22.3. Балансування жорстких роторів

Ротором у теорії балансування або зрівноваження називають будь-яке тіло, що обертається навколо осі і спирається на нерухомі опори.

Розрізняють ротори одноопорні (рис. 4.131, а); двоопорні (рис. 4.131, б); двоконсольні (рис. 4.131, в).

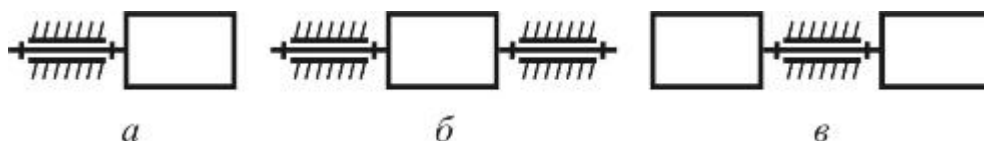


Рис. 4.131

Ротори бувають жорсткими і гнучкими. Гнучким ротором називається ротор у якого відстань l між опорами значно перевищує його діаметр ($l \gg D$).

Під час роботи гнучких роторів може виникнути прогини валу. В жорстких роторах така деформація відсутня.

У сучасних машинах та механізмах використовуються ротори електродвигунів, генераторів, турбін, pomp, вентиляторів. У якості роторів також розглядають автомобільні колеса, колінчасті та кулачкові вали, шпинделі, барабани центрифуг, шків приводів тощо.

Незрівноваженість роторів виникає внаслідок неточності їх виготовлення, ексцентричної посадки, неоднорідності матеріалу, неточностей при монтажу і т.п.

Зрівноваження роторів називається *балансуванням*. В процесі балансування надлишкова маса у більш важкій частині ротора видаляється, або у діаметрально протилежному боці встановлюється противага.

Якщо ж динамічна складова інерційних сил ротора не дорівнює нулю, то ротор вважається незрівноваженим.

Для прикладу розглянемо ротор, який обертається навколо осі z зі сталою кутовою швидкістю ω (рис. 4.132) [13].

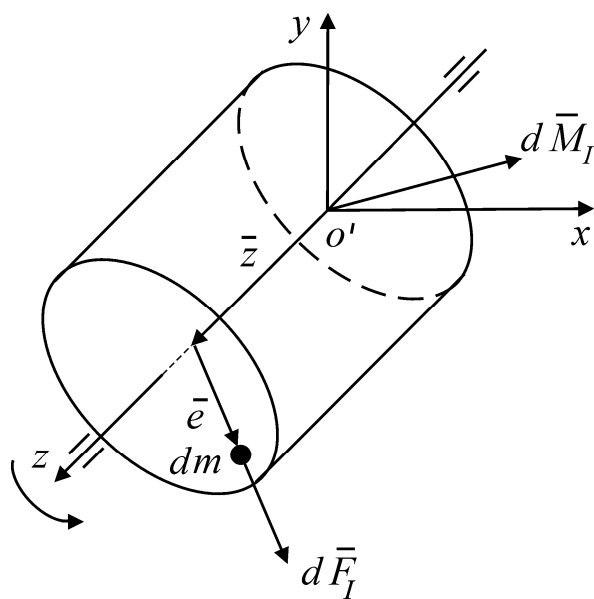


Рис. 4.132

Виділимо з ротора елементарну масу dm . Найкоротша відстань елементарно маси dm від осі обертання буде визначатись вектором \vec{e} .

Відповідно на елементарну діє елементарна відцентрова сила інерції

$$d\vec{F}_I = \omega^2 \vec{e} dm. \quad (4.246)$$

Вектор \bar{e} буде ексцентриситетом маси dm , а вектор $\bar{e} dm$ – її дисбалансом.

Вектор $d\bar{M} = \bar{z} \times \bar{e} dm$ відповідно буде моментом дисбалансу маси dm .

Головний вектор сил інерції всього ротора визначається як

$$\bar{F}_I = \int_m d\bar{F}_I = \omega^2 \int_m \bar{e} dm. \quad (4.247)$$

Головний вектор дисбалансів (вектор статичних дисбалансів) буде

$$\bar{D}_{cm} = \int_m \bar{e} dm = m\bar{e}_S, \quad (4.248)$$

де m – маса ротора; \bar{e}_S – ексцентриситет центра мас. Цей вектор перпендикулярний до осі обертання ротора.

Головний момент сил інерції ротора визначається як

$$\bar{L}_I = \int_m d\bar{L}_I = \omega^2 \int_m \bar{z} \times \bar{e} dm = \bar{M}_D, \quad (4.249)$$

де \bar{M}_D – головний момент дисбалансів (вектор динамічних дисбалансів), який визначається відносно точки, яка є проекцією центра мас на вісь обертання.

Для дослідження незрівноваженості ротора будемо розглядати його у вигляді найпростішої моделі, яка складається з двох мас m_1 і m_2 , що знаходяться на деякій відстані від осі обертання $O - O$.

При статичній незрівноваженості головна центральна вісь інерції $x - x$ буде паралельною осі обертання $O - O$ ротора (рис. 4.133).

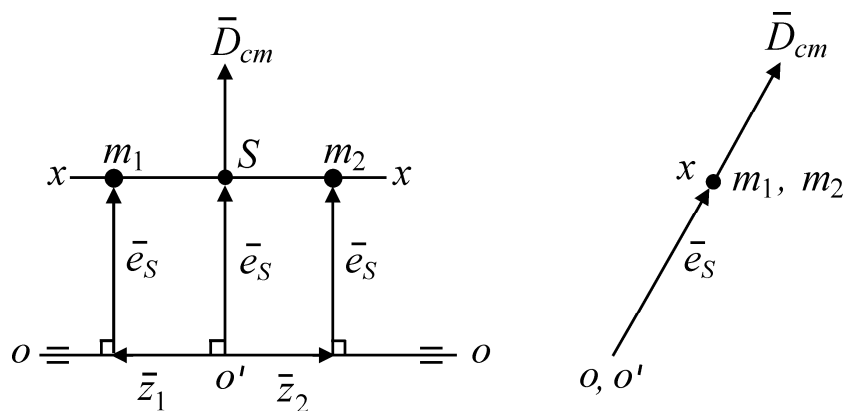


Рис. 4.133

Головний вектор дисбалансів буде дорівнювати

$$\bar{D}_{cm} = m_1 \bar{e}_S + m_2 \bar{e}_S = m \bar{e}_S,$$

де $m = m_1 + m_2$ – сумарна маса двомасової моделі.

Тоді головний момент дисбалансів визначиться як

$$\bar{M}_D = \bar{z}_1 \times m_1 \bar{e}_S + \bar{z}_2 \times m_2 \bar{e}_S = (m_1 \bar{z}_1 + m_2 \bar{z}_2) \times \bar{e}_S.$$

Із визначення центра мас у цьому випадку в проекції на вісь \bar{z} , яка знаходиться на осі обертання, будемо мати

$$m_1 \bar{z}_1 + m_2 \bar{z}_2 = 0.$$

Отже при статичній незрівноваженості головний момент дисбалансів буде дорівнювати нулю: $\bar{M}_D = 0$.

При моментній незрівноваженості осі $O-O$ та $x-x$ будуть перетинатись в центрі мас ротора (рис. 4.134).

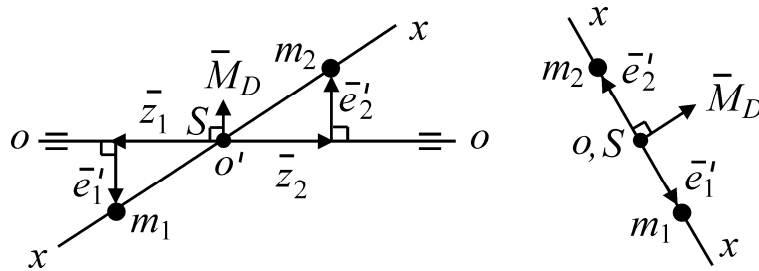


Рис. 4.134

Оскільки центр мас S знаходиться на осі обертання, то $\bar{e}_S = 0$.

Отже у випадку моментної незрівноваженості головний вектор дисбалансів буде дорівнювати нулю:

$$\bar{D}_{cm} = m \bar{e}_S = 0.$$

Головний момент дисбалансів у цьому випадку буде

$$\bar{M}_D = \bar{z}_1 \times m_1 \bar{e}_1' + \bar{z}_2 \times m_2 \bar{e}_2',$$

де \bar{e}_1' , \bar{e}_2' – ексцентриситет мас m_1 і m_2 .

При цьому із визначення центра мас зрозуміло, що у цьому випадку

$$m_1 \bar{e}_1' + m_2 \bar{e}_2' = 0.$$

Тоді головний момент дисбалансів визначається як

$$\bar{M}_D = \bar{z}_1 \times m_1 \bar{e}_1' + \bar{z}_2 \times (-m_1 \bar{e}_1') = (\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \times m_1 \bar{e}_1'.$$

Отже у цьому випадку однакові за абсолютною величиною та протилежні за напрямом вектори $m_1 \bar{e}_1'$ і $m_2 \bar{e}_2'$ утворюють пару, плечем якої є вектор $(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$.

Оскільки вектори \bar{e}_1' та $(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$ перпендикулярні, то абсолютна величина головного моменту дисбалансів буде дорівнювати

$$M_D = (z_1 - z_2) \cdot m_1 e_1'.$$

Якщо в попередній схемі перемістити вісь обертання $O - O$ паралельно самій собі, можна отримати схему повної динамічної незрівноваженості, в якій осі $O - O$ та $x - x$ є мимобіжними (рис. 4.135).

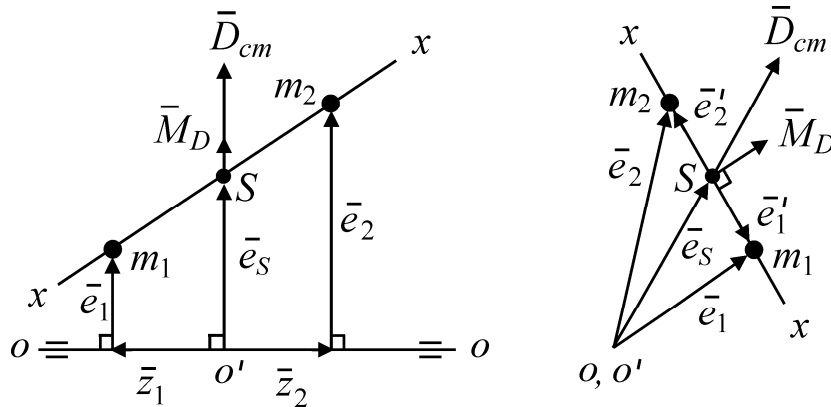


Рис. 4.135

У цьому випадку ексцентриситети мас m_1 і m_2 відповідно визначаються як

$$\bar{e}_1 = \bar{e}_S + \bar{e}_1';$$

$$\bar{e}_2 = \bar{e}_S + \bar{e}_2'.$$

Отже повна динамічна незрівноваженість – це геометрична сума статичної та моментної.

Головний вектор дисбалансів у цьому випадку буде таким самим, як і при статичній незрівноваженості:

$$\bar{D}_{cm} = m \bar{e}_S.$$

Головний момент дисбалансів при цьому буде дорівнювати

$$\begin{aligned}\bar{M}_D &= \bar{z}_1 \times m_1 \bar{e}_1 + \bar{z}_2 \times m_2 \bar{e}_2 = \bar{z}_1 \times m_1 (\bar{e}_S + \bar{e}_1') + \bar{z}_2 \times m_2 (\bar{e}_S + \bar{e}_2') = \\ &= (m_1 \bar{z}_1 + m_2 \bar{z}_2) \times \bar{e}_S + \bar{z}_1 \times m_1 \bar{e}_1' + \bar{z}_2 \times m_2 \bar{e}_2'.\end{aligned}$$

Враховуючи те, що $m_1 \bar{z}_1 + m_2 \bar{z}_2 = 0$, то головний момент дисбалансів у цьому випадку буде таким самим як і у випадку моментної незрівноваженості:

$$\bar{M}_D = \bar{z}_1 \times m_1 \bar{e}_1' + \bar{z}_2 \times m_2 \bar{e}_2'.$$

Головний момент дисбалансів буде спрямований перпендикулярно до площини, яка утворена головною центральною віссю інерції $x - x$ і прямою, що проходить через центр мас паралельно осі обертання $O - O$ ротора.

Таким чином, ротор буде повністю зрівноваженим, якщо його головний вектор і головний момент сил інерції дорівнюють нулю:

$$\bar{F}_I = \omega^2 \bar{D}_{cm} = 0.$$

$$\bar{L}_I = \omega^2 \bar{M}_D = 0.$$

Оскільки $\omega \neq 0$, то дві останні умови можна записати в наступному вигляді:

$$\bar{D}_{cm} = 0. \quad (4.250)$$

$$\bar{M}_D = 0. \quad (4.251)$$

Отже при повному зрівноваженні ротора головний вектор і головний момент дисбалансів будуть дорівнювати нулю. При цьому центр мас ротора буде знаходитись на осі обертання, а його головна центральна вісь інерції буде співпадати з віссю обертання.

Передостаннє рівняння називається умовою статичної зрівноваженості ротора, а останнє – моментної.

Треба відмітити, що для повної динамічної зрівноваженості необхідне виконання обох цих умов.

Статичне балансування ротора можна провести за допомогою простих установок, які дозволяють повернути на вісь обертання зміщений його центр мас. Принцип дії такої установки полягає в наступному.

Якщо ротор, який необхідно балансувати покласти цапфами на паралельні призми (рис. 4.136) і дати можливість обертатись то він буде котитись по призмах до тих пір, поки його центр мас S не займе найбільш низьке положення. Для того, щоб привести центр мас до осі обертання, необхідно на нижній (важчій) частині ротора видалити частину металу або на верхній (легшій) частині поставити додаткову масу.

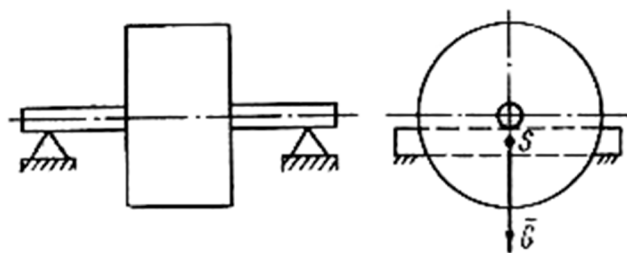


Рис. 4.136

Як вже було показано раніше, динамічну незрівноваженість ротора як двомасової моделі, можна усунути встановленням двох додаткових мас. Останні потрібно розмістити в площинах, які перпендикулярні осі обертання.

Динамічне балансування роторів виконується на спеціальних балансувальних верстатах або станках.

Розглянемо для прикладу балансувальний верстат системи Б.В. Шитикова (рис. 4.137).

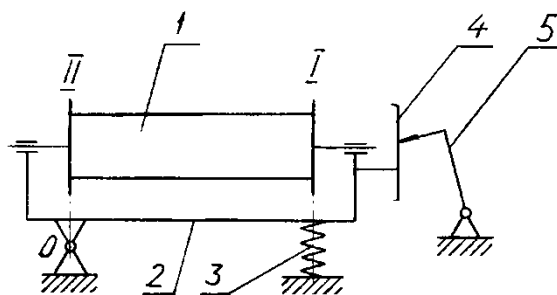


Рис. 4.137

Балансування ротора на такому верстаті виконується наступним чином. Ротору *I*, який встановлений на підшипниках у жорсткій рамі *2*, надається велика кутова швидкість. В результаті за рахунок незрівноважених мас ротора виникають сили інерції. Ці сили діють на раму, яка з'єднана шарніром *O* і пружиною *3* з нерухомою станиною, і викликає її коливання відносно шарніру. Максимальна амплітуда коливань, що залежить від величини дисбалансу, фіксується на екрані *4* записуючим пристроєм *5*.

Запис амплітуди коливань рами може проводитись у різних положеннях ротора на рамі у двох площинах корекції *I* і *II*. Для цього на

роторі жорстко закріплені диски, які лежать у площинах I і II. Диски мають радіальні прорізи, що призначені для встановлення коректуючих мас і можуть закріплюватись під різними кутами відносно самого ротора.

Динамічну незрівноваженість ротора зводять до дисбалансів двох мас, що розташовані в площинах корекції, а одна з яких суміщається з нерухомою віссю шарніра O . Тоді дисбаланс, що лежить у цій площині, не впливатиме на визначення дисбалансу в іншій площині корекції.

Отже після запису амплітуд коливань ротора за допомогою цього верстату можна визначити величини противаг та їх розміщення у площинах корекції I і II.

Розглянемо послідовність визначення початкового дисбалансу \bar{D}_1 в площині корекції I. Для цього диск з радіальними прорізами закріплюємо під кутом повороту γ відносно нерухомого лімба на роторі.

Ротор розганяємо до швидкості, яка перевищує резонансне значення. Під час вибігу, коли система входить у резонанс, записуємо віброграму коливань точок екрану $a_1(t) = A_1 \sin \omega t$ та визначаємо її амплітуду A_1 . При цьому величина резонансних амплітуд буде пропорційна дисбалансам [20, 40].

Далі у прорізі диска l встановлюємо пробну масу m_n на відстані \bar{e}_n від осі обертання, так щоб вона була повернута відносно лімба ротора на кут γ .

Пробна маса створить дисбаланс величиною

$$\bar{D}_n = m_n \bar{e}_n.$$

Отже загальний дисбаланс у цьому випадку буде становити наступну векторну суму (рис. 4.138).

$$\bar{D}_2 = \bar{D}_1 + \bar{D}_n.$$

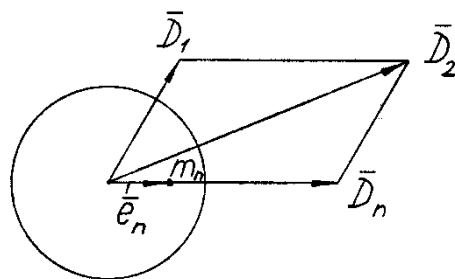


Рис. 4.138

Аналогічно запишемо віброграму $a_2(t) = A_2 \sin \omega t$ та визначимо її амплітуду A_2 , яка буде відповідати дисбалансу D_2 .

Пробну масу m_n переставляємо у протилежний проріз диска I на відстань $-\bar{e}_n$.

В результаті отримуємо новий дисбаланс у вигляді суми векторів (рис. 4.139):

$$\bar{D}_3 = \bar{D}_1 - \bar{D}_n.$$

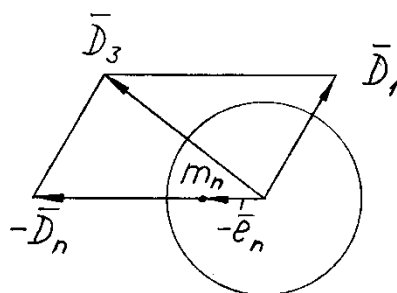


Рис. 4.139

Далі запишемо віброграму $a_3(t) = A_3 \sin \omega t$ та визначимо її амплітуду A_3 яка буде відповідати дисбалансу D_3

Тепер побудуємо паралелограми двох векторів дисбалансів, які були отримані з двох останніх векторних рівнянь. Ці паралелограми будуть однаковими через рівність та паралельність сторін. Отже їх можна поєднати (рис. 4.140).

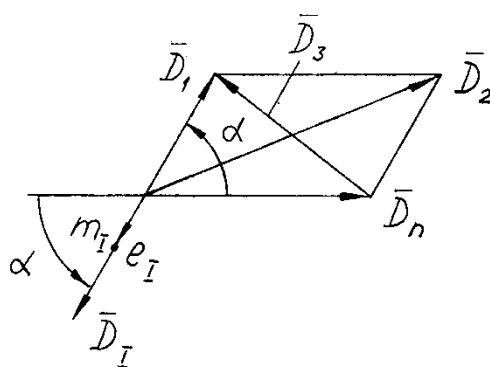


Рис. 4.140

Оскільки резонансні амплітуди коливань пропорціональні дисбалансам, то подібний паралелограм можна також побудувати і для резонансних амплітуд.

Так як для паралелограма буде справедливим

$$A_2^2 + A_3^2 = 2(A_1^2 + A_n^2).$$

Звідки можна знайти

$$A_n = \sqrt{(A_2^2 + A_3^2)/2 - A_1^2}.$$

Так як величини резонансних амплітуд будуть пропорційні відповідним дисбалансам, то

$$D_1/D_n = A_1/A_n,$$

звідки знаходимо величину початкового дисбалансу

$$D_1 = D_n A_1/A_n.$$

Для того щоб зрівноважити ротор, треба надати йому дисбаланс $\bar{D}_I = -\bar{D}_1$. Для цього треба встановити додаткову коректуючу масу m_I на відстані e_I від осі так, щоб була справедлива рівність

$$m_I e_I = D_I = D_1.$$

Звідси можна визначити ексцентриситет

$$e_I = D_1 / m_I.$$

Напрямок вектора дисбалансу \bar{D}_I визначатись визначається кутом α .

Із трикутника зі сторонами A_1 , A_n , A_3 (рис. 8.15) за теоремою косинусів можемо записати:

$$A_3^2 = A_1^2 + A_n^2 - 2A_1A_n \cos \alpha.$$

Звідки знайдемо

$$\cos \alpha = \frac{A_1^2 + A_n^2 - A_3^2}{2A_1A_n}.$$

Знайденому значенню косинуса можуть відповідати два значення кута α , які будуть відрізнятись знаками. Одне з цих значень буде додатним $\alpha = \alpha_0$, а друге від'ємним $\alpha = -\alpha_0$.

Дійсний напрям кута можна визначити експериментально методом спроб. Для цього диск з дисбалансом \bar{D}_I треба спочатку повернути на кут $\alpha = \alpha_+$, запустити ротор, записати віброграму та визначити резонансну амплітуду коливань A_{4+} .

При другій спробі диск з дисбалансом \bar{D}_I треба повернути на від'ємний кут $\alpha = \alpha_-$ і також визначити віброграму та значення резонансної амплітуди A_{4e} .

Якщо кут α наближається до 0° або до 180° , то значення амплітуди A_{4+} буде наближатись до значення A_4 . У цьому випадку потрібно проводити обов'язково дві спроби, якщо навіть в одній з них амплітуда буде суттєво зменшуватись у порівнянні з початковою.

Із двох значень A_{4+} та A_4 потрібно вибрати за величиною найменше A_4 та відповідну величину його кута α .

Далі треба порівняти знайдене значення A_4 із A_1 і розрахувати коефіцієнт зменшення резонансної амплітуди

$$K = A_1 / A_4.$$

Порядок визначення дисбалансу в площині корекції II буде аналогічним. При цьому ротор треба переставити так, щоб площини корекції I і II помінялись місцями.

Закінчується динамічне балансування ротора додаванням або видаленням певних коректуючих мас з його дисків.

Ці питання також детально розглянуті в [46, 48, 53].

22.4. Зрівноваження механізмів. Загальні положення

Будь-який механізм вважається зрівноваженим, якщо головний вектор сил \bar{F}_{in} і головний момент \bar{M}_{in} сил інерції його рухомих ланок будуть дорівнювати нулю. В протилежному випадку механізм буде незрівноваженим.

Зрівноваженість механізмів – це властивість або характеристика механізму, яка не повинна залежати від діючих на механізм зовнішніх сил.

З іншої сторони процес зрівноваження механізму – це перерозподіл певних мас його ланок таким чином, щоб максимально зменшити їх негативну дію на інші рухомі ланки.

Отже, якщо виключити із розгляду всі зовнішні сили, то в рівнянні рівноваги залишаться тільки інерційні складові, які характеризуються масами, моментами інерції і законами руху.

В результаті умову зрівноваження плоского механізму, який має i рухомих ланок, можна записати у вигляді наступних двох рівнянь:

$$\bar{F}_{in} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_{in_i} = -\sum_{i=1}^n m_i \cdot \bar{a}_{S_i} = 0; \quad (4.252)$$

$$M_{in} = \sum_{i=1}^n M_{in_i} = -\sum_{i=1}^n J_{S_i} \cdot \varepsilon_{S_i} = 0. \quad (4.253)$$

де \bar{F}_{in_i} – головний вектор сил інерції i -ї ланки механізму; m_i – маса i -ї

ланки; \bar{a}_{S_i} – прискорення центра мас i -ої ланки; J_{S_i} – центральний момент інерції i -ї ланки відносно її центра мас; ε_{S_i} – кутове прискорення i -ї ланки.

Отже незрівноваженістю будемо вважати такий стан механізму, при якому головний вектор, або головний момент сил інерції його рухомих ланок не будуть дорівнювати нулю.

У цілому розрізняють наступні три види незрівноваженого стану механізму:

- статична незрівноваженість, коли $\bar{F}_{in} \neq 0$;
- моментна динамічна незрівноваженість, коли $M_{in} \neq 0$;
- повна динамічна незрівноваженість, коли $\bar{F}_{in} \neq 0$ і $M_{in} \neq 0$.

Таким чином, статична зрівноваженість механізму забезпечується у тому випадку, коли існує деякий головний момент інерції його рухомих ланок:

$$\bar{F}_{in} \neq 0.$$

При цьому зрозуміло, що

$$\sum_{i=1}^n m_i \neq 0.$$

Тоді умовою статичної зрівноваженості механізму буде те, що прискорення центра мас його рухомих ланок має бути відсутнім:

$$a_{S_M} = 0.$$

Дана умова статичної зрівноваженості буде виконуватись у випадку, коли швидкість центра мас механізму або дорівнюватиме нулю: $V_{S_M} = 0$, або якщо вона буде сталою за величиною і напрямком.

Забезпечити виконання умови $V_{S_M} = const$ в механізмі практично неможливо.

Тому при статичному зрівноважуванні механізмів забезпечується умова, коли $V_{S_M} = 0$.

Це можливо за умов, коли центр мас механізму або лежить на осі обертання головного валу: $r_{S_M} = 0$, або коли він буде нерухомим: $r_{S_M} = const$.

При цьому центр мас механізму можна визначити як

$$r_{S_M} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \cdot r_{S_i}}{m}. \quad (4.254)$$

де m – загальна маса механізму; m_i – маса i -ї ланки механізму; r_{S_i} –

радіус-вектор, який визначає положення центра мас S_i i -ї ланки механізму відносно вибраного початку координат.

На практиці статичне зрівноваження виконується встановленням здвоєних механізмів; встановленням на ланках механізму противаг; розміщенням противаг на додаткових ланках механізму або кінематичних ланцюгах.

22.5. Статичне зрівноваження рухомих мас механізму

Для досягнення статичного зрівноваження механізму використаємо метод замінування мас.

Даний метод базується на тому, що будь-яке тіло масою m можна замінити системою, яка складається n зосереджених мас (рис. 4.141).

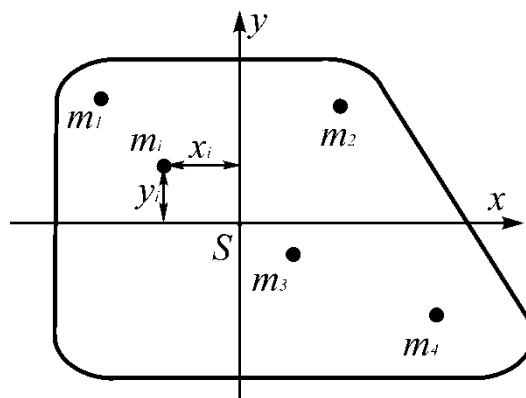


Рис. 4.141

Така заміна буде еквівалентною за наступних трьох умов:

- необхідно, щоб сума усіх мас системи дорівнювала масі тіла;
- центр мас системи має залишитись у тому ж місці;
- момент інерції системи має дорівнювати попередньому моменту інерції.

Тобто:

$$m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_i = m \quad (4.255)$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_i x_i = 0; \quad (4.256)$$

$$m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \dots + m_i y_i = 0;$$

$$m_1(x_1^2 + y_1^2) + m_2(x_2^2 + y_2^2) + m_3(x_3^2 + y_3^2) + \dots + m_i(x_i^2 + y_i^2) = J_S \dots \quad (4.257)$$

Виконання перших двох умов називається *статичним розміщенням мас* і зводиться до того, що головний вектор сил інерції замінюючої

системи мас дорівнює головному вектору сил інерції заданого тіла.

Треба зазначити, що при цьому головний момент сил інерції системи мас не дорівнюватиме головному моменту сил інерції тіла. Але для статичного зрівноважування таке розміщення мас є припустимим.

Розглянемо методику статичного зрівноваження методом замінювання мас на прикладі шарнірного чотириланкового механізму, схема якого показана на рис. 4.142.

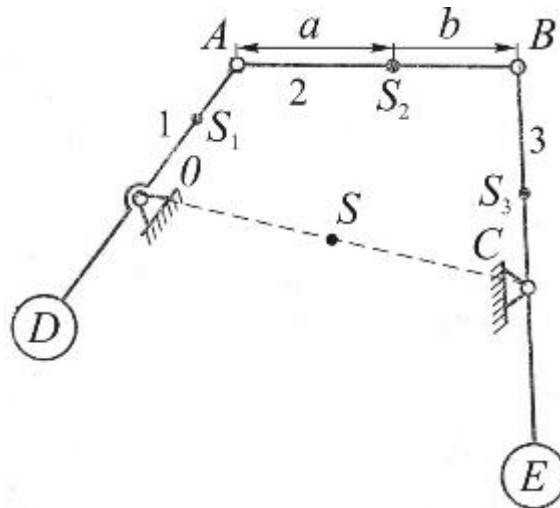


Рис. 4.142

На першому етапі виконаємо статичне заміщення маси m_2 шатуна 2 двома зосередженими масами, які будуть знаходитись в його точках A і B (рис. 4.143):

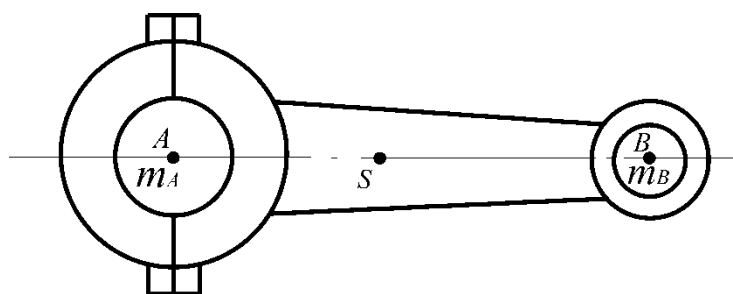


Рис. 4.143

Отже загальна маса шатуна 2:

$$m_2 = m_A + m_B.$$

Складемо рівняння рівноваги шатуна 2 відносно його точок A і B :

$$\sum M_A = m_2 \cdot a - m_B \cdot l_{AB} = 0;$$

$$\sum M_B = m_2 \cdot b - m_A \cdot l_{AB} = 0.$$

З отриманих рівнянь знаходимо зосереджені маси m_A і m_B :

$$m_A = \frac{m_2 b}{l_{AB}};$$

$$m_B = \frac{m_2 a}{l_{AB}}.$$

В результаті такої заміни отримуємо обертові маси m_1 , m_A , m_3 , m_B , які будуть знаходитись відповідно на кривошипі l і коромислі 3 .

Для того щоб ці маси зрівноважити необхідно на продовженні кривошипа і коромисла поставити дві противаги із масами m_{n_1} і m_{n_3} відповідно. Маси противаг m_{n_1} і m_{n_3} можна визначити з рівнянь рівноваги статичних моментів мас відносно шарнірів O і C :

$$m_A \cdot l_{OA} + m_1 l_{OS_1} = m_{n_1} \cdot l_{OD};$$

$$m_B \cdot l_{CB} + m_3 l_{CS_3} = m_{n_3} \cdot l_{CE}.$$

Звідки отримаємо

$$m_{n_1} = \frac{m_A l_{OA} + m_1 l_{OS_1}}{l_{OD}};$$

$$m_{n_3} = \frac{m_B l_{CB} + m_3 l_{CS_3}}{l_{CE}}.$$

Відстані для потрібного розміщення противаг вибирають із конструктивних міркувань. При цьому при здійсненні такого зрівноваження треба добитися, щоб загальний центр мас S рухомих ланок механізму був незмінним і лежав на осі OC (рис. 4.142).

Розглянемо також приклад зрівноваження кривошипно-повзунного механізму, який показано на рис. 4.144.

Позначимо маси кривошипа, шатуна і повзуна відповідно через m_1 , m_2 , m_3 і будемо вважати, що вони зосереджені у відповідних точках S_1 , S_2 і S_3 .

Масу шатуна AB тут розподілимо у дві точки A і B таким чином, щоб задовольнялись наступні дві умови

$$m_A = \frac{2}{3} m_2;$$

$$m_B = \frac{1}{3} m_2.$$

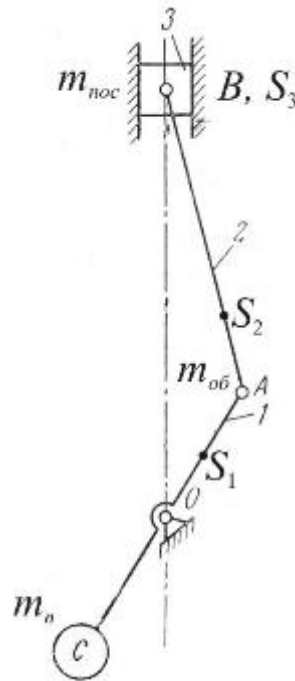


Рис. 4.144

Після такої заміни отримаємо дві маси:

- одну обертову: $m_{об} = m_1 + m_A$;
- одну поступальну $m_{noc} = m_3 + m_B$.

Обертову масу $m_{об}$ легко можна зрівноважити, шляхом встановлення на продовженні кривошипа протизаги масою m_n .

Величину маси протизаги можна визначити із рівняння статичних моментів мас відносно центра обертання кривошипа

$$m_n = \frac{(m_1 \cdot l_{OS_1} + m_A \cdot l_{OA})}{l_{OC}}.$$

Але в цьому випадку залишаються незрівноваженими сили інерції від маси повзуна m_3 і частина маси шатуна m_B , які здійснюють поступальний рух.

Треба також зауважити, що при такому методі зрівноваження додаткові маси можуть значно збільшити загальну масу механізму.

Крім цього, протизаги не завжди можливо встановити. Наприклад, для механізмів транспортних машин вони не можуть бути нижче їх коліс.

Саме через це часто обмежуються лише наближеним зрівноважуванням механізмів.

При зрівноважуванні механізмів також використовують методи оптимізації. Для цього розглядають різні конструктивні схеми механізмів і багато варіантів їх параметрів. На обчислювальних машинах проводять розрахунки і з усіх отриманих варіантів вибирається найкращий.

22.6. Статичне зрівноваження методом головних точок

Положення центра мас рухомих ланок механізму, який знаходиться на фундаменті можна визначити методом головних точок згідно з методикою Фішера.

Розглянемо зрівноваження головного вектора сил інерції методом головних точок для шарнірного чотириланкового механізму [20], схема якого показана на рис. 4.145.

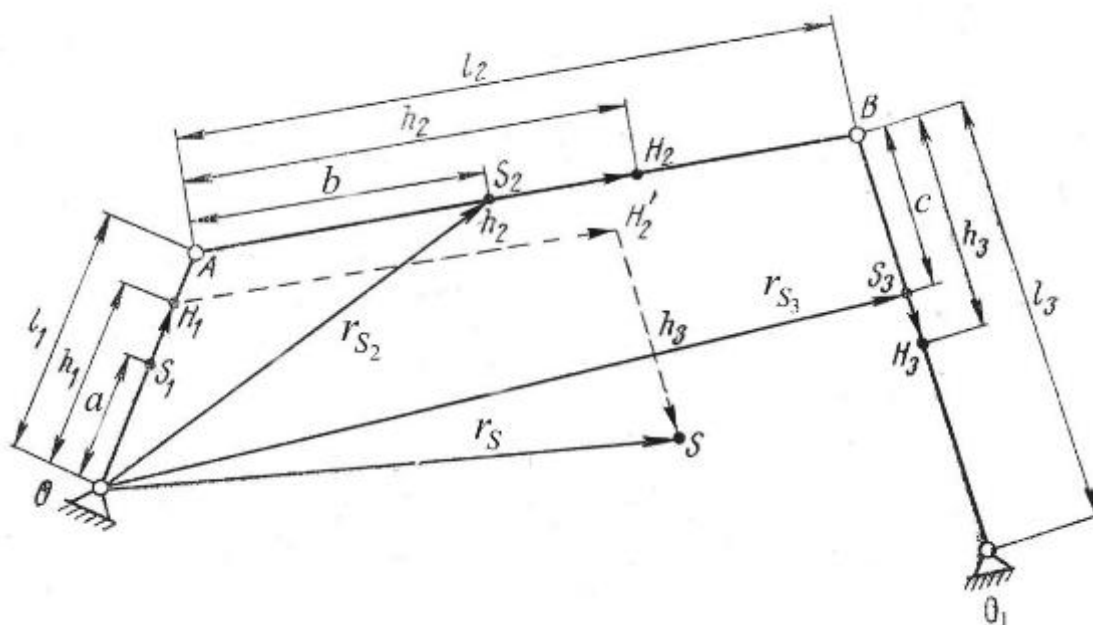


Рис. 4.145

Позначимо центри мас рухомих ланок механізму через S_1, S_2, S_3 ; довжини ланок як l_1, l_2, l_3 ; відстані від шарнірів до центрів мас ланок через a, b, c .

Центр шарніра O з'єднаємо векторами $\vec{r}_{S_1}, \vec{r}_{S_2}, \vec{r}_{S_3}$ з відповідними центрами мас усіх рухомих ланок механізму.

Тоді радіус-вектор, який буде визначати положення центра мас

рухомих ланок механізму, знаходиться за формулою

$$r_S = \frac{m_1 r_{S_1} + m_2 r_{S_2} + m_3 r_{S_3}}{m}, \quad (4.258)$$

де $r_{S_1} = a$, $r_{S_2} = l_1 + b$, $r_{S_3} = l_1 + l_2 + c$ – відповідні довжини векторів \bar{r}_{S_1} , \bar{r}_{S_2} , \bar{r}_{S_3} ; $m = m_1 + m_2 + m_3$ – загальна маса рухомих ланок механізму.

Підставивши усі значення в останню формулу, знайдемо

$$r_S = \frac{m_1 a + l_1 (m_2 + m_3)}{m} + \frac{m_2 b + m_3 l_2}{m} + \frac{m_3 c}{m}. \quad (4.259)$$

Позначимо кожен складову рівняння (4.259) як \bar{h}_i . В результаті це рівняння можемо записати як

$$\bar{r}_S = \bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \bar{h}_3. \quad (4.260)$$

Відкладемо довжини векторів \bar{h}_1 , \bar{h}_2 , \bar{h}_3 , як це показано на рис. 4.145.

Як видно з рівняння (4.259) дані вектори будуть сталими за модулем і паралельними прямим відповідних ланок векторного контуру, тобто $h_1 \parallel l_1$, $h_2 \parallel l_2$, $h_3 \parallel l_3$.

Знайдені вектори \bar{h}_i будуть визначати центри H_i умовного розміщення мас відповідних ланок (рис. 4.145).

Точки H_i називаються *головними точками*. Відповідно вектори \bar{h}_1 , \bar{h}_2 , \bar{h}_3 називаються *векторами головних точок*.

Із формули (4.259) видно, що довжина цих векторів під час роботи механізму залишається сталою.

Отже підраховавши довжини векторів \bar{h}_1 , \bar{h}_2 , \bar{h}_3 головних точок, можна визначити загальний центр мас r_S механізму, як геометричну суму цих векторів.

Із формули (4.260) видно, що модулі векторів \bar{h}_1 , \bar{h}_2 , \bar{h}_3 залежать тільки від величини та розміщення мас рухомих ланок механізму.

Змінивши форму ланок механізму, можна надати модулям головних векторів різні числові значення і тоді загальний центр мас механізму буде знаходитися у заздалегідь заданій точці.

22.7. Зрівноваження багатокривошипних машин

Як було вже з'ясовано вище, в кривошипно-повзунному механізмі з одним кривошипом (рис 4.144), після зрівноваження обертових мас, залишається незрівноваженою сила інерції від маси (точки B), яка

рухається поступально.

Величину цієї сили інерції можна знайти при розкладанні її у ряд Фур'є за наступною наближеною формулою:

$$F_{inB} = m_{noc} \cdot \omega_1^2 \cdot l_{OA} (C_1 \cos \varphi + 4C_2 \cos \varphi + 16C_4 \cos \varphi + 32C_6 \cos 6\varphi + \dots),$$

де C_1, C_2, C_4, C_6 – коефіцієнти ряду Фур'є, що залежать від співвідношення довжини кривошипа і довжини шатуна; φ – кут повороту кривошипа; ω_1 – кутова швидкість кривошипа.

Таким чином силу інерції маси (точки B), що рухається поступально, можна представити у вигляді суми окремих складових сил інерції:

$$F_{иннос} = F_{in}^1 + F_{in}^2 + F_{in}^3 + F_{in}^4 + \dots, \quad (4.261)$$

де $F_{in}^1, F_{in}^2, F_{in}^3, F_{in}^4$ – відповідно сили інерції першого, другого, третього, четвертого та ін. порядків.

Силу інерції того чи іншого порядку можна зрівноважити за допомогою додаткових обертових противаг або коректуючих мас за допомогою спеціальних пристроїв.

Розглянемо далі, які ж сили і моменти будуть зрівноваженні у випадку наявності в машині декількох кривошипно-повзунних механізмів, як це має місце, наприклад, в двигунах внутрішнього згорання з декількома циліндрами.

У двоциліндровому двигуні коліна вала розміщені під кутом 180° (рис. 4.146), а поршні рухаються назустріч один одному.

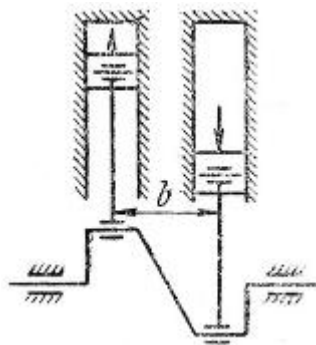


Рис. 4.146

Сили інерції першого порядку тут будуть зрівноваженні, а другого, четвертого порядків – ні. Момент від сил інерції першого порядку тут буде незрівноваженим, а момент другого порядку – зрівноваженим.

У трьохциліндровому двигуні коліна вала розміщені під кутом 120° . В такому двигуні сили інерції першого, другого і четвертого порядків будуть зрівноваженими, а сили інерції шостого порядку – незрівноваженими. Незрівноваженими тут також будуть моменти від сил інерції першого, другого та четвертого порядків. У чотирициліндровому двигуні коліна вала розміщені під кутом 180° (рис. 4.147).

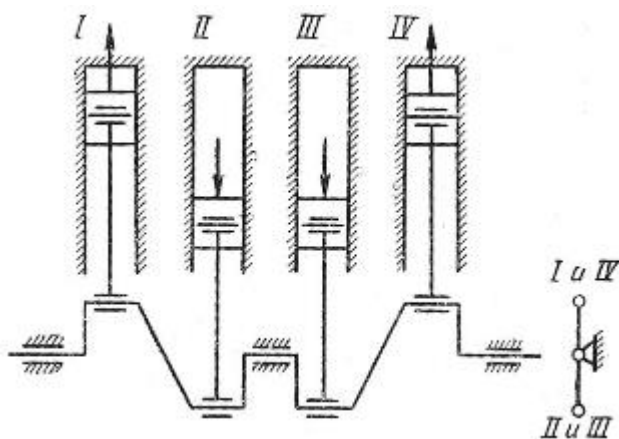


Рис. 4.147

Сили інерції першого порядку і моменти від них у цьому випадку будуть зрівноваженими. Сили інерції другого порядку і послідуєчих порядків є незрівноваженими. Моменти сил інерції усіх порядків тут будуть зрівноваженими.

В шестициліндровому двигуні коліна вала розміщені під кутом 120° (рис. 4.148).

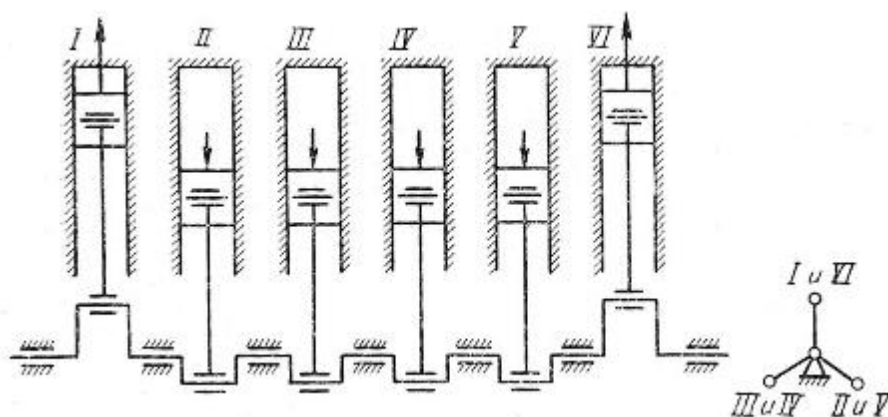


Рис. 4.148

Сили інерції першого, другого і четвертого порядків в такому двигуні будуть зрівноваженими. Моменти сил інерції усіх порядків також тут будуть зрівноваженими. Внаслідок цього шестициліндрові двигуни отримали широке розповсюдження.

22.8. Віброзахист механізмів машин

Оскільки ідеально зрівноважити ланки механізмів неможливо, то їх робота супроводжується коливаннями і вібраціями, які можуть привести до руйнування механізмів, машин, їх фундаментів та шкідливо впливають на організм людини.

При цьому *коливаннями* називається рух, при якому деякі параметри цього руху періодично змінюються протягом часу і повторюються.

Вібраціями називають такий вид коливального руху, який має порівняно невелику амплітуду та високу частоту.

У теорії машин вібраціями також називають багаточастотні *хаотичні коливання* від різних джерел збудження, з якими необхідно боротися.

Зменшення амплітуди коливань і вібрацій можна досягти наступними способами:

- зменшенням активності джерела коливань в механізмі за рахунок проведення зрівноваження його рухомих мас або зміни параметрів тертя в кінематичних парах;
- заміною конструкції механізму для уникнення зони резонансу;
- встановленням демпферів – розсіювачів енергії і динамічних віброгасіїв, які зменшують коливання шляхом створення додаткових динамічних протидій;
- застосуванням віброізоляції, яка послаблює зв'язки між джерелом коливань і об'єктом ізоляції.

Демпфери, динамічні віброгасії і віброізолятори разом називаються віброзахисними пристроями.

Віброзахисні пристрої бувають пасивними і активними.

Активні віброзахисні пристрої складаються з інерційних, пружних елементів та демпферів.

Пасивні віброзахисні пристрої можуть додатково містити елементи немеханічної природи і звичайно мають незалежне джерело енергії.

Як правило, активні віброзахисні пристрої є більш ефективними, але при цьому вони складніші за своєю конструкцією.

В свою чергу динамічні віброгасії і віброізолятори представляють собою віброзахисні системи.

Віброзахисні системи застосовують у тому випадку, коли зрівноваженням, зміною параметрів або встановленням демпферів не

вдається знизити рівень коливань і вібрацій до необхідного рівня.

При цьому під віброгасінням розуміють спосіб віброзахисту, який полягає у приєднанні до механізму машини додаткових коливальних систем, що змінюють частоту коливань досліджуваного об'єкту. Внаслідок такого приєднання відбувається перерозподіл енергії коливань від об'єкту захисту до гасія, або відбувається розсіювання енергії.

Так, на рис. 4.149 показаний простий інерційний гасій.

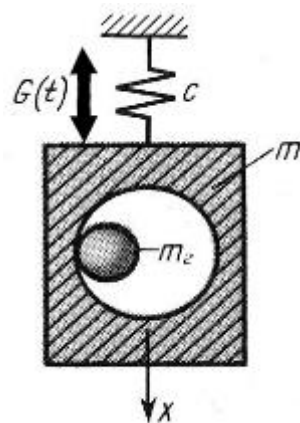


Рис. 4.149

Приєднання такого елемента до об'єкту захисту приводить до того, що здійснюваний ним рух буде синхронізуватись із зовнішнім збуджуванням, відводячи таким чином об'єкт захисту із зони резонансу.

На рис. 4.150 наведені деякі конструкції ударних гасіїв коливань.

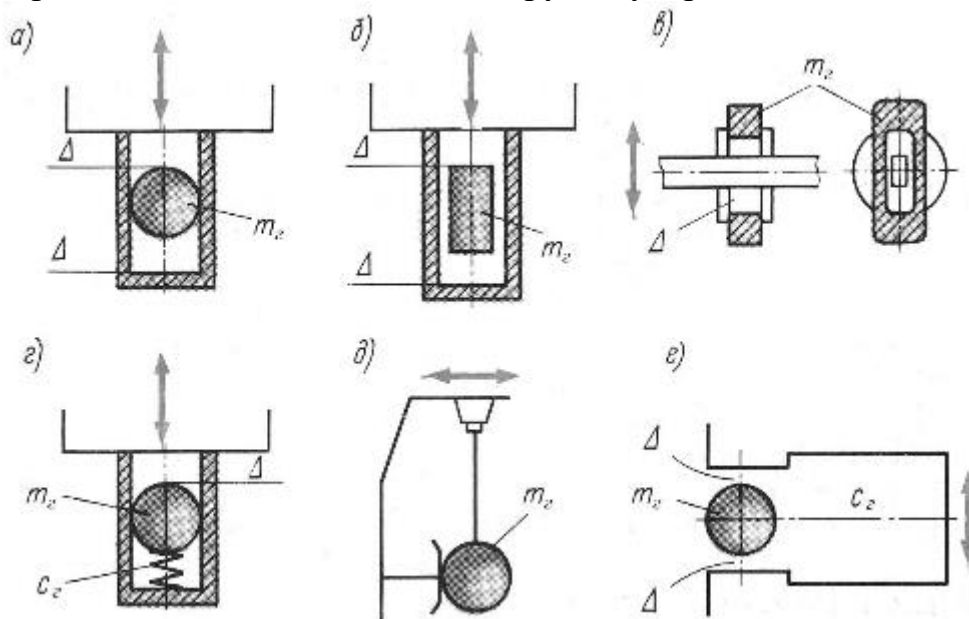


Рис. 4.150

При віброізоляції між ланками встановлюють лінійний або нелінійний віброізолятор, який як правило складається із пружного і демпфіруючого елементу (рис. 4.151).

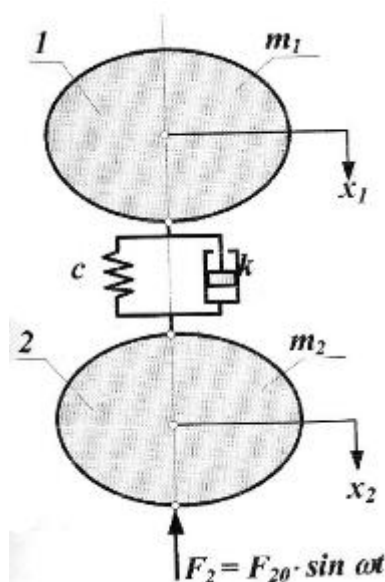


Рис. 4.151

В цій механічній системі тільки частина роботи зовнішньої сили витрачається на зміну кінетичної енергії. Частина цієї роботи переходить в енергію пружного елементу, а друга частина розсіюється демпфером, тобто переходить у тепло яке розсіюється в навколишньому середовищі.

Прикладом віброізоляції може бути підвіска автомобіля, яка ізолюється ресорами і пневматичними шинами від більшості нерівностей шляху. Віброізолятори в даному випадку зменшують динамічну складову реакції, яка передається від нерівностей шляху на автомобіль.

Якщо машина встановлена на фундамент, і фундамент є об'єктом захисту, тоді віброізолятор зменшує динамічну складову реакції яка передається на фундамент.

Пасивний метод віброізоляції базується на встановленні пружинних елементів (пружин, ресор, пневмоциліндрів і т.п.).

Активний метод віброзахисту, полягає у використанні різноманітних силових приводів і систем їх керування.

Так на рис. 4.152 наведена схема електрогидравлічної системи віброзахисту крісла 1 людини-оператора, яка складається з пружного елементу 2, гідроциліндра 3, силового стабілізатора 4 у вигляді датчика пульсації тиску робочої рідини і елемента типу сопло-заслінка, зворотних зв'язків 5 і 6 по положенню і по прискоренню.

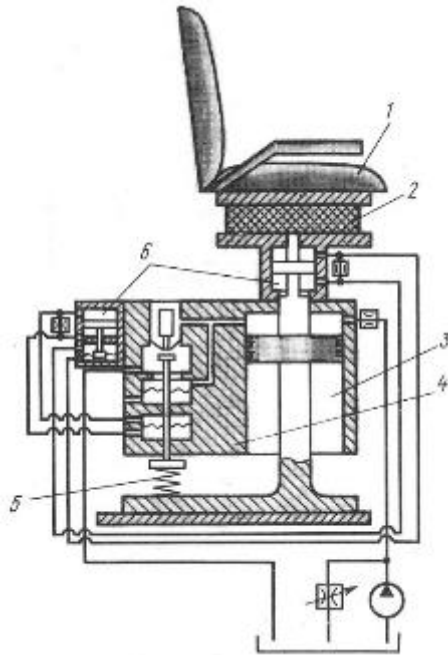


Рис. 4.152

Зворотний зв'язок по положенню тут забезпечує стабілізацію крісла відносно фундаменту. Зворотний зв'язок по прискоренню застосовується для передбачення збурювальної дії із випередженням, яке необхідне для компенсації збурення і підвищення ефективності системи. Така система дозволяє звести до мінімуму вертикальні коливання крісла з людиною.

Більш детально з питаннями віброзахисту і віброізоляції можна ознайомитись в роботах [14, 15, 25, 33, 34].

Запитання для самоконтролю

1. В чому полягає зрівноваження механізмів? Які задачі воно містить?
2. Які види незрівноваженості Ви знаєте? Охарактеризуйте кожен з них.
3. У яких випадках спостерігається статична незрівноваженість? Що являється її причиною?
4. Яким параметром характеризується статична незрівноваженість?
5. У яких випадках спостерігається динамічна незрівноваженість? Якою вона буває?
6. Яким параметром характеризується моментна незрівноваженість?
7. Наведіть умови статичної та моментної зрівноваженості.
8. Напишіть умову повної зрівноваженості ланки механізму.
9. Поясніть метод замінюючих мас при зрівноваженні.

-
10. Наведіть методику балансування жорстких роторів.
 11. Наведіть методику статичного зрівноваження рухомих мас механізму.
 12. В чому полягає статичне зрівноваження методом головних точок?
 13. Як зрівноважені багатокривошипні машини? Дайте їх характеристику.
 14. Що називають вібраціями?
 15. Яким чином можна досягти зменшення амплітуди коливань і вібрацій?
 16. Які методи вібраційного захисту Ви знаєте?
 17. Який метод віброзахисту називається віброізоляцією? У яких випадках цей метод буде ефективним?
 18. Що таке динамічне гасіння коливань? У яких випадках його застосовують?
 19. В чому полягає принцип пасивного і активного віброзахисту. Наведіть приклади.

МЕХАНІЗМИ ІЗ ВИЩИМИ КІНЕМАТИЧНИМИ ПАРАМИ

При проектуванні механізмів із заданими властивостями вони мають перетворювати певні рухи вхідних ланок в потрібні рухи вихідних ланок із необхідними кінематичними і динамічними характеристиками. При цьому здійснення потрібних рухів механізмів, які містять тільки нижчі кінематичні пари, тобто важільними механізмами, не завжди буває доцільним внаслідок складності їхньої кінематичної схеми. В таких випадках застосовуються механізми з вищими кінематичними парами, які можуть відтворювати потрібні рухи при малій кількості ланок. Мінімальна їх кількість може дорівнювати трьом: вхідна ланка, вихідна ланка і стояк.

Іншою дуже важливою перевагою механізмів з вищими кінематичними парами полягає в тому, що вони перетворюють рухи теоретично точно, чого механізми з нижчими парами виконати не можуть.

Поверхні елементів вищої кінематичної пари, які забезпечують заданий закон руху, називаються спряженими поверхнями. Механізми можуть мати одну або декілька пар спряжених поверхонь. У першому випадку це можуть бути, наприклад, кулачкові механізми, які відтворюють зворотний рух вихідної ланки – штовхача за певним заданим законом. До другого випадку відносяться, наприклад, зубчасті механізми або зубчасті передачі, в яких безперервний рух вихідної ланки забезпечується шляхом послідовної взаємодії декількох пар спряжених поверхонь у зубчастому зачепленні.

РОЗДІЛ 23. ЗУБЧАСТІ МЕХАНІЗМИ

23.1. Триланкові зубчасті механізми

Звичайно найпростішими зубчастими механізмами для передачі обертального руху від ведучої ланки до веденої є триланкові механізми, що складаються з двох зачеплених зубчастих коліс.

Розглянемо спочатку циліндричні і конічні триланкові зубчасті передачі.

В циліндричних передачах осі валів зубчастих коліс будуть паралельні одна одній, а в конічних – вони будуть перетинатись.

При цьому в циліндричних передачах зубчасті колеса будуть знаходитись в одній площині, а в конічних – у різних.

Тому циліндричні зубчасті передачі вважаються плоскими, а конічні – просторовими.

В свою чергу розрізняють циліндричні передачі із зовнішнім і внутрішнім зачепленням.

В триланковій циліндричній зубчастій передачі з зовнішнім зачепленням (рис. 4.153) колеса, які показані у вигляді початкових кіл, перекочуються одне по другому без ковзання.

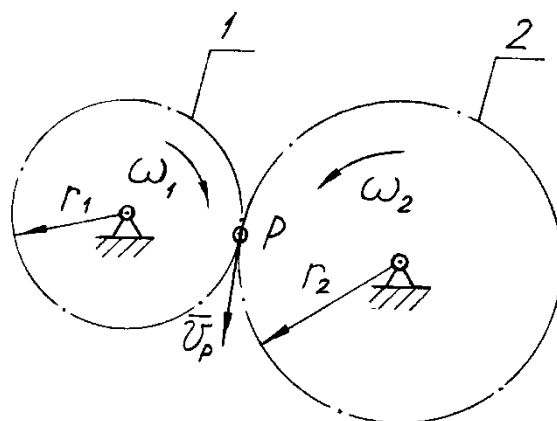


Рис. 4.153

Передаточне число (передаточне відношення) при передачі обертального руху від першого колеса до другого в цій передачі буде визначатись як

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad (4.262)$$

де ω_1, ω_2 – відповідно кутові швидкості першого і другого коліс.

Швидкість полюса зачеплення P зубчастих коліс, який є їх миттєвим центром обертання у відносному русі буде

$$v_P = \omega_1 \cdot r_{\omega 1} = -\omega_2 \cdot r_{\omega 2}, \quad (4.263)$$

де $r_{\omega 1}, r_{\omega 2}$ – відповідно радіуси початкових кіл першого і другого коліс.

Від'ємний знак у попередньому виразі означає, що колеса будуть мати протилежний напрям обертання.

Тоді відношення кутових швидкостей першого і другого коліс можна виразити через відношення радіусів їх початкових кіл:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_{\omega 2}}{r_{\omega 1}}, \quad (4.264)$$

або із врахуванням (4.262) можна записати

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{z_2}{z_1}. \quad (4.265)$$

Отже передаточне число в триланковому циліндричному зубчастому механізмі із зовнішнім зачепленням буде прямопропорційне відношенню кутових швидкостей ведучої і веденої ланок і обернено пропорційне відношенню радіусам їх ділительних кіл або числу їх зубців.

В триланковій циліндричній зубчастій передачі із внутрішнім зачепленням (рис. 4.154) аналогічно можна знайти, що її передаточне число визначається як

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (4.266)$$

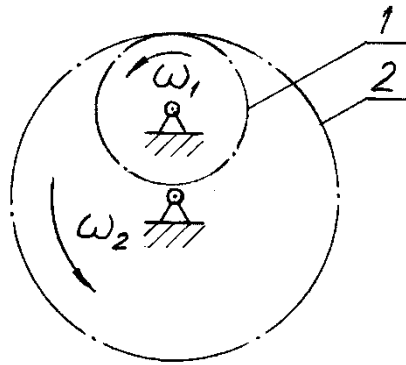


Рис. 4.154

Вирази (4.266) і (4.265) будуть відрізнятися тільки знаком у відношенні числа зубців веденої і ведучої ланок. Це означає, що при передачі обертального руху в триланковому циліндричному зубчастому механізмі із внутрішнім зачепленням, напрям руху зубчастих коліс змінюватись не буде.

Для просторового триланкового конічного зубчастого механізму (рис. 4.155) передаточне число буде дорівнювати аналогічному відношенню кутових швидкостей або чисел зубців ланок, яке береться за абсолютною величиною:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (4.267)$$

Осі коліс в таких механізмах перетинаються і розташовані по відношенню одна до одної як правило під кутом 90° , але цей кут може бути і іншим.

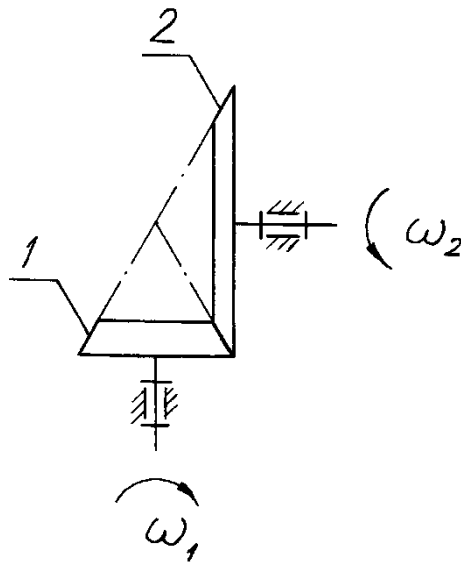


Рис. 4.155

Розглянемо також черв'ячну зубчасту передачу (рис. 4.156). В такій передачі осі валів черв'яка і зубчастого колеса не перетинаються, а взаємно перехрещуються як правило також під кутом 90° . Тому черв'ячні зубчасті механізми також вважаються просторовими.

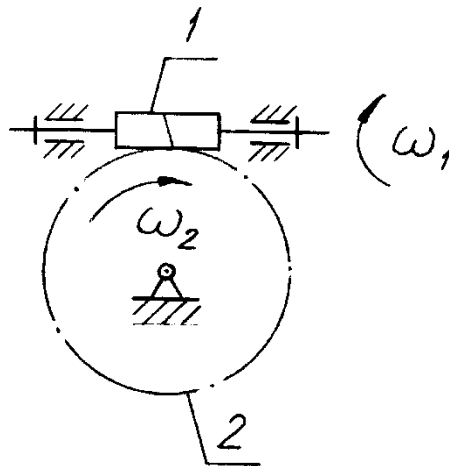


Рис. 4.156

Передаточне число черв'ячної передачі можна знайти за формулою, яка буде аналогічною попереднім:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}, \quad (4.268)$$

але в цій формулі z_1 – це число заходів черв'яка.

23.2. Багатоланкові зубчасті механізми з нерухомими осями коліс

Проектування зубчастих механізмів багатьох машин і приладів вимагає застосування передаточних чисел значно більших, ніж це можливо забезпечити триланковими зубчастими механізмами. Крім цього інколи виникає необхідність використання міжосьових відстаней, які мають бути набагато більшими, ніж ті, що дає одна пара зубчастих коліс.

У таких випадках використовують багатоланкові зубчасті механізми, які мають у своєму складі більше ніж два колеса і утворюють між собою декілька вищих кінематичних пар IV класу.

Багатоланкові зубчасті механізми можуть бути як плоскими, так і просторовими і поділяються на два основних види:

- зубчасті механізми нерухомими осями усіх коліс;
- зубчасті механізми з рухомими осями окремих коліс.

До другого виду відносяться, наприклад, такі передачі як планетарні і диференціальні, перевагою яких є їх компактність при значних передаточних числах.

Розглянемо спочатку багатоланкові зубчасті механізми з нерухомими осями коліс.

Багатоланкові зубчасті механізми з нерухомими осями коліс можуть бути одноступінчастими і багатоступінчастими.

В одноступінчастих зубчастих механізмах з послідовним рядом коліс (рис. 4.157) кожне зубчасте колесо передачі має власну вісь обертання.

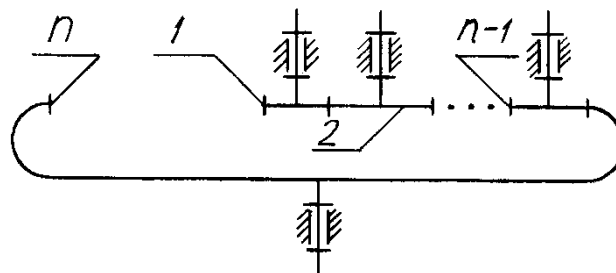


Рис. 4.157

Виразимо загальне передаточне число цього механізму через окремі передаточні числа кожної пари його коліс.

В результаті для одноступінчастого зубчастого механізму з нерухомими осями коліс передаточне число від ведучої ланки 1 до веденої n буде дорівнювати:

$$u_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} \cdot \dots \cdot \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} = u_{12} \cdot u_{23} \cdot u_{34} \cdot \dots \cdot u_{n-1,n},$$

де $u_{12}, u_{23}, u_{34}, \dots, u_{n-1,n}$ – відповідно передаточні числа між кожною парою зубчастих коліс.

Для такої циліндричної передачі із зовнішнім або внутрішнім зачепленням із числом зубів коліс $z_i, i = 1, 2, \dots, n$ можна записати

$$u_{1n} = (-1)^m \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_4}{z_3} \cdot \dots \cdot \frac{z_n}{z_{n-1}},$$

де m – кількість зовнішніх зачеплень.

Як бачимо, в отриманому виразі числа зубів проміжних коліс входять у чисельник і знаменник. Тому їх можна скоротити.

В результаті передаточне число одноступінчастого зубчастого механізму з нерухомими осями, який складається із послідовного ряду n коліс, визначиться як

$$u_{1n} = (-1)^m \frac{z_n}{z_1}, \quad (4.269)$$

Таким чином, передаточне число одноступінчастого зубчастого механізму залежить тільки від кількості зубів першого і останнього його колеса.

Проміжні колеса, які не впливають на передаточне число механізму, називаються паразитними. Тому такі механізми ще називають паразитними.

Паразитні колеса застосовуються для зміни напряму обертання коліс або для збільшення міжосьової відстані між ведучою і веденою ланками паразитного механізму.

В багатоступінчастих зубчастих механізмах з нерухомими осями (рис. 4.158) на кожній осі, окрім першої і останньої, закріплено по два зубчастих колеса.

Отже загальне передаточне число механізму з нерухомими осями, який представляє собою багатоступінчастий ряд послідовно з'єднаних простих зубчастих механізмів, буде дорівнювати добутку передаточних

чисел кожного окремого механізму, який входить до складу.

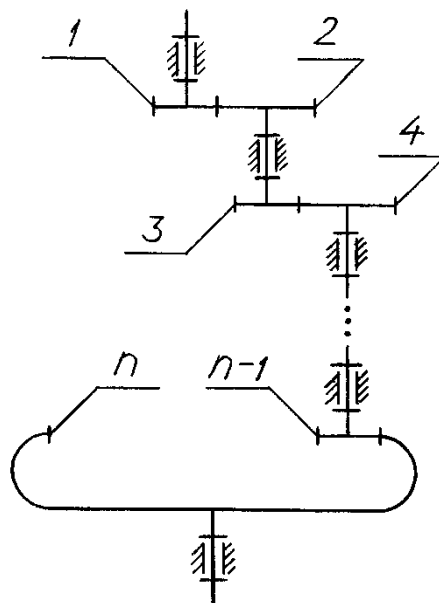


Рис. 4.158

В результаті для цього випадку передаточне число механізму при передачі обертального руху від першого колеса до n -го визначиться як

$$u_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} \cdot \frac{\omega_5}{\omega_6} \cdot \dots \cdot \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} = u_{12} \cdot u_{23} \cdot u_{34} \cdot \dots \cdot u_{n-1,n},$$

де $\omega_2 = \omega_3$, $\omega_4 = \omega_5$, $\omega_6 = \omega_7, \dots, \omega_{n-2} = \omega_{n-1}$.

Підставимо в останній вираз значення передаточних чисел $u_{12}, u_{23}, u_{34}, \dots, u_{n-1,n}$, які виражені через число зубів коліс $z_i, i = 1, 2, \dots, n$ для циліндричних передач з зовнішніми і внутрішніми зачепленнями.

В результаті отримаємо формулу для визначення передаточних чисел багатоступінчастих зубчастих механізмів з нерухомими осями

$$u_{1n} = (-1)^m \frac{z_2 \cdot z_4 \cdot \dots \cdot z_n}{z_1 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_{n-1}}. \quad (4.270)$$

23.3. Багатоланкові зубчасті механізми з рухомими осями коліс

Розглянемо тепер багатоланкові зубчасті механізми, у яких осі

деяких коліс є рухомими. Такі механізми називаються *епіциклічними*.

Як вже було зазначено раніше, епіциклічні механізми дають можливість отримати значні передаточні числа при відносно невеликих габаритах цих передач.

Епіциклічні механізми розділяють на планетарні механізми, у яких ступінь рухомості дорівнює одиниці, і диференціальні механізми, які мають ступінь рухомості більше одиниці (два і більше).

Розглянемо принцип перетворення багатоланкових зубчастих механізмів з нерухомими осями обертання на епіциклічні механізми з деякими рухомими осями.

Для прикладу візьмемо одноступінчастий механізм із внутрішнім зачепленням коліс 2 і 3, який показано на рис. 4.159.

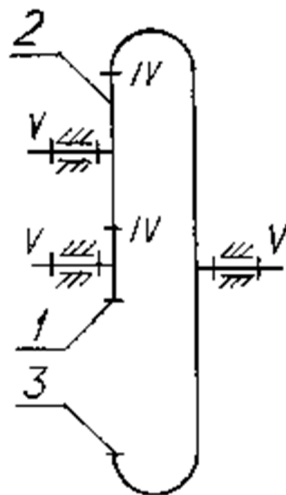


Рис. 9.159

Ступінь рухомості цього механізму буде дорівнювати

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1,$$

де $n = 3$; $p_1 = 3$; $p_2 = 2$.

Для перетворення цього механізму в епіциклічний треба зробити рухомою вісь колеса 2. Для цього з'єднаємо цю вісь з центральною віссю обертання механізму за допомогою додаткової рухомої ланки, яка називається *водилом H* (від німецького слова *Hebel* – важіль).

В результаті отримаємо диференціальний механізм (рис. 4.160), ступінь рухомості якого буде дорівнювати

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2,$$

де $n = 4$; $p_1 = 4$; $p_2 = 2$.

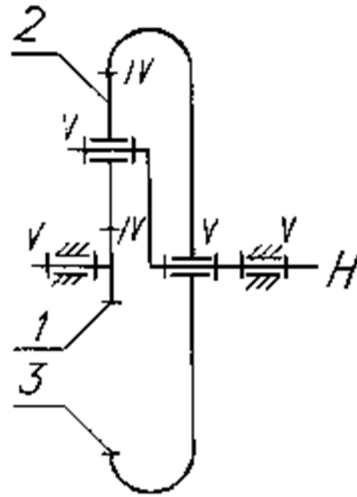


Рис. 4.160

Диференціальні механізми широко використовуються в задніх мостах автомобілів, лічильних механізмах, сільськогосподарських машинах та металорізальних верстатах.

Якщо в отриманому диференціальному механізмі колесо 3 закріпити і зробити нерухомим, то одержимо планетарний механізм (рис. 4.161).

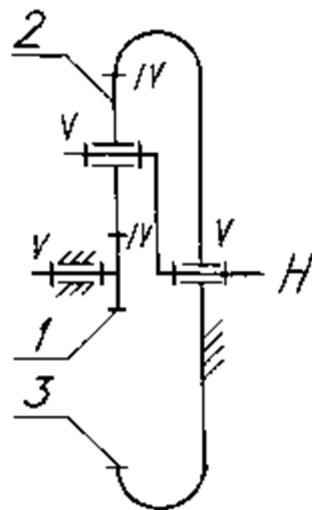


Рис. 4.161

Ступінь рухомості отриманого планетарного механізму буде дорівнювати

$$W = 3n - 2p_1 - p_2 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1,$$

де $n = 3$; $p_1 = 3$; $p_2 = 2$.

В планетарних механізмах колеса, які мають нерухомі осі називаються *центральною* або *сонячними*.

На водилі, що обертається відносно центральної осі, встановлені зубчасті колеса з рухомими осями, які називаються *сателітами*.

Наприклад, для механізму на рис. 4.161 зубчасте колесо 2 є сателітом центральних коліс 1 і 3.

Сателіти обертаються навколо своїх власних осей і разом з водилом обертаються навколо осі центрального зубчастого колеса або сонячного, як це відбувається при русі планет навколо сонця.

Планетарні механізми широко використовуються в зубчастих редукторах як механізми для виконання складного руху робочих органів машин, наприклад, для обертання лопатей мішалок, приводів шпинделів і т.п.

Треба зазначити, що будь-який диференціальний механізм або диференціал можна перетворити у планетарний, якщо закріпити одне з його центральних коліс.

І навпаки, будь-який планетарний механізм, що має нерухоме колесо можливо перетворити у диференціал, якщо звільнити нерухоме (опорне) колесо і надати йому обертання.

Така властивість планетарних і диференціальних механізмів називається властивістю їх оберненості.

Властивість оберненості дозволяє застосовувати однакові методи дослідження та проектування як для планетарних, так і для диференціальних механізмів.

23.4. Формула Вілліса

Для визначення співвідношень між кутовими швидкостями ланок в диференціальних або планетарних механізмах використаємо метод обернення (інверсії) їх руху.

Даний метод полягає в тому, що всім ланкам механізму надають додаткову кутову швидкість навколо центральної його осі, яка дорівнює, але буде протилежною за напрямом кутовій швидкості водила H .

При цьому відносний рух ланок не зміниться, водило стане умовно нерухомим, а диференціальний механізм перетвориться у звичайний зубчастий механізм з нерухомими осями.

Продемонструємо даний метод на диференціальному механізмі із зовнішнім зачепленням циліндричних зубчастих коліс (рис. 4.162).

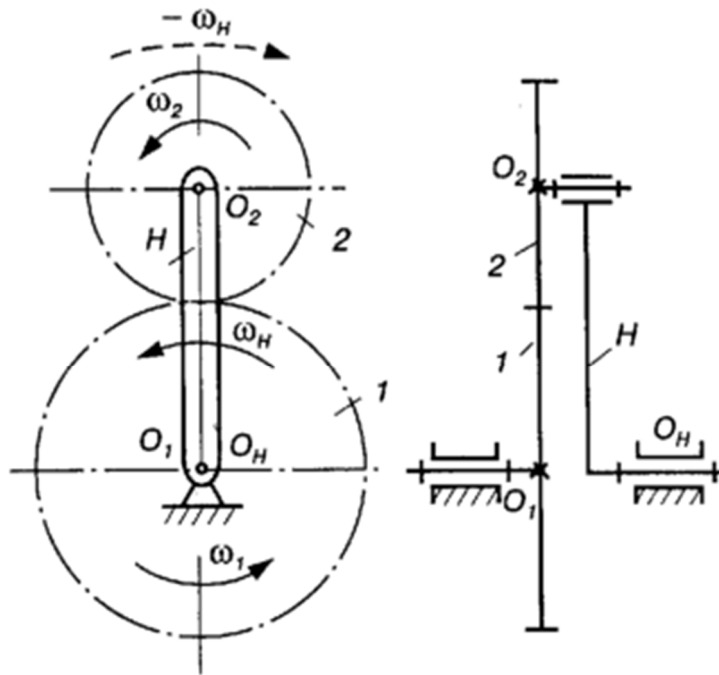


Рис. 4.162

Будемо вважати, що колеса 1, 2 і водило H цього механізму обертаються відповідно з кутовими швидкостями $\omega_1, \omega_2, \omega_H$.

Відносний рух ланок механізму не зміниться, якщо всьому механізму надати додаткового обертання навколо осі O із кутовою швидкістю $-\omega_H$, яке дорівнює по величині, але протилежне за знаком кутовій швидкості ω_H .

Отже водило H стане умовно нерухомим і диференціал перетвориться на зубчастий механізм з нерухомими осями, передаточне число якого буде

$$u_{12}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_2^H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H},$$

де індекс H над величинами вказує на те, що вони визначаються при умовно нерухомому водилі.

У загальному випадку для диференціальних механізмів із будь-якою кількістю n зубчастих коліс, попередню формулу можна представити у наступному вигляді

$$u_{1n}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_n^H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_n - \omega_H}, \quad (4.271)$$

Дана формула називається *формулою Вілліса* за прізвищем англійського вченого, який отримав її у 1814 р.

Формула Вілліса є універсальною для аналітичних досліджень кінематики любого епіциклічного механізму (як диференціального так і планетарного).

Так, якщо в диференціальному механізмі центральне колесо n зробити нерухомим, то він перетворюється на планетарний.

Приймаючи у цьому випадку в останній формулі $\omega_n = 0$, отримаємо наступний вираз

$$u_{1n}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H}.$$

Отже передаточне число для планетарних механізмів можна визначити як

$$u_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - u_{1n}^H. \quad (4.272)$$

23.5. Аналітичний метод визначення передаточних чисел

Розглянемо приклади визначення передаточних чисел u_{1H} для деяких планетарних передач.

Спочатку дослідимо найпростіший планетарний механізм із зовнішнім зачепленням циліндричних зубчастих коліс (рис. 4.163).

Для даного випадку за загальною формулою для планетарних механізмів:

$$u_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - u_{12}^H.$$

Для одного зовнішнього зачеплення пари коліс $m = 1$ і передаточне відношення буде дорівнювати

$$u_{12}^H = (-1)^1 \frac{z_2}{z_1} = -\frac{z_2}{z_1}.$$

Підставивши отриманий вираз у попередній, одержимо формулу для визначення передаточного числа найпростішого планетарного механізму із зовнішнім зачепленням двох зубчастих коліс

$$u_{1H} = 1 + \frac{z_2}{z_1}. \quad (4.273)$$

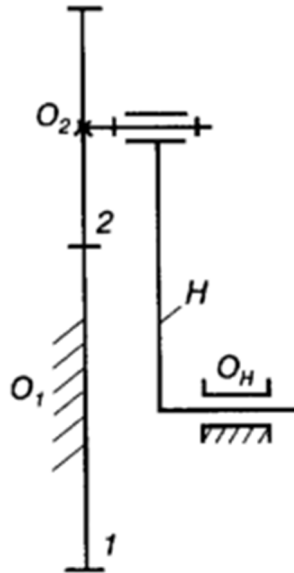


Рис. 4.163

Далі розглянемо однорядний планетарний механізм із внутрішнім зачепленням коліс 2 і 3, який було наведено на рис. 4.161.

За загальною формулою для планетарних механізмів можна знайти, що

$$u_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - u_{13}^H.$$

Для послідовного ряду коліс, в якому кількість зовнішніх зачеплень також дорівнює $m = 1$, передаточне відношення буде

$$u_{13}^H = (-1)^1 \frac{z_3}{z_1} = -\frac{z_3}{z_1}.$$

Підставивши цей вираз у попередній, отримаємо наступну формулу для визначення передаточного числа даного однорядного планетарного механізму

$$u_{1H} = 1 + \frac{z_3}{z_1}. \quad (4.274)$$

Розглянемо тепер дворядний планетарний механізм з подвійними сателітами та двома зовнішніми зачепленнями (рис. 4.164).

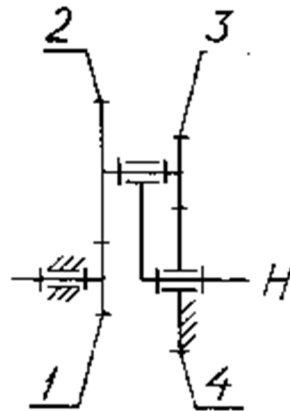


Рис. 4.164

Із загальної формули для планетарних передач можна знайти, що

$$u_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - u_{14}^H.$$

Для ступінчастого ряду коліс, в якому кількість зовнішніх зачеплень дорівнює $m = 2$, передаточне відношення буде

$$u_{14}^H = (-1)^2 \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}.$$

Підставивши даний вираз у попередній, отримаємо наступну формулу для визначення передаточного числа даного дворядного планетарного механізму

$$u_{1H} = 1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}. \quad (4.275)$$

Аналогічно для дворядного планетарного механізму (рис. 4.165) із подвійними сателітами та одним зовнішнім зачепленням ($m = 1$) можна отримати наступний вираз для визначення передаточного числа

$$u_{1H} = 1 + \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}. \quad (4.276)$$

Кутову швидкість сателіта 2 в планетарних передачах, які були розглянуті на рис. 4.161, 4.163, 4.164 і 1.165, можна визначити за формулою Вілліса, користуючись методом інверсії руху:

$$u_{12}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = -\frac{z_2}{z_1}.$$

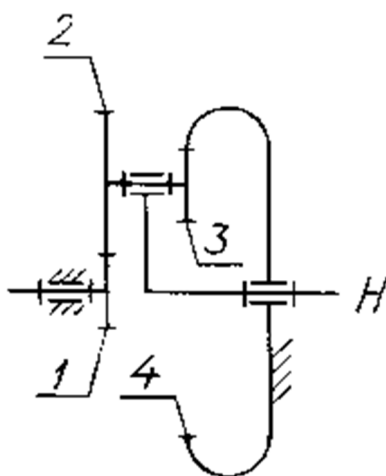


Рис. 4.165

Знайшовши значення ω_1 і ω_H , із останньої формули можна знайти кутову швидкість ω_2 зубчастого колеса 2.

Треба зазначити, що інколи виникає необхідність у розрахунку зубчастих механізмів, які складаються з різних видів зубчастих механізмів: ступінчастих, планетарних, диференціальних тощо. Такі механізми називаються комбінованими.

Для визначення передаточних чисел таких механізмів треба спочатку провести аналіз їх структури, визначити передаточні числа кожного окремого механізму, який входить до їхнього складу, а потім записати вираз для загального передаточного числа.

Згідно з [13] розглянемо приклад визначення передаточного числа наступного комбінованого механізму (рис. 4.166, а), у склад якого входять послідовно з'єднані декілька зубчастих механізмів (рис. 4.166, б, в, г)

При цьому будемо мати на увазі, що передаточне число декількох послідовно з'єднаних зубчастих механізмів буде дорівнювати добутку передаточних чисел кожного окремого механізму, що входить до складу

такого з'єднання.

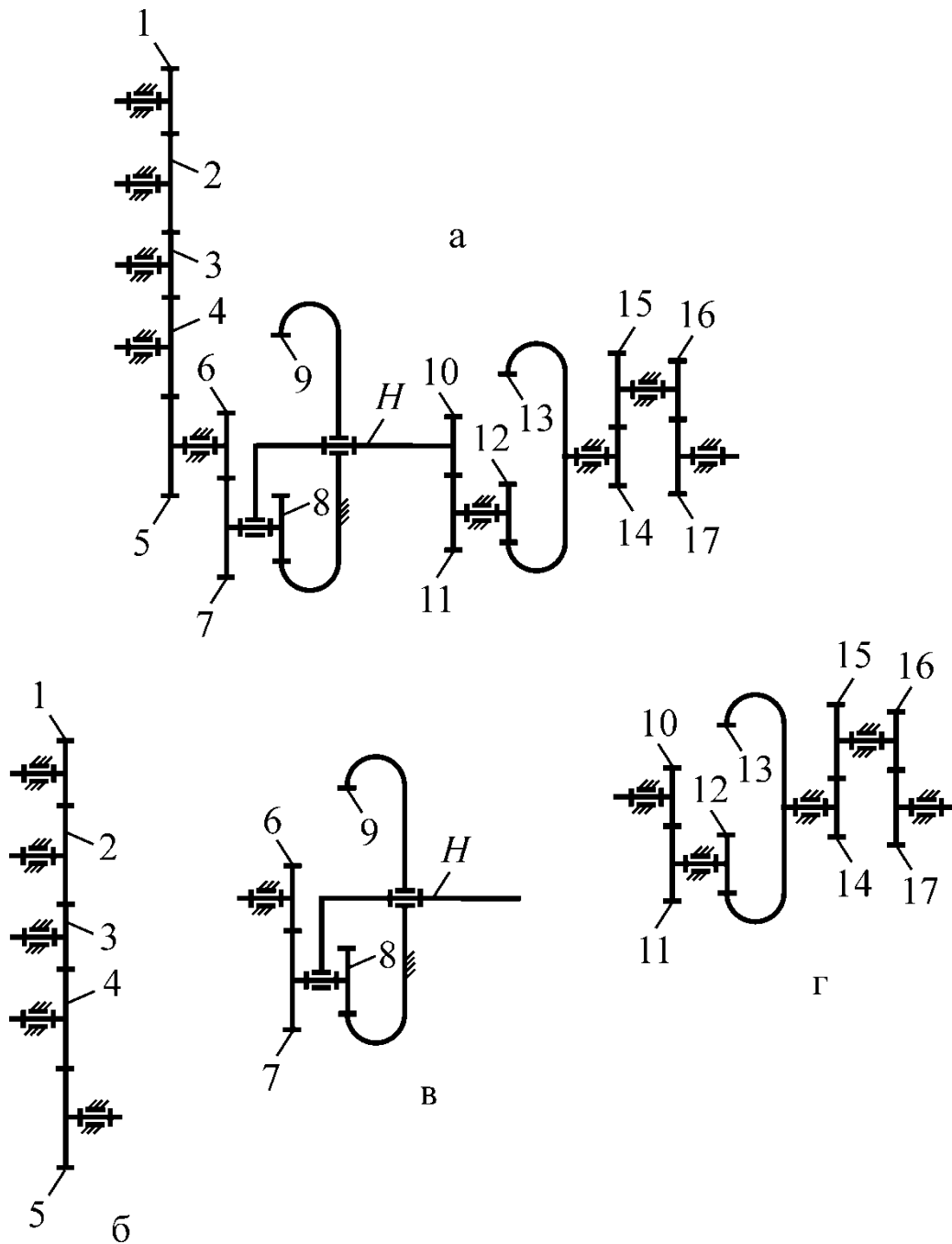


Рис. 4.166

Як бачимо даний комбінований механізм можна розділити на наступні більш прості механізми: на одноступінчасту паразитний механізм (рис. 4.166, б), дворядний планетарний механізм з одним зовнішнім зачепленням (рис. 4.166, в), на чотириступінчастий механізм (рис. 4.166, г).

Визначимо передаточні числа для кожного окремого механізму.

Передаточне відношення одноступінчастого паразитного механізму (рис. 4.166, б), у якому кількість зовнішніх зачеплень становить $m = 4$, буде дорівнювати

$$u_{15} = (-1)^m \frac{z_5}{z_1} = (-1)^4 \frac{z_5}{z_1} = \frac{z_5}{z_1}.$$

Передаточне число планетарного механізму (рис. 9.22, в) визначимо як

$$u_{6H} = 1 - u_{69}^H.$$

В цьому механізмі для двоступінчастого ряду коліс, у якому кількість зовнішніх зачеплень становить $m = 1$. Тоді отримуємо наступне значення передаточного числа:

$$u_{69}^H = (-1)^m \frac{z_7 z_9}{z_6 z_8} = (-1)^1 \frac{z_7 z_9}{z_6 z_8} = -\frac{z_7 z_9}{z_6 z_8}.$$

В результаті для даного планетарного механізму будемо мати наступне значення передаточного числа

$$u_{6H} = 1 + \frac{z_7 z_9}{z_6 z_8}.$$

Передаточне число чотириступінчастого зубчастого механізму (рис. 4.166, г), у якому кількість зовнішніх зачеплень становить $m = 3$, буде дорівнювати

$$u_{10\ 17} = (-1)^m \frac{z_{11} z_{13} z_{15} z_{17}}{z_{10} z_{12} z_{14} z_{16}} = (-1)^3 \frac{z_{11} z_{13} z_{15} z_{17}}{z_{10} z_{12} z_{14} z_{16}} = -\frac{z_{11} z_{13} z_{15} z_{17}}{z_{10} z_{12} z_{14} z_{16}}.$$

Тоді загальне передаточне число всього комбінованого механізму при передачі обертального руху від колеса 1 до колеса 17 буде дорівнювати добутку передаточних чисел складових механізмів:

$$u_{1\ 17} = u_{15} \cdot u_{6H} \cdot u_{10\ 17} = -\frac{z_5}{z_1} \left(1 + \frac{z_7 z_9}{z_6 z_8} \right) \frac{z_{11} z_{13} z_{15} z_{17}}{z_{10} z_{12} z_{14} z_{16}}. \quad (4.277)$$

23.6. Перевірка кутових швидкостей зубчастих коліс механізмів графічним способом

Аналітичні розрахунки кутових швидкостей коліс та передаточних чисел зубчастих механізмів можна перевірити графічним способом за

допомогою побудови планів (або картин розподілу) лінійних і кутових швидкостей.

При цьому треба пам'ятати, що при обертанні зубчастого колеса або іншого тіла (наприклад водила) відносно нерухомої осі швидкості будь-якої точки обертального тіла пропорціональні її відстані від цієї осі.

В результаті картина розподілу лінійних швидкостей окремих точок тіла, яке обертається із кутовою швидкістю ω навколо нерухомої осі O , наприклад колеса, буде наступною (рис. 4.167).

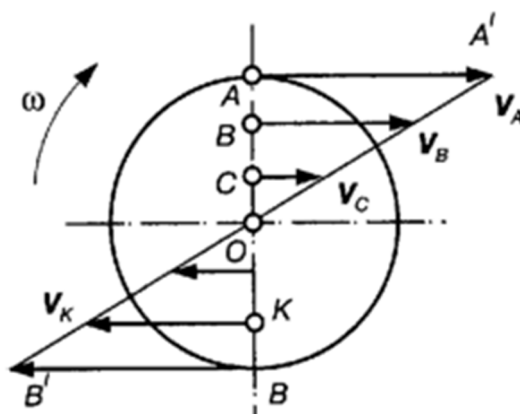


Рис. 4.167

Це пояснюється простою залежністю із теоретичної механіки, яка встановлює взаємозв'язок між лінійними і кутовими параметрами окремих точок обертального тіла:

$$v_i = r_i \cdot \omega,$$

де v_i – лінійна швидкість i -ї точки обертального тіла; r_i – відстань від i -ї точки обертального тіла до осі обертання; ω – кутова швидкість обертального руху тіла.

Якщо ж ланка буде здійснювати складний рух, наприклад плоскопаралельний, то його можна розглядати як обертальний навколо миттєвого центра обертання і картина розподілу лінійних швидкостей буде такою, як це показано на рис. 4.168.

При цьому, якщо на картині розподілу швидкостей відомі швидкості декількох точок, то швидкості інших точок можна знайти шляхом інтерполяції.

На цьому положенні базується метод графічного дослідження зубчастих механізмів, який носить назву методу Кутцбаха-Смірнова.

Згідно з цим методом, будуючи послідовно план (картину розподілу) швидкостей для окремих ланок зубчастого механізму, можна побудувати

картину розподілу швидкостей для усіх його ланок.

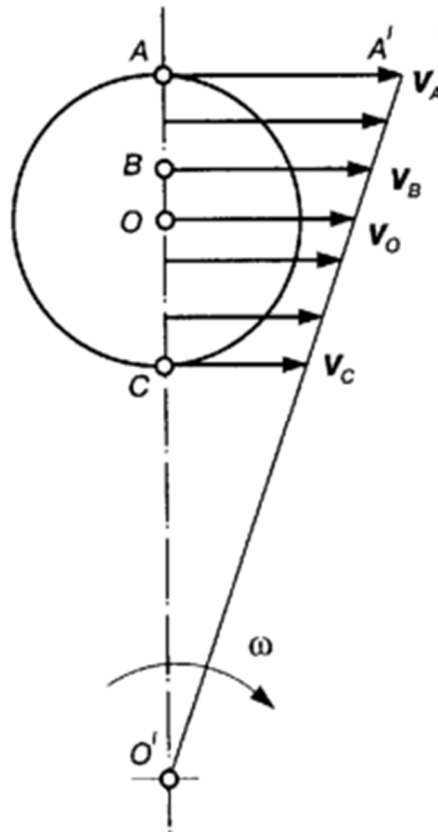


Рис. 4.168

Для прикладу розглянемо спочатку простий триланковий зубчастий механізм із зовнішнім зачепленням його двох циліндричних коліс (рис. 4.169).

Нехай його кінематична схема побудована в масштабі довжини μ_l , а також відомі радіуси ділительних кіл $r_i = r_{oi}$, ($i = 1, 2$) його зубчастих коліс.

На вертикальну пряму, яка паралельна його лінії центрів O_1O_2 , спроектуємо усі характерні точки цього зубчастого механізму: O_1 , O_2 , A , B , C і отримаємо на ній відповідні точки O'_1 , O'_2 , A' , B' , C' .

При цьому швидкість коліс 1 і 2 в їх центрах обертання дорівнюватиме нулю, а у точці C буде однаковою для обох коліс:

$$v_{C_1} = v_{C_2} = r_1 \cdot \omega_1 = r_2 \cdot \omega_2,$$

де r_1 , r_2 – радіуси ділительних кіл відповідно зубчастого колеса 1 і 2; ω_1 , ω_2 – відповідна кутова швидкість коліс.

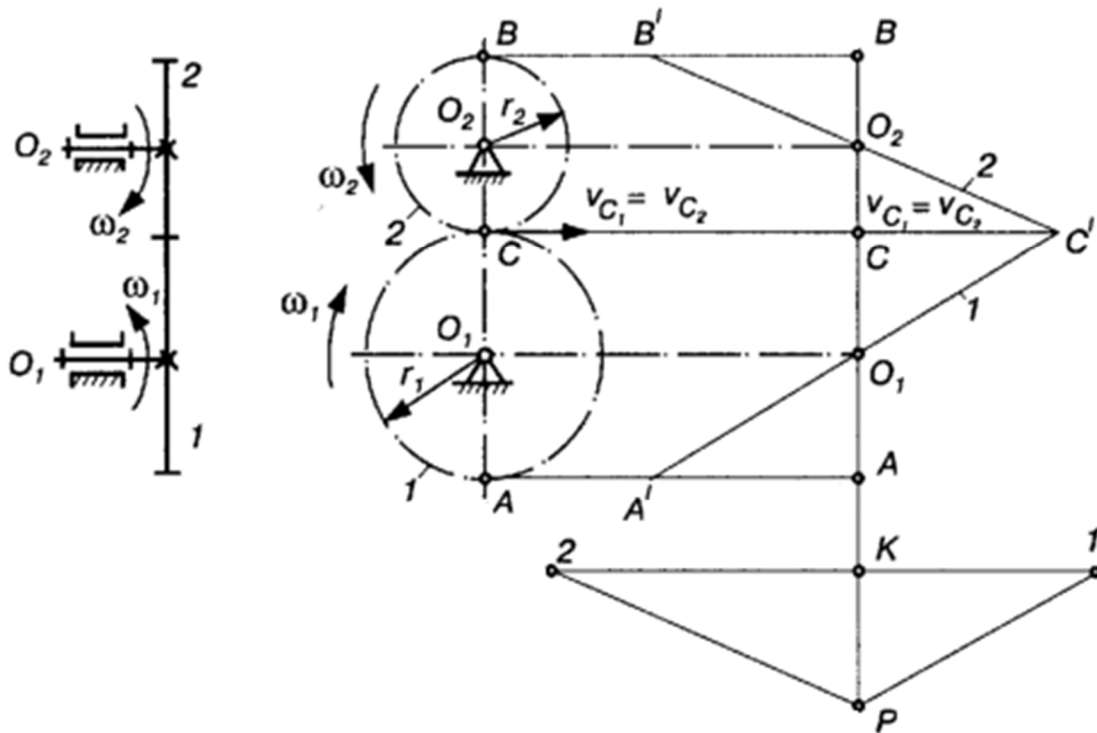


Рис. 4.169

Виберемо масштаб швидкостей

$$\mu_v = \frac{v_A}{C's},$$

де $C's$, мм, – довільний відрізок на плані, який відповідає швидкості точки C механізму

У вибраному масштабі швидкостей відкладаємо від побудованої вертикалі вибраний горизонтальний відрізок $C's$. Далі з'єднавши точку s послідовно з O'_1 і O'_2 , одержимо лінію розподілу швидкостей відповідно для колеса 1 і 2 .

Продовживши отримані лінії sO'_1 і sO'_2 до перетину їх з перпендикулярами, які проведені до вертикалі через точки A' і B' , отримаємо повну картину швидкостей зубчастих коліс 1 і 2 .

Для визначення передаточних чисел зручно використати картину кутових швидкостей, яку можна побудувати наступним чином.

Вибираємо масштаб кутових швидкостей

$$\mu_\omega = \frac{\omega_1}{K1}, \quad (4.278)$$

де $K1$ – відрізок на плані, який відповідає кутовій швидкості ω_1 .

Відрізок $K1$ відкладаємо паралельно вектору абсолютної швидкості зубчастого колеса 1 , тобто для даного випадку горизонтально.

З точки K проводимо перпендикуляр до відрізка $K1$, а з точки 1 – лінію, паралельну лінії $O'a$ розподілу швидкостей колеса 1 . На їх перетині знаходиться полюс P плану кутових швидкостей.

З полюса P проводимо промінь, який буде паралельним лінії розподілу швидкостей колеса 2 – промінь $P2$ паралельно cB' .

Отриманий відрізок $K2$ буде пропорційний кутовій швидкості зубчастого колеса 2 механізму.

Отже кутова швидкість колеса 2 буде дорівнювати

$$\omega_2 = -K2 \cdot \mu_\omega,$$

де від'ємний знак показує, що відрізок $K2$ знаходиться зліва від точки K , а колесо 2 обертається в протилежному напрямку ніж колесо 1 .

Тоді передаточне число даного зубчастого механізму визначається як відповідне відношення відрізків $K1$ і $K2$ на картині кутових швидкостей:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{K1 \cdot \mu_\omega}{-K2 \cdot \mu_\omega} = -\frac{K1}{K2}.$$

Якщо відрізки на плані кутових прискорень знаходяться з одного боку від точки K , передаточне число буде додатним, а коли з різних боків – від'ємним.

Розглянемо тепер побудову планів швидкостей планетарного механізму, кінематична схема якого показана на рис. 4.170.

Нехай масштаб довжини кінематичної буде μ_l , а радіуси ділительних кіл його зубчастих коліс будуть $r_i, i = 1, 2, \dots, 5$.

На вертикальну пряму, яка паралельна його лінії центрів O_1O_2 , спроектуємо усі точки даного планетарного механізму: O, A, B, C і отримаємо на ній відповідні точки O', A', B', C' .

При цьому швидкість коліс 1 і 2 в їх центрах обертання дорівнюватиме нулю, а у точці C буде однаковою для обох коліс:

$$v_A = r_1 \cdot \omega_1,$$

де r_1 – радіус ділительного кола зубчастого колеса 1 ; ω_1 – кутова швидкість колеса 1 .

Виберемо масштаб швидкостей

$$\mu_v = \frac{v_A}{A'a}, \quad (4.279)$$

де $A'a$, мм, – довільний відрізок на плані, який відповідає швидкості точки A механізму.

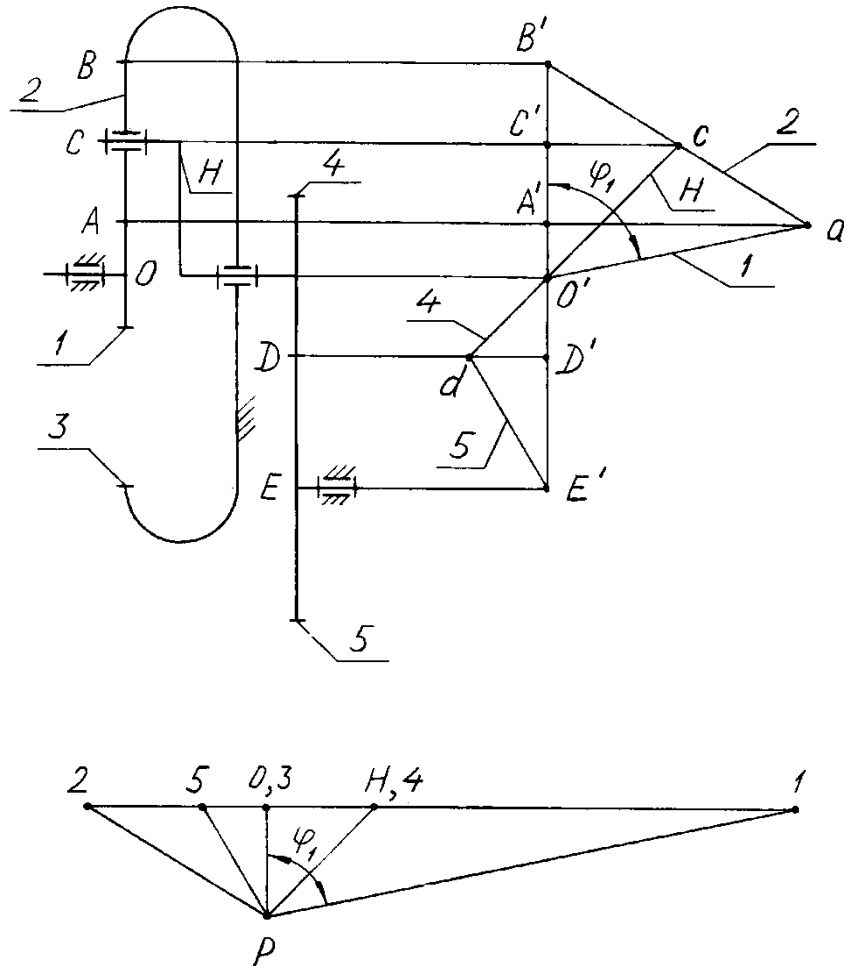


Рис. 4.170

У вибраному масштабі швидкостей відкладаємо від побудованої вертикалі вибраний горизонтальний відрізок $A'a$. Далі з'єднавши точку a послідовно з O' , одержимо лінію розподілу лінійних швидкостей для колеса 1 .

Оскільки колесо 3 є нерухомим, а колеса 2 і 3 перебувають у зачепленні, то швидкість точки B дорівнюватиме нулю.

Отже точка B буде миттєвим центром лінійних швидкостей для сателіта 2 . Тоді, сполучаючи точку a з B' , знаходимо лінію розподілу швидкостей сателіта 2 . Від точки C , яка розташована на осі сателіта 2 , проведемо горизонталь. На її перетині з лінією $B'a$ отримаємо точку c .

Оскільки довжини $AC = CB$, то із трикутника $A'B'a$ бачимо, що

$$C'c = \frac{A'a}{2}.$$

Відповідно до цього і швидкість точки C буде

$$v_C = \frac{v_A}{2}.$$

Точку c з'єднаємо із точкою O' . Далі пряму cO' продовжуємо до перетину з горизонталлю, яка проведена від точки D . На їх перетині знаходимо точку d .

Отримана пряма $cO'd$ буде лінією розподілу швидкостей жорстко з'єднаних водила H і колеса 4.

Знаходимо швидкість точки D через довжину отриманого відрізка $D'd$:

$$v_D = D'd \cdot \mu_v.$$

Далі з'єднуємо точку d з E' і отримуємо лінію розподілу швидкостей колеса 5.

Побудуємо також план кутових швидкостей даного планетарного механізму.

Визначаємо масштаб кутових швидкостей

$$\mu_\omega = \frac{\omega_1}{01}, \quad (4.280)$$

де 01 – відрізок на плані, який відповідає кутовій швидкості ω_1 .

Відкладаємо горизонтально відрізок 01 абсолютної швидкості зубчастого колеса 1.

Із точки 0 проводимо перпендикуляр до відрізка 01 , а з точки 1 – лінію, яка буде паралельною лінії $O'a$ розподілу швидкостей колеса 1. На перетині цих ліній знаходимо полюс P плану кутових швидкостей.

З полюса P проводимо промені, які будуть паралельні лініям розподілу відповідних швидкостей:

- для сателіта 2 – це промінь $P2$, який паралельний aB' ;
- для водила H і колеса 4 – це промінь PH або $P4$, який паралельний cd ;
- для колеса 5 – це промінь $P5$, який паралельний $E'd$.

Отримані довжини горизонтальних відрізків $0i$, $i = 1, \dots, 5$, та $0H$ на плані кутових швидкостей будуть відповідати значенням кутових швидкостей певних ланок механізму.

Тобто

$$\omega_2 = -02 \cdot \mu_\omega,$$

$$\omega_H = 0H \cdot \mu_\omega,$$

$$\omega_4 = 04 \cdot \mu_\omega,$$

$$\omega_5 = -05 \cdot \mu_\omega.$$

Кутова швидкість буде від'ємною, якщо горизонтальні відрізки 01 і інші лежать по різні боки від точки 0 і додатною, якщо по один бік.

Передаточні числа даного зубчастого механізму визначаються як відповідне відношення горизонтальних відрізків на плані кутових швидкостей:

$$u_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{01}{02},$$

$$u_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{01}{0H},$$

$$u_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{01}{04},$$

$$u_{15} = \frac{\omega_1}{\omega_5} = -\frac{01}{05}.$$

Для цього ж механізму (рис. 4.170) визначимо кутові швидкості зубчастих коліс аналітичним способом.

При цьому будемо вважати, що число зубів $z_i, i=1, 2, \dots, n$, коліс механізму є заданими.

Тоді загальне передаточне число всього механізму буде дорівнювати

$$u_{15} = -\left(1 + \frac{z_3}{z_1}\right) \frac{z_5}{z_4}.$$

Отже кутова швидкість колеса 5 становитиме

$$\omega_5 = \frac{\omega_1}{u_{15}}.$$

Передаточне число безпосередньо самого планетарного механізму буде дорівнювати

$$u_{1H} = 1 + \frac{z_3}{z_1}.$$

Передаточне число зовнішньої одноступінчастої передачі із $m = 1$ буде

$$u_{45} = (-1)^m \frac{z_5}{z_4} = (-1)^1 \frac{z_5}{z_4} = -\frac{z_5}{z_4}.$$

Виразимо ω_H та ω_4 через кутові швидкості коліс на різних кінцях кінематичного ланцюга:

$$\omega_H = \frac{\omega_1}{u_{1H}},$$

$$\omega_4 = u_{45} \cdot \omega_5.$$

Із врахуванням того, що $\omega_H = \omega_4$ можна зробити висновок: якщо значення кутових швидкостей ω_H та ω_4 , які отримані за двома останніми формулами, співпадатимуть, то усі попередні розрахунки зроблені вірно.

Визначимо також кутову швидкість сателіта 2.

При цьому швидкості точок A і C зубчастого зачеплення (рис. 4.170) відповідно будуть дорівнювати

$$v_A = \omega_1 r_1 = -2\omega_2 r_2,$$

$$v_C = -\omega_2 r_2 = \omega_H (r_3 - r_2).$$

де від'ємний знак вказує на те, що кутові швидкості спрямовані протилежно.

З кожної з цих двох формул знайдемо кутову швидкість сателіта ω_2 .

Із врахуванням того, що радіуси ділільних кіл r_i будуть пропорціональні відповідному числу z_i зубів коліс, отримаємо наступні вирази

$$\omega_2 = -\frac{\omega_1 z_1}{2z_2},$$

$$\omega_2 = \omega_H \left(1 - \frac{z_3}{z_2} \right).$$

Отже, якщо значення ω_2 , які визначені за обома останніми формулами, співпадатимуть, то розрахунки передаточного числа u_{1H} та

кутових швидкостей ω_2 і ω_H будуть вірними.

Крім цього треба відмітити, що при порівнянні розрахунків кутових швидкостей аналітичним і графічним способами відносна похибка не має перевищувати 1%.

Запитання для самоконтролю

1. Як визначити передаточне число в триланкових зубчастих механізмах?
2. Як визначити передаточне число в багатоланкових зубчастих механізмах з нерухомими осями коліс?
3. Як класифікують багатоланкові зубчасті механізми з рухомими осями коліс? Які їх характерні особливості?
4. Чим відрізняються планетарні та диференціальні зубчасті механізми?
5. Як називають колеса з нерухомими та рухомими осями планетарної передачі?
6. Наведіть формулу Вілліса. Поясніть принцип застосування обернення руху.
7. Наведіть приклади визначення передаточних чисел планетарних механізмів.
8. В чому полягає метод Кутцбаха-Смірнова при кінематичному дослідженні зубчастих механізмів?
9. Побудуйте схематично план лінійних швидкостей коліс планетарної передачі з подвійним сателітом та двома зовнішніми зачепленнями.

РОЗДІЛ 24. КУЛАЧКОВІ МЕХАНІЗМИ

24.1. Основні поняття і визначення

Кулачковим механізмом називається такий механізм, до складу якого входять кулачок і штовхач.

Кулачком називається ланка, яка має елемент вищої кінематичної пари, що виконана у вигляді поверхні змінної кривизни.

На рис. 4.171, а показано схему найпростішого триланкового кулачкового механізму, який складається з кулачка 1, штовхача 2, стояка 0.

При цьому, як правило, вхідною ланкою кулачкового механізму є кулачок 1, а вихідною – штовхач 2.

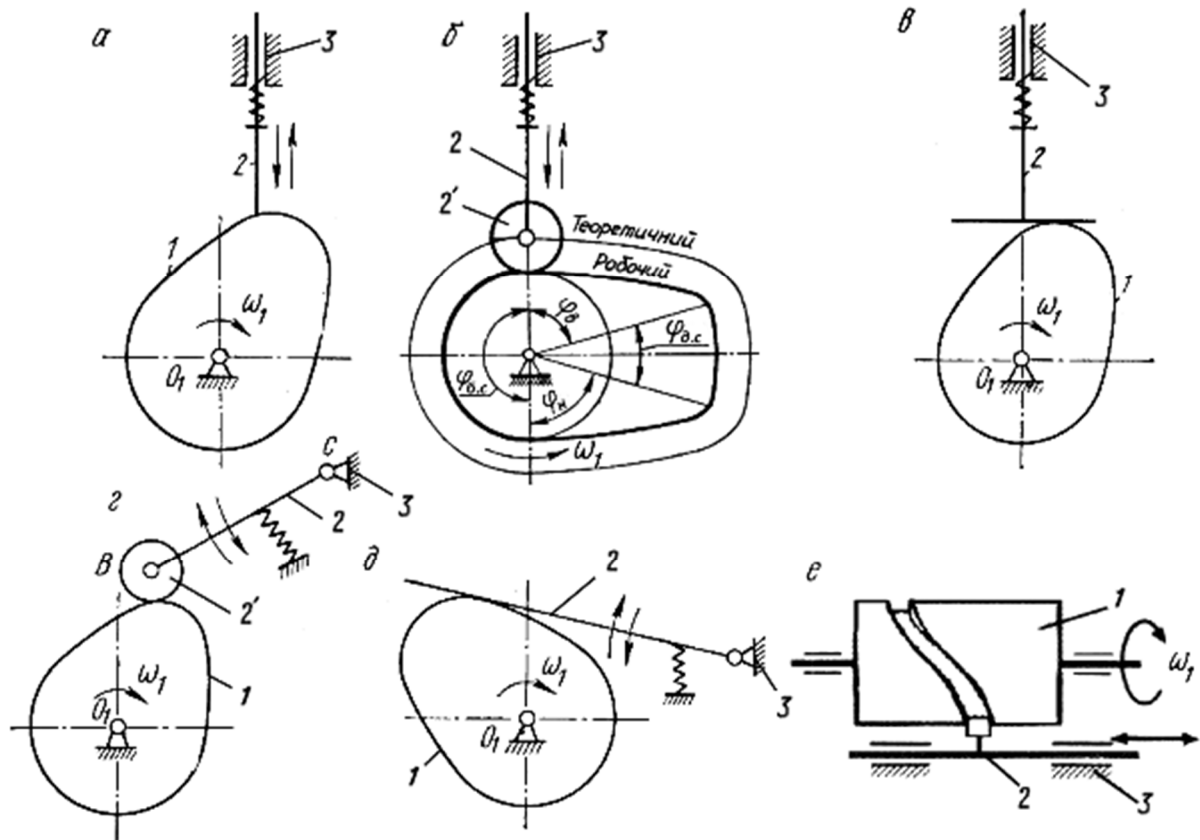


Рис. 4.171

Кулачок і штовхач утворюють вищу кінематичну пару IV класу. Тому за допомогою кулачкових механізмів можна досить легко і просто відтворити будь-який заздалегідь заданий закон руху штовхача.

Закон руху штовхача визначається профілем кулачка, який є своєрідною програмою роботи виконуючого органу механізму.

Отже можливість відтворення необхідного закону руху штовхача – основна позитивна якість кулачкових механізмів. Теоретично за їх допомогою можна отримати будь-який закон руху і з меншим числом ланок, ніж у випадку застосування механізмів з нижчими кінематичними парами.

Кулачкові механізми застосовують, коли необхідно, щоб рух вихідної ланки виконувався точно у відповідності до заданого закону і був узгоджений з рухом інших механізмів. При цьому, можна забезпечити тимчасову зупинку (вистій) вихідної ланки при неперервному русі вхідної. Крім того вони є найпростішими, компактними і надійними для точного виконання складних законів руху. Зазвичай такі механізми виконують функції курування і використовуються як допоміжні.

Недоліком кулачкових механізмів є наявність вищої кінематичної пари, значний питомий тиск між її елементами і, як наслідок, суттєве їх спрацювання. Іншим їх недоліком механізмів є необхідність забезпечувати постійне замикання ланок, які утворюють пару IV класу.

Кулачкові механізми поділяють за наступними ознаками:

- за характером руху ланок у просторі;
- за видами руху вхідної та вихідної ланок;
- за способом замикання вищої кінематичної пари;
- за видом елемента вищої кінематичної пари вихідної ланки.

За характером руху ланок у просторі кулачкові механізми бувають плоскими, коли їх ланки рухаються в одній або паралельних площинах (рис. 4.171, *a, б, в, г, д*) і просторовими (рис. 4.171, *e*).

За видом руху плоскі кулачкові механізми діляться на чотири групи:

- 1) обертальний рух кулачка перетворюється в зворотно-поступальний рух штовхача;
- 2) обертальний рух кулачка перетворюється в зворотно-обертальний рух штовхача;
- 3) зворотно-поступальний рух кулачка перетворюється в зворотно-поступальний рух штовхача;
- 4) зворотно-поступальний рух кулачка перетворюється в зворотно-обертальний рух штовхача.

Найчастіше застосовують кулачкові механізми, в яких кулачок здійснює неперервний обертальний рух.

Вихідна ланка переважно виконує зворотно-поступальний або коливальний рух. В останньому випадку ця вихідна ланка називається коромислом (рис.4.171, *г, д*).

За способом замикання вищої кінематичної пари розрізняють кулачкові механізми з *геометричним* або *кінематичним замиканням* (конструктивно за рахунок ролика в пазу або охоплюючих роликів) та із

силовим замиканням (під дією сил пружності, сил ваги, гідравлічних чи пневматичних пристроїв).

Завдяки простоті конструкції та меншим габаритам механізмів, найчастіше застосовують силове замикання за допомогою пружин, рідше для цієї мети застосовуються сили тяжіння, тиск рідини тощо.

На рис. 4.172 показано кулачковий механізм, в якому ролик 3 рухається в пазу кулачка 1, що забезпечує постійний контакт кулачка і ролика за допомогою геометричного замикання.

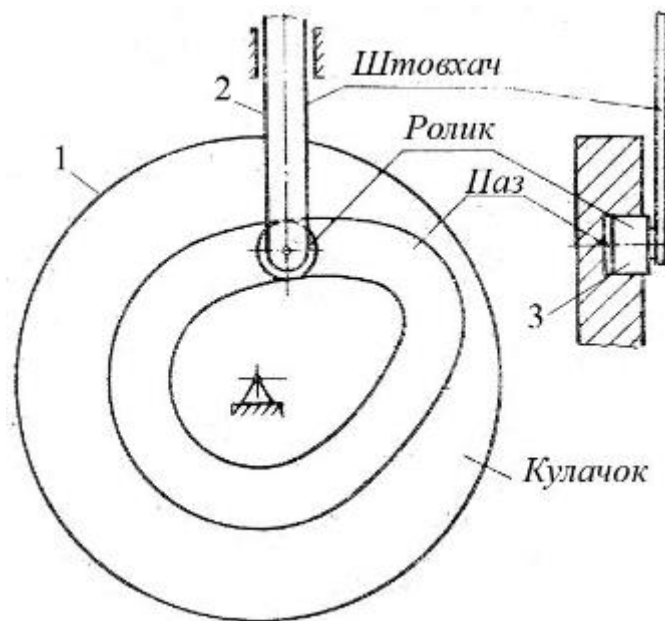


Рис. 4.172

У цілому вихідна ланка кулачкових механізмів може мати різні форми елементів вищої пари.

Так, штовхачі кулачкових механізмів в залежності від форми елементів вищої пари можуть бути:

- загостреними – зі сферою малого радіуса (рис. 4.173, а);
- плоскими або тарілчастими – з плоскою або циліндричною контактними поверхнями (рис. 4.173, б);
- сферичними – з сферичною контактною поверхнею (рис. 4.173, в);
- із роликом як проміжною ланкою (рис. 4.173, г)

При цьому загострений штовхач здійснює найточніші переміщення за заданим законом, але швидко спрацьовується.

Таку конструкцію застосовують в тихохідних механізмах при невеликих навантаженнях.

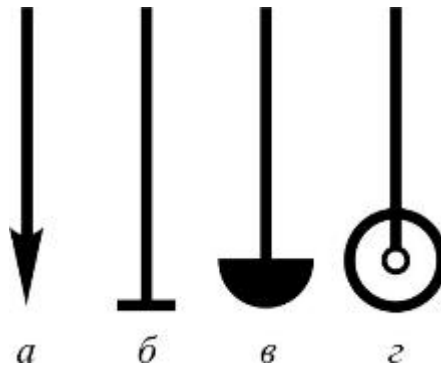


Рис. 4.173

Для зменшення втрат на тертя, підвищення стійкості проти спрацювання, надійності та довговічності кулачкового механізму, між кулачком і штовхачем можна встановити ролик або тарілчастий штовхач.

Роликові вихідні ланки використовують в механізмах, у яких підвищені вимоги до стійкості проти спрацювання.

У цьому випадку розрізняють два профілі кулачка: центровий (теоретичний) та дійсний (робочий або практичний).

Центровий профіль являє собою траєкторію руху центра ролика при обкочуванні його навколо кулачка.

Дійсний профіль – це огибаюча до послідовних положень ролика у тому ж відносному русі.

Отже, центрові та дійсні профілі кулачка – це еквідистантні (тобто рівновіддалені) криві, відстань між якими, виміряна по нормалі, що дорівнює радіусу ролика.

Треба зазначити, що заміна дійсного профілю на центровий є дуже зручною при аналізі та синтезі кулачкових механізмів; при цьому характер миттєвого відносного руху всіх ланок механізму не змінюється.

Тарілчастий штовхач (рис. 8.1, в) застосовують, коли в разі жорстких обмежень габаритних розмірів ролик встановити не вдається.

З метою розподілу спрацювання тарілки на більшу поверхню, кінематичну пару штовхач-напрямна виконують як циліндричну пару, з можливістю обертання тарілки навколо осі.

Кулачкові механізми можуть бути *центральні* (вісь штовхача проходить через вісь обертання кулачка), або *зі зміщенням* осі штовхача в той чи інший бік (з ексцентриситетом, дезаксиальні).

Зміщення штовхача дає можливість при однакових інших умовах зменшити габарити механізму та тиск на напрямну.

При проектуванні кулачкових механізмів розрізняють наступні його

етапи:

1. Вибір структурної схеми.
2. Вибір закону руху штовхача.
3. Визначення основних розмірів.
4. Побудова профілю кулачка.
5. Проведення силового і динамічного розрахунку.

Треба зазначити, що при всій різноманітності профілів кулачкових механізмів, як правило, на ньому є чотири характерні ділянки, які показані на рис. 4.174.

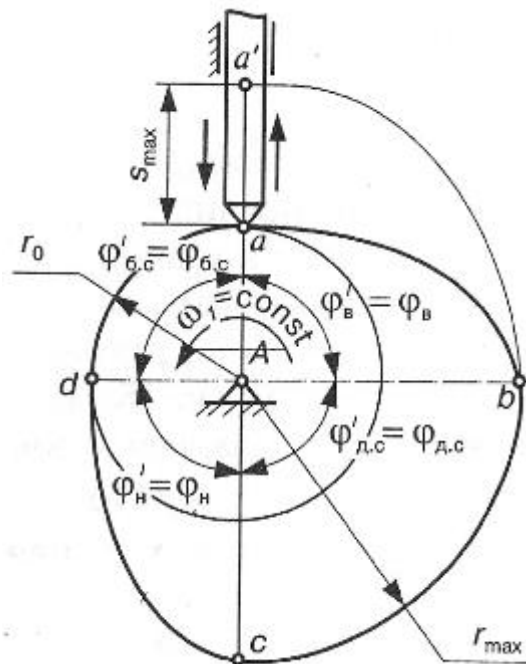


Рис. 4.174

- першій ділянці ab відповідає період віддалення штовхача t_e , коли штовхач віддаляється від кулачка;
- другій ділянці bc відповідає період дальнього стояння штовхача $t_{d.c}$, коли штовхач знаходиться в крайньому дальньому положенні від кулачка і не рухається вздовж напрямної, тобто стоїть;
- третій ділянці cd відповідає період наближення штовхача t_n , коли штовхач наближується до кулачка;
- четвертій ділянці da відповідає період ближнього стояння штовхача $t_{b.c}$, коли штовхач знаходиться в крайньому ближньому положенні від кулачка.

Сума усіх періодів руху вихідної ланки буде дорівнювати повному

періоду обертання кулачка:

$$t_v + t_{d.c} + t_n + t_{\bar{b}.c} = T, \quad (4.281)$$

Кути повороту кулачка, що визначають відповідні періоди руху штовхача, називають *фазовими кутами*: $\varphi_v, \varphi_{d.c}, \varphi_n, \varphi_{\bar{b}.c}$.

Звичайно, що

$$\varphi_v + \varphi_{d.c} + \varphi_n + \varphi_{\bar{b}.c} = 2\pi,$$

а тому кут $\varphi_{\bar{b}.c}$ переважно не задається.

Кут повороту кулачка, який дорівнює сумі фазових кутів, називається *робочим кутом* профілю:

$$\varphi_p = \varphi_v + \varphi_{d.c} + \varphi_n. \quad (4.282)$$

На профілі кулачка також можна виділити чотири характерні ділянки, які визначаються: зростаючим радіусом r , дугою максимального радіуса r_{max} , спадним радіусом і дугою мінімального радіуса r_0 .

Кожній з цих ділянок відповідає *центральний кут профілю* або *профільний кут* кулачка. Профільні кути, на відміну від фазових, позначені штрихом: $\varphi'_v, \varphi'_{d.c}, \varphi'_n, \varphi'_{\bar{b}.c}$.

В кулачкових механізмах фазові кути і кути профілю кулачка можуть збігатись (в центральних кулачкових механізмах), а можуть і не збігатись (в зміщених кулачкових механізмах).

Хід штовхача для центрального кулачкового механізму можна визначити за формулою

$$s_{max} = r_{max} - r_0, \quad (4.283)$$

де r_{max}, r_0 – відповідно максимальний і мінімальний радіуси кулачка.

У зміщених кулачкових механізмах (при $e \neq 0$) ця рівність не зберігається.

24.2. Метод обернення руху

Визначимо закон руху вихідної ланки кулачкового механізму графічним способом і побудуємо діаграму переміщення його штовхача. Для цього на рис. 4.175 розглянемо кулачковий механізм зі зміщеним штовхачем [13].

Скористаємось *методом обернення руху (методом інверсії)*, який дозволяє досить просто визначити відносне положення ланок механізму, без повторного викреслювання кулачка.

Суть методу зводиться до того, що відносний рух ланок не зміниться, якщо всьому механізму надати додаткове обертання із від'ємною кутовою швидкістю $-\omega_1$ навколо центра O .

Отже кулачок стане нерухомим, а штовхач разом із його напрямною почне обертатись навколо центра O із від'ємною за величиною кутовою швидкістю $-\omega_1$.

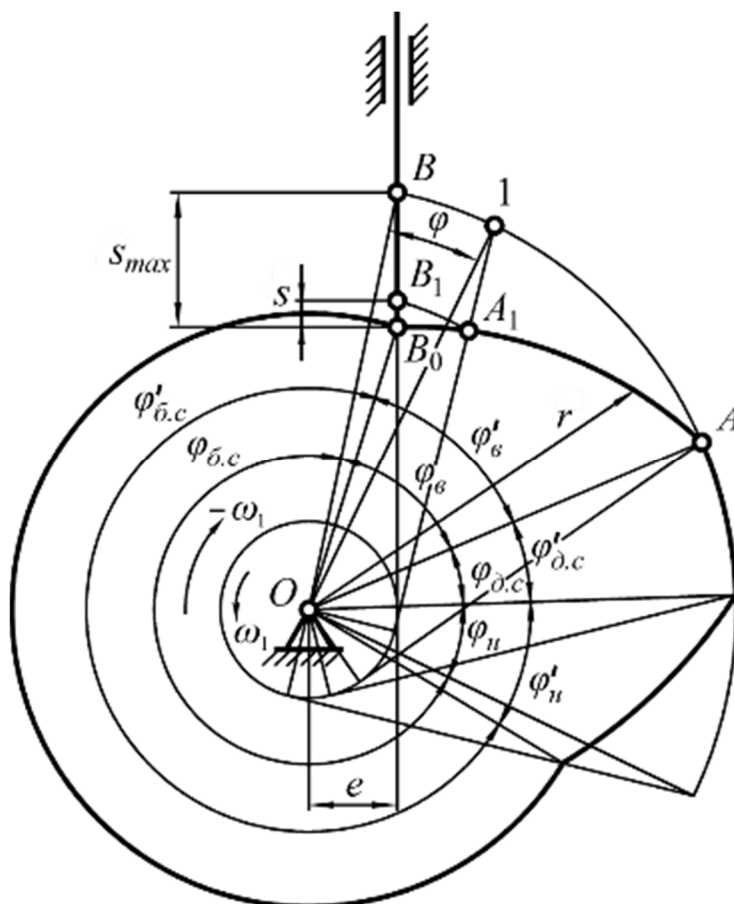


Рис. 4.175

У такому випадку визначення переміщення s штовхача значно спроститься.

Для цього відкладемо фазові кути, а точки поділу пронумеруємо відповідно до напрямку оберненого руху.

За початкове положення приймемо положення, при якому вістря штовхача (точка B) займає крайнє нижнє положення B_0 .

Знайдемо хід штовхача s для деякого поточного кута повороту кулачка φ .

Відкладемо цей кут φ від радіуса OB , який відповідає початку

віддалення штовхача. В результаті одержимо точку I , із якої проведемо дотичну до кола радіуса e .

Далі знайдемо точку A_1 перетину дотичної з профілем кулачка. З центру O радіусом OA_1 проведемо дугу і на її перетині зі штовхачем встановимо положення точки B_1 .

В результаті отримаємо відрізок $B_0B_1 = s$ (рис. 4.175), який є поточним переміщенням штовхача від точки B_0 до точки B_1 , а відрізок $B_0B = s_B = s_{max}$ буде максимальним його ходом.

Знайдені переміщення вихідної ланки дають можливість побудувати діаграму її переміщення виду $s(\varphi)$ (рис. 4.176).

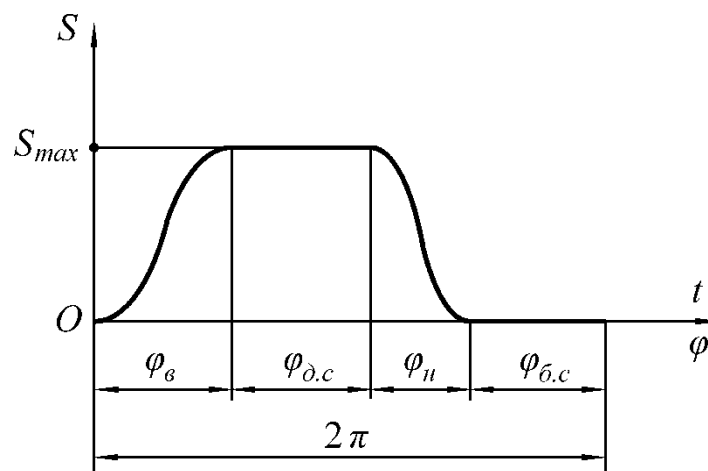


Рис. 4.176

Для цього відкладемо на осі абсцис прямокутної системи координат, у деякому масштабі μ_φ , фазові кути $\varphi_v, \varphi_{d.c}, \varphi_n$. Кут $\varphi_{b.c}$ при цьому можна відкласти без масштабу.

З точок поділу осі абсцис вздовж вертикалей в деякому масштабі μ_s відкладемо відповідні переміщення штовхача s_i .

З'єднавши плавною кривою кінці ординат, отримаємо діаграму переміщення штовхача залежно від кута повороту кулачка $s(\varphi)$.

Зрозуміло, що при обертанні кулачка із сталою кутовою швидкістю, діаграма $s(\varphi)$ є одночасно діаграмою $s(t)$, якщо від масштабу μ_φ перейти до μ_t .

За допомогою таких же нескладних побудов, за винятком незначних особливостей, можна визначити положення вихідної ланки та одержати закон руху для кулачкових механізмів інших типів.

Наприклад, у випадку механізму з роликівим штовхачем потрібно спочатку побудувати центровий профіль кулачка, після цього задача

розв'язується аналогічно до розглянутої.

Визначення законів зміни швидкостей та прискорень штовхача можна проводити також методом кінематичних діаграм шляхом їх диференціювання, або методом планів чи аналітичними методами.

Але, якщо для кулачкового механізму вже визначені положення вихідної ланки та побудований графік $s(\varphi)$ або $s(t)$, то краще застосувати метод графічного диференціювання кінематичних діаграм.

При цьому потрібно нагадати, що графічне диференціювання може привести до неточностей, особливо у випадку подвійного диференціювання при визначенні прискорень.

Застосування методу планів дає можливість отримати точніші кінематичні характеристики механізму. Для цього рекомендовано перейти до замінюючого механізму, тобто, вищу кінематичну пару IV класу замінити умовною ланкою та двома парами V класу. Тоді задача розв'язується як для звичайного важільного механізму.

Треба зауважити, що кожному окремому положенню кулачкового механізму буде відповідати замінюючий механізм зі своїми розмірами ланок.

Побудова планів швидкостей та прискорень для кулачкового механізму може бути виконана і без заміни вищих кінематичних пар нижчими, тобто, безпосередньо по дійсній схемі кулачкового механізму.

При потребі отримання точніших результатів можна скористатись аналітичними методами дослідження кулачкових механізмів як із допомогою замінювальних механізмів, так і без них.

24.3. Вибір закону руху штовхача

Для того щоб отримати в кулачковому механізмі будь-який наперед заданий закон руху його вихідної ланки, потрібно підібрати відповідний профіль кулачка. Така операція називається профілюванням кулачка і полягає у відтворенні його поверхні, що буде відповідати вибраному закону руху штовхача.

Під законом руху вихідної ланки кулачкового механізму розуміють залежність переміщення, швидкості або її прискорення від часу.

Закони руху вихідних ланок задаються, переважно, або аналітично у вигляді рівнянь, або графічно – у вигляді відповідних графіків.

Оскільки рух кулачка в більшості випадків, що зустрічаються на практиці, відповідає рівномірному обертанню, то зручніше користуватися графіками, які являють собою залежність переміщення, аналога швидкості, чи аналога прискорення від кута повороту кулачка.

Отже закон руху вихідної ланки визначається профілем кулачка і є основною характеристикою механізму.

На практиці при проектуванні кулачкових механізмів найбільшого поширення набули відносно прості, типові закони руху, деякі з котрих показані для фази віддалення штовхача на рис. 4.177: *a* – лінійний; *б* – параболічний; *в* – косинусоїдальний; *г* – синусоїдальний; *д*, *е* – такі, що описані поліномами.

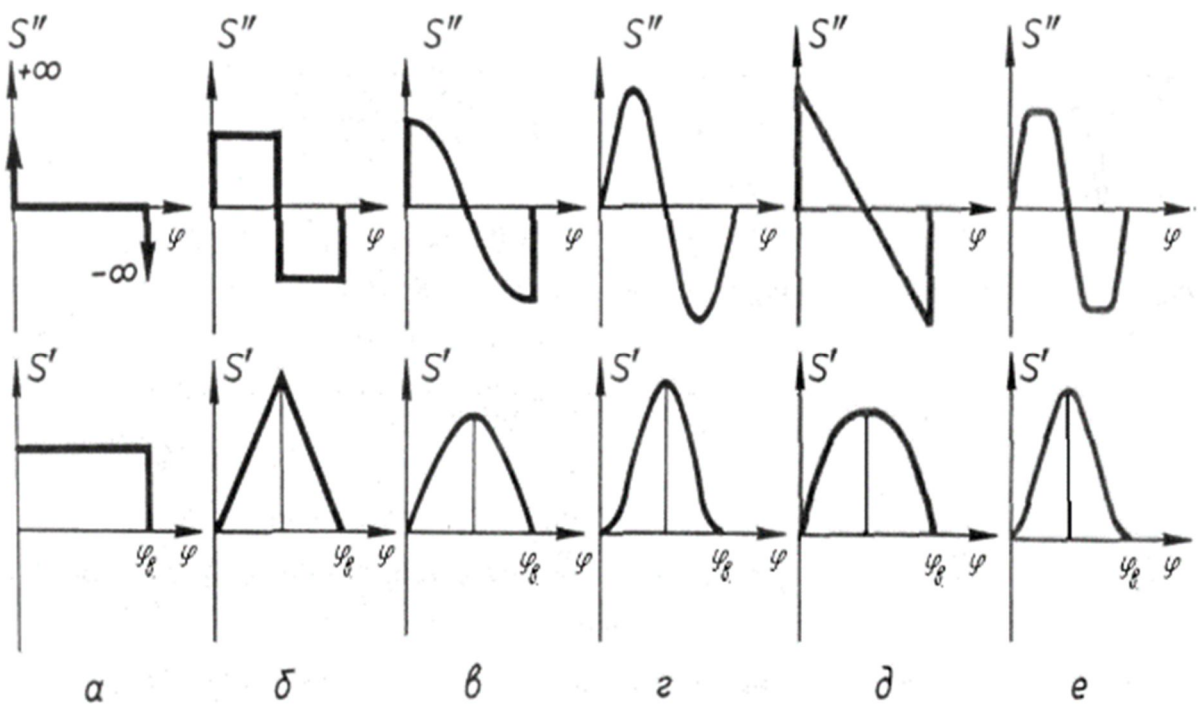


Рис. 4.177

Треба зауважити, що теоретично кулачкові механізми можуть відтворювати будь-які задані закони руху. Але на практиці можна використовувати лише ті закони руху штовхача, які забезпечують просту технологію обробки профілю кулачка та є сприятливими з точки зору динаміки роботи механізму. Адже від закону руху залежать динамічні та вібраційні властивості кулачкового механізму.

Тому вибраний закон повинен бути таким, щоб зусилля, які виникають при русі штовхача, не впливали на точність відтворення передатної функції і не зменшували довговічність всього механізму.

У цілому розрізняють закони руху вихідної ланки кулачкових механізмів трьох основних видів: *із жорсткими ударами*, *із м'якими ударами* та *без ударів*, які розглянемо нижче.

1. Рух штовхача із жорсткими ударами.

Прикладом такого руху є лінійний закон із сталою швидкістю

(рис. 4.177, а).

У цьому випадку швидкість руху штовхача на фазі віддалення буде незмінною, а прискорення дорівнюватиме нулю. Але на початку фази руху та в кінці фази швидкість буде мати розрив.

Таким чином при миттєвій зміні швидкості штовхача його прискорення, а отже, і сила інерції ланки, теоретично прямує до нескінченості, що є причиною жорстких ударів, і як наслідок веде до швидкого спрацювання механізму.

Такий закон припустимий лише в тихохідних механізмах при незначній масі штовхача для випадків, коли необхідно забезпечити сталу швидкість руху вихідної ланки.

2. Рух штовхача із м'якими ударами.

До цього випадку можна віднести закони, при яких швидкість змінюється безперервно, а графік прискорення має точки розриву.

Таке характерно для параболічних і косинусоїдальних законів руху (рис. 11.7, б, в, д).

Тут в точках розриву кривої прискорення сили інерції раптово змінюються на певну величину, що викликає так званий м'який удар.

Зрозуміло, що м'який удар буде більш безпечним, ніж жорсткий удар. Але робота механізму все одно буде супроводжуватись вібраціями, шумом та підвищеним спрацюванням.

Тому такий закон руху штовхача можна використовувати при помірних його швидкостях.

3. Рух штовхача без ударів.

До безударних законів відносяться ті, при яких прискорення є неперервною функцією (рис. 4.177, з, е).

Такі закони задаються діаграмою прискорення, яка окреслена за синусоїдою, трикутником, трапецією та ін.

При наявності плавних кривих зміни прискорення удари теоретично мають бути відсутні при умові, якщо похибки виготовлення профілів кулачків будуть незначними.

Такі закони рекомендовано використовувати для швидкохідних механізмів. Але їх недоліком є повільне зростання переміщення штовхача.

Треба зазначити, що найбільшого поширення набули профілі кулачків, які забезпечують плавну зміну прискорення штовхача, але такі кулачки виготовити складніше.

Отже як зрозуміло з вищевказаного, при проектуванні кулачкових механізмів доцільно виходити із діаграми прискорень його вихідної ланки. За цією графічною залежністю можна зробити висновки про удари, шум, вібрації кулачкових механізмів, у той час, як за допомогою діаграм переміщень важко судити про закон руху, оскільки криві переміщення

зовні мало відрізняються.

Діаграми швидкості та прискорення в таких випадках можна знайти методом графічного інтегрування.

Взагалі вибір закону руху вихідної ланки кулачкового механізму обмежується можливою точністю обробки поверхні кулачка.

В результаті погрешностей оброблений профіль кулачка може відрізнитися від теоретичного. Величини відхилень залежать від допусків на обробку.

Тому питання точності виготовлення кулачка іноді мають більше значення, ніж вибір закону руху штовхача.

Отже дуже часто передбачувані переваги того або іншого закону руху можуть бути втрачені через недостатню точність виготовлення.

Зрозуміло, що із розвитком сучасного верстатного обладнання точність обробки профілів кулачків збільшується.

Також треба зауважити, що у цілому на сьогоднішній день не існує єдиного універсального підходу до критерію, який би врахував повний комплекс факторів, що пов'язані із вибором закону руху вихідної ланки кулачкового механізму.

Тому при оцінці ефективності профілю кулачка треба встановлювати комплекс заданих умов і обмежень, враховуючи їх вагомність окремо.

24.4. Кути тиску і передачі руху

У загальному визначенні *кутом тиску* називається кут між нормаллю $n-n$ у точці дотику взаємодіючих профілів вищої кінематичної пари та вектором швидкості точки дотику вихідної ланки.

При проектуванні механізмів з вищими парами величина цього кута має суттєве значення.

Для визначення кута тиску в кулачковому механізмі розглянемо його схему рис. 4.178.

Якщо знехтувати силою тертя у вищій кінематичній парі, то можна вважати, що зусилля тиску F , з якою кулачок 1 діє на штовхач 2, спрямоване по спільній нормалі $n-n$ в точці дотику ланок. При цьому гострий кут, що утворений напрямом зусилля F тиску кулачка на штовхач і вектором швидкості штовхача і буде кутом тиску θ .

Таким чином *кутом тиску θ на ведений штовхач в кулачковому механізмі називається кут між напрямом вектора швидкості штовхача і нормаллю $n-n$ до центрального або дійсного профілю в точці дотику штовхача.*

Треба зазначити, що кут тиску є величиною змінною.

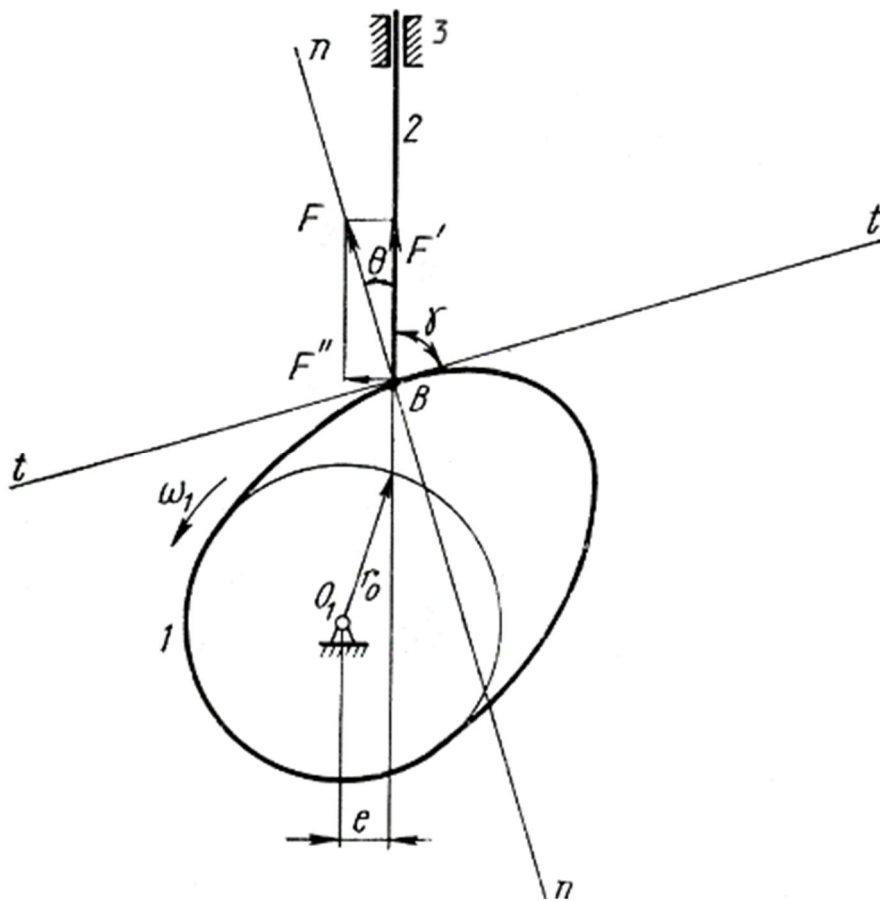


Рис. 4.178

Тоді кут, що доповнює куту тиску θ до 90° , називається *кутом передачі руху* γ .

Отже між кутом тиску θ і кутом передачі руху γ буде наступний взаємозв'язок:

$$\gamma = 90^\circ - \theta. \quad (4.284)$$

Для аналізу зусилля тиску F розкладемо його за двома складовими напрямками: по лінії руху штовхача $F' = F \cos \theta$ та перпендикулярно до неї $F'' = F \sin \theta$.

В результаті можна побачити, що складова F' є корисною силою, яка буде рухати штовхач механізму кулачка, а складова F'' буде шкідливою силою, що викликає перекошування штовхача в напрямній 3, в результаті чого збільшуються реакції та сила тертя.

Зрозуміло, що кулачковий механізм буде працювати тим краще, чим менший кут тиску.

Легко показати, що миттєвий коефіцієнт корисної дії кулачкового механізму буде зменшуватись зі зростанням кута тиску θ .

Збільшення кута тиску до критичного значення θ_k , викликає явище *заклинювання* або *самогальмування*.

Для нормальної роботи кулачкового механізму, кут тиску при будь-якому положенні кулачка має бути меншим за допустимий кут тиску $\theta_{дон}$, тобто

$$\theta < \theta_{дон}. \quad (4.285)$$

Кут тиску можна виразити через геометричні параметри кулачкового механізму як

$$\theta = \frac{s_i' - e}{s_i + \sqrt{r_0^2 - e^2}}. \quad (4.286)$$

де s_i – переміщення штовхача кулачкового механізму; s_i' – аналог швидкості штовхача, що відповідає куту φ_i повороту кулачка від початку фази віддалення; r_0 – мінімальний радіус кулачка; e – зміщення напрямної штовхача відносно центра кулачка.

При цьому треба зазначити наступне. Якщо при русі штовхача на фазі віддалення вгору вздовж напрямної, остання зміщена відносно центра кулачка праворуч, то при його обертанні проти напрямку стрілки годинника величина зміщення у виразі (4.286) буде додатною, а при обертанні за годинниковою стрілкою – від'ємною. При зміщенні напрямної ліворуч від центра обертання кулачка знак e зміниться на протилежний.

Подібною формулою виражається залежність між кутом тиску та основними параметрами коромислового кулачкового механізму.

Аналіз цих залежностей свідчить, що при вибраному законі руху та зміщенні e можна зменшити кути тиску, збільшуючи мінімальний радіус кулачка, тобто габарити механізму.

Аналогічно для коромислового кулачкового механізму кути тиску зменшуються при збільшенні мінімального радіусу кулачка r_0 і міжосьової відстані l_0 , тобто розмірів механізму.

Отже, при проектуванні кулачкових механізмів основні їх розміри - r_0 , e або r_0 , l_0 визначаються із умови *незаклинювання* механізму.

Виняток при цьому становить тарілчастий кулачковий механізм, для якого у найпоширенішому випадку тарілки, перпендикулярної до напрямної, кут тиску $\theta = 0$ і мінімальний радіус r_0 кулачка визначається із умови опуклості його контуру.

Таким чином, вибір допустимого кута тиску $\theta_{дон}$ є одним з

найважливіших питань при проектуванні кулачкових механізмів.

Від величини $\theta_{дон}$ залежить розподіл сил у механізмі, його ККД, габаритні розміри і т. ін.

При проектуванні рекомендовано приймати наступні значення допустимого кута тиску:

- для механізмів зі штовхачем $\theta_{дон} = 30^\circ \dots 40^\circ$;
- для коромислових механізмів $\theta_{дон} = 45^\circ \dots 50^\circ$

Якщо це дозволяють габарити механізмів, для зменшення втрат на тертя доцільно приймати найменші значення кута тиску.

Розглянемо, як можна визначити величину кута тиску для любого положення кулачкового механізму, якщо відомий закон руху його штовхача (рис. 4.179).

Для цього на схемі кулачкового механізму побудуємо замінюючий його механізм (рис. 4.179, а), який буде кривошипно-повзунним.

Для цього механізму побудуємо план швидкостей (рис. 4.179, б).

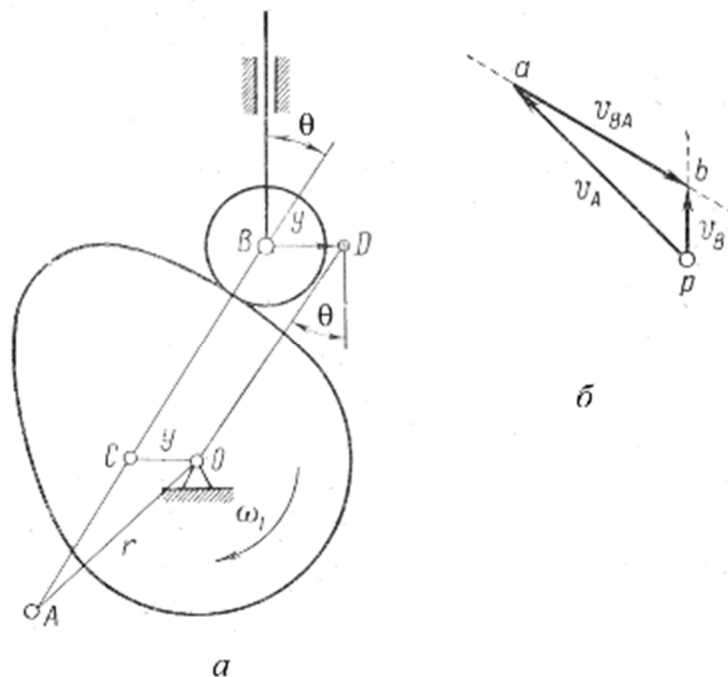


Рис. 4.179

Із центра O кулачкового механізму (рис. 4.179, а) проведемо горизонтальну лінію до перетину з лінією AB .

Точку перетину позначимо буквою C . Довжину відрізка OC

позначимо через y , а довжину відрізка $OA - r$.

Трикутник плану швидкостей Pba і трикутник ΔOAC плану положень кулачкового механізму будуть подібними, так як їх сторони будуть взаємно перпендикулярними.

В результаті будемо мати:

$$\frac{y}{r} = \frac{V_B}{V_A}, \quad (4.287)$$

де

$$V_A = \omega_1 r;$$

$$V_B = \frac{ds}{dt}.$$

Тоді із (4.287) після підстановки значень будемо мати

$$y = \frac{ds}{\omega_1 dt} = \frac{ds}{d\varphi} = s'. \quad (4.288)$$

Із отриманого виразу видно, що величину y можна визначити для любого значення кута φ , якщо задана залежність s від φ .

Відкладемо відрізок y від точки B перпендикулярно штовхачу в бік обертання кулачка і з'єднаємо його кінець з центром обертання кулачка – точкою O .

Тоді кут між лінією OD і віссю руху штовхача буде кутом тиску θ .

Щоб простежити за зміною кута тиску під час переміщення штовхача, необхідно для кожного значення кута визначити величину відрізка y і відкласти його від відповідної точки B .

При підйомі штовхача відрізок y треба відкладати вправо, а при його опусканні – вліво.

З'єднавши відрізки плавною кривою (рис. 4.180), можна отримати діаграму $s(s')$.

За допомогою отриманої діаграми $s(s')$ тепер можна визначити кут тиску для любого значення кута φ .

Для цього потрібно вибрану точку, наприклад точку D , з'єднати із центром O .

Із наведеної діаграми зрозуміло, що найбільші кути тиску θ_{max} будуть в тих положеннях, коли промінь OD буде дотичний до кривої (рис. 4.180).

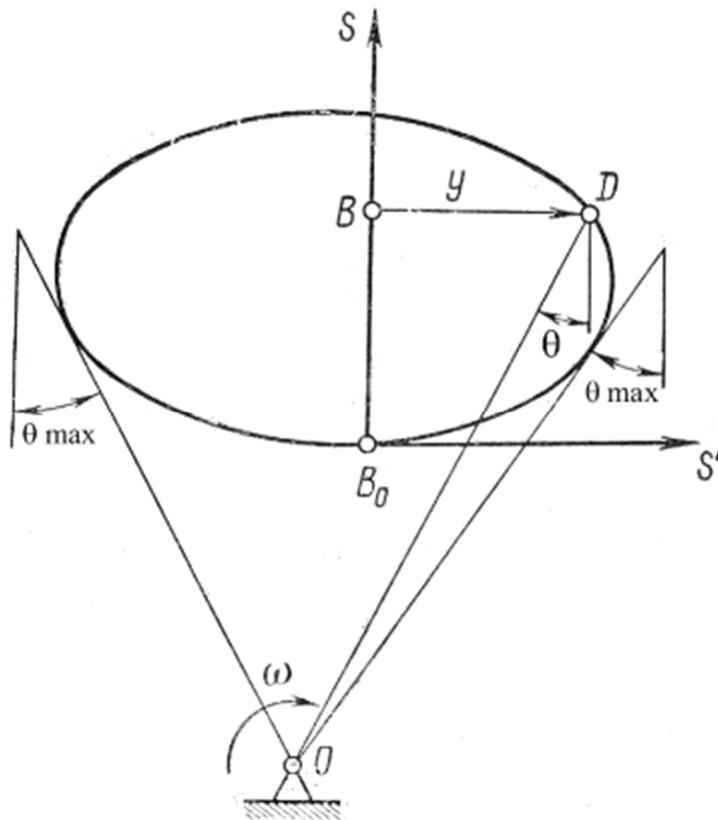


Рис. 4.180

24.5. Визначення мінімального радіуса кулачка

Аналітичний, а також графічний методи визначення основних розмірів кулачкових механізмів із вістрям або роликовим штовхачем полягає у розв'язку рівняння (4.286) відносно шуканих параметрів при умові допустимих кутів тиску $\theta < \theta_{дон}$.

Розглянемо задачу графічного визначення r_0 мінімального радіуса кулачка для механізму, який показано на рис. 4.178.

Зауважимо, що у випадку механізму з роликовим штовхачем усі побудови будуть аналогічними, але в результаті буде знайдений радіус r_0 не дійсного, а центрового профілю кулачка.

Спочатку на основі попередньо побудованих діаграм $s(\varphi)$, $s'(\varphi)$ шляхом виключення параметра φ , побудуємо діаграму $s(s')$, забезпечивши чисельно однакові масштаби по обох осях, $\mu_s = \mu_{s'}$ (рис. 4.181).

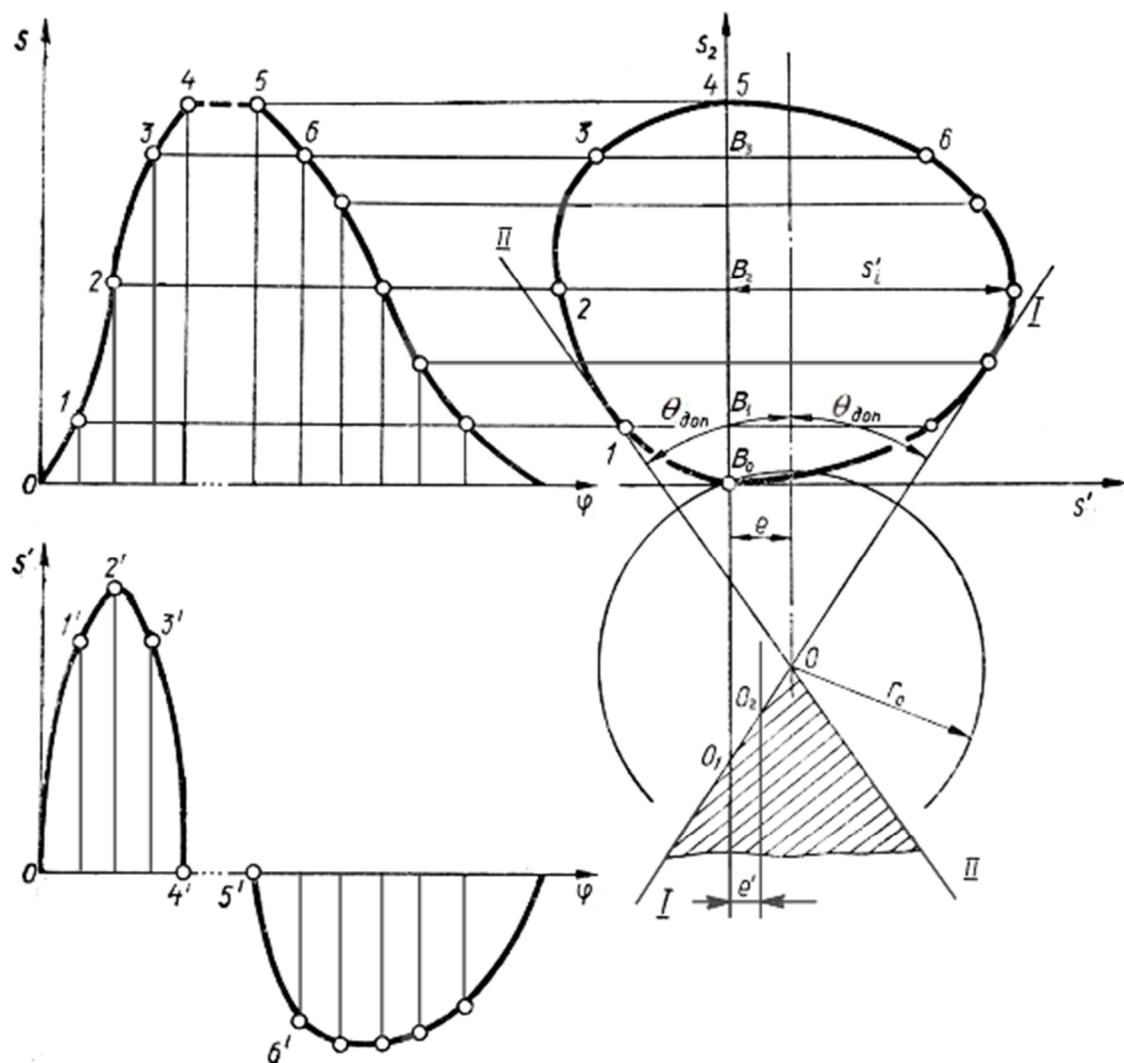


Рис. 4.181

Для цього проводимо осі прямокутної системи координат. По осі ординат, в масштабі μ_s , відкладемо від початку координат, згідно з графіком $s(\varphi)$ переміщення штовхача s_i (точка B_0 відповідає нижньому початковому положенню штовхача, лежить на колі мінімального радіуса).

Через отримані точки B_0, B_1, B_2, \dots , проводимо прямі, які паралельні осі абсцис та відкладаємо на них у масштабі $\mu_{s'}$, відрізки, що дорівнюють s'_i . Причому для фази віддалення ці відрізки відкладаються за напрямком обертання кулачка, а для фази опускання – навпаки.

Сполучивши плавною кривою кінці відкладених відрізків, отримаємо криву $s(s')$.

Далі проведемо до знайденої кривої $s(s')$ дотичні прямі $I-I$ та $II-II$ під

кутами θ_{don} до осі ординат.

Таким чином, центр обертання кулачка може знаходитись у будь-якій точці заштрихованої області між дотичними *I-I* та *II-II*. У цьому випадку завжди буде забезпечене виконання умови за припустимим кутом тиску $\theta < \theta_{don}$.

Треба відмітити, що точка *O* перетину дотичних визначає мінімально можливе значення радіуса r_0 , тобто, найменші розміри кулачка та всього механізму, при певному значенні величини зміщення e .

Якщо величина зміщення є заданою (тобто $e = e'$), то проводять пряму у-у на відстані e' від осі ординат в масштабі μ_s .

У цьому випадку мінімальний радіус r_0 буде дорівнювати відріzkу A_0O_2 у прийнятому масштабі.

У випадку центрального кулачкового механізму, коли $e = 0$, центр обертання кулачка буде знаходитись на продовженні лінії руху штовхача, нижче точки O_1 , а найменший радіус дорівнюватиме

$$r_0 = \mu_s \cdot A_0O_1. \quad (4.289)$$

Зазначимо, що в разі жорстких обмежень габаритних розмірів кулачкового механізму треба звернути увагу на те, що можливість заклинювання штовхача із силовим замиканням вищої кінематичної пари має місце лише на фазі віддалення, оскільки при опусканні штовхач рухається під дією пружини або сили тяжіння. У цьому випадку при нереверсивному режимі роботи дотичну *I-I* проводять через точку B_0 .

В кулачкових механізмах із геометричним замиканням вищої кінематичної пари умова $\theta < \theta_{don}$ повинна виконуватись як на фазі віддалення, так і на фазі опускання.

Аналогічна геометрична інтерпретація рівняння (4.286) використовується також і для графічного визначення габаритних розмірів кулачкових механізмів із коромислом.

Наприкінці треба зауважити, що для кулачкових механізмів із плоским штовхачем при будь-якому положенні кулачка кут тиску змінюватись не буде і є сталою величиною. Зокрема, у найпоширенішому випадку, коли тарілка перпендикулярна до осі штовхача, кут тиску дорівнює нулю: $\theta = 0$.

Отже, при проектуванні таких механізмів кут тиску не може бути покладений в основу визначення мінімального радіуса r_0 кулачка.

У цьому випадку ставлять додаткову вимогу: профіль кулачка має бути опуклим. Лише при виконанні цієї умови кожна точка профілю зможе торкнутися тарілки штовхача.

Профіль кулачка буде опуклим, якщо радіус кривизни профілю в

будь-якій точці буде більшим за нуль: $\rho > 0$.

В протилежному випадку кулачок буде вгнутий і робота механізму буде супроводжуватись ударами.

Цю умову можна виразити за допомогою наступної нерівності

$$\operatorname{tg}45^\circ > \frac{-s_i''}{s_i + r_0}, \quad (4.290)$$

де s_i – переміщення штовхача кулачкового механізму; s_i' – аналог прискорення штовхача, що відповідає куту φ_i повороту кулачка від початку фази віддалення; r_0 – мінімальний радіус кулачка.

При цьому треба зауважити, що в кулачкових механізмах з плоским штовхачем застосування ексцентриситету є недоцільним, оскільки це приводить до збільшення габаритів механізмів.

24.6. Побудова профілю кулачка

Побудова профілю кулачка є однією із основних задач синтезу кулачкових механізмів.

При цьому розрізняють кінематичний та динамічний синтез кулачкових механізмів.

При кінематичному синтезі значення r_0 мінімального радіуса кулачка задається, в той час як при динамічному значення r_0 – треба попередньо визначити, користуючись, залежно від виду механізму, припустимим кутом тиску, або із умови опуклості профілю.

Розглянемо послідовність побудови профілю кулачка, якщо задані: схема кулачкового механізму; максимальний хід та закон руху вихідної ланки; фазові кути; напрям обертання кулачка; мінімальний радіус кулачка.

В основі графічного методу побудови профілю кулачка, як і при визначенні закону руху штовхача, лежить метод обернення руху.

24.6.1. Центральний кулачковий механізм

Спочатку розглянемо центральний кулачковий механізм, який представлено на рис. рис. 4.182, *a*.

При цьому будемо вважати, що згідно із певним заданим законом руху попередньо вже побудована діаграма $s(\varphi)$ переміщення штовхача (рис. 4.182, *б*).

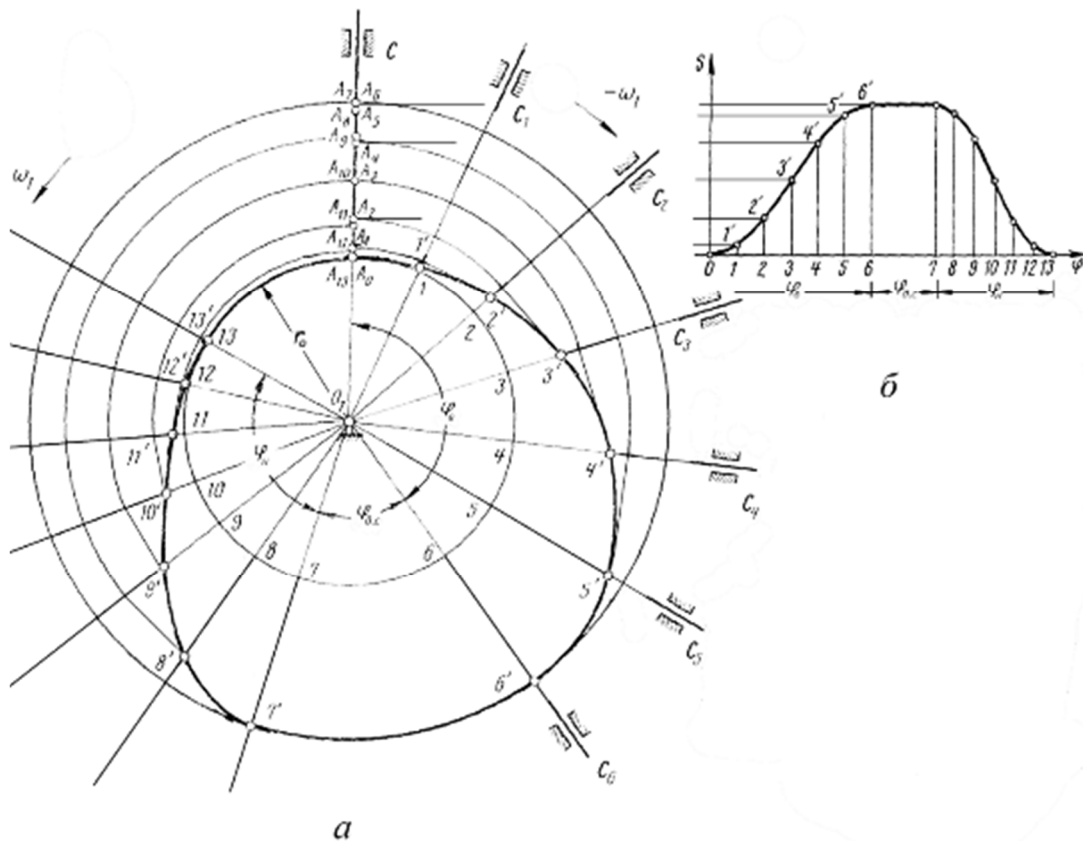


Рис. 4.182

Побудову профілю кулачка будемо виконувати у наступній послідовності:

1. Із довільної точки O_1 вважаючи її за центр обертання кулачка, проведемо коло радіусом r_0 , у масштабі μ_s (рис. 4.182, а). Треба зазначити, що масштаб μ_s зручніше прийняти рівним масштабу діаграми переміщення.

2. Із точки O_1 проведемо вертикальну пряму O_1C , яку приймемо за лінію руху штовхача. Тоді точка перетину прямої O_1C з колом r_0 визначить положення точки A_0 вістря штовхача, яка відповідатиме початку фази віддалення φ_0 (нижньому початковому положенню вістря штовхача).

3. Користуючись діаграмою переміщень, розмітимо переміщення точки A вістря штовхача в його абсолютному русі. В результаті отримаємо точки $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{12}$. Зауважимо, що для зручності побудов бажано, щоб вісь абсцис діаграми переміщень проходила через точку A_0 . Тоді ординати $1-1', 2-2', 3-3', \dots$ діаграми переміщення безпосередньо будуть визначати миттєві положення вістря штовхача.

4. Від прямої O_1C в напрямі, який буде протилежним напрямку обертання кулачка, відкладемо фазові кути φ_ϵ , $\varphi_{\delta.c}$, φ_n . Розділимо кути φ_ϵ , φ_n на стільки ж рівних частин, на скільки вони поділені на діаграмі переміщення штовхача (4.182, б).

5. Через точки поділу $1, 2, 3, \dots, 13$ на колі r_0 з центру обертання кулачка проведемо промені, які в оберненому русі будуть визначати положення осі штовхача (4.182, а).

6. Перенесемо миттєві положення точки $A-A_1, A_2, A_3, \dots, A_{12}$ на відповідні промені, і отримаємо на них точки $1', 2', 3', \dots, 13'$ – положення точки A вістря штовхача у відносному русі. Інколи для знаходження даних точок рекомендується безпосередньо з діаграми $s(\varphi)$ відкласти від кола r_0 , на відповідні промені, переміщення штовхача $1-1', 2-2', 3-3', \dots, 13-13'$.

7. З'єднавши ці точки плавною кривою, одержимо частину профілю кулачка на кутах φ_ϵ та φ_n . Профілі кулачка, що відповідають фазовим кутам $\varphi_{\delta.c}$ та $\varphi_{\delta.c}$, будуть окреслені дугами кіл, які описані з точки O_1 відповідно радіусами O_1b' та O_113' .

Таким чином, отримаємо дійсний профіль кулачка.

У випадку, якщо штовхач закінчується роликком, то отриманий профіль буде центровим.

Використовуючи центровий профіль як геометричне місце центрів ролика у відносному русі, можна побудувати його дійсний профіль.

Дійсний профіль може бути представлений як огинаюча кіл зовнішніх поверхонь ролика в процесі його переміщення відносно теоретичного профілю (рис. 4.183).

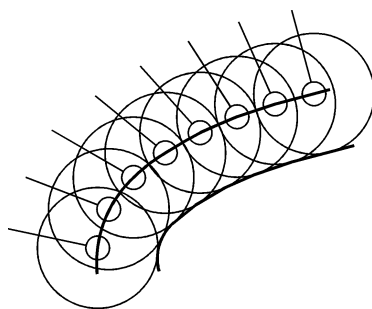


Рис. 4.183

Отже цей профіль одержимо, якщо проведемо із точок центрального профілю огинаючу криву дуг із радіусом ролика r_r (рис. 4.184, б).

24.6.2. Дезаксіальний кулачковий механізм із роликковим штовхачем

Розглянемо зміщений кулачковий механізм із роликівим штовхачем, який представлено на рис. рис. 4.184, б

Тут також будемо вважати, що згідно із заданим законом руху попередньо вже побудована діаграма $s(\varphi)$ (4.184, а).

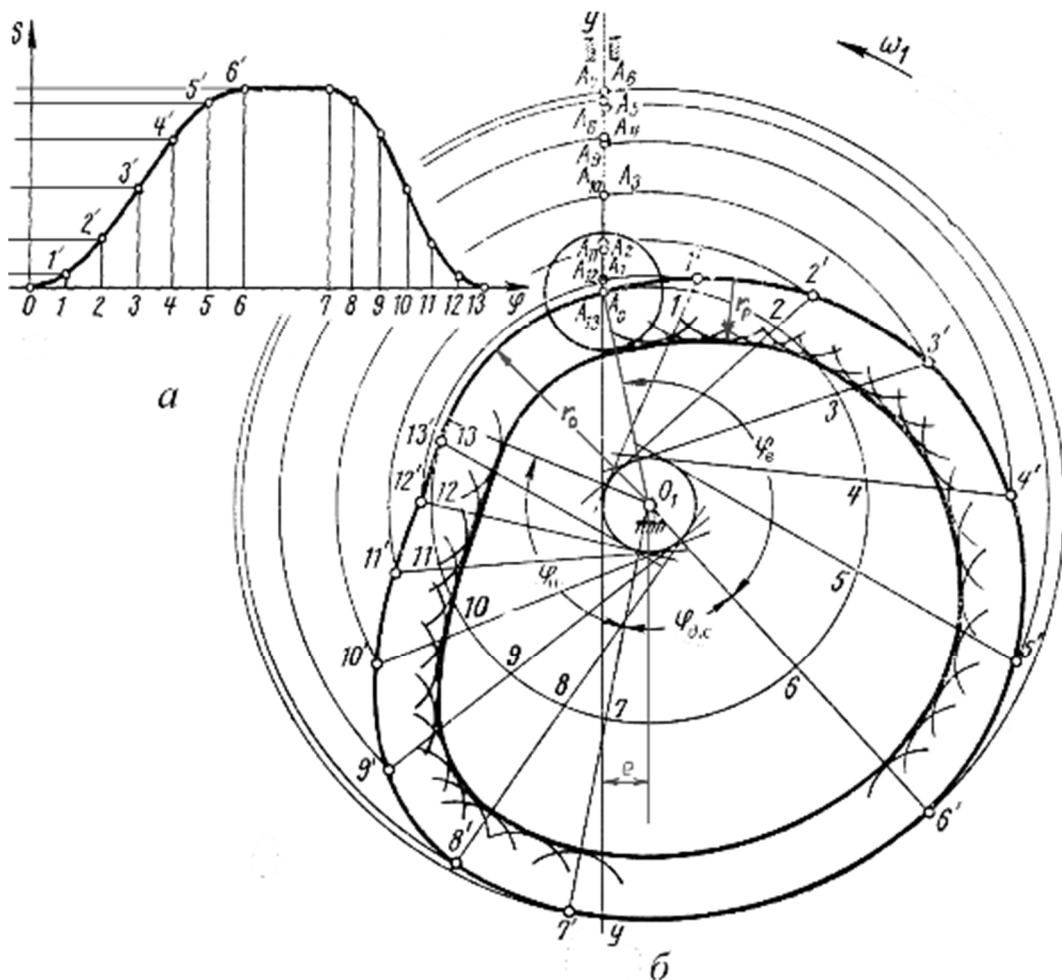


Рис. 4.184

Побудову профілю кулачка у цьому випадку виконуємо у наступній послідовності.

1. Із довільної точки O_1 проведемо у вибраному масштабі μ_s кола радіусами r_0 і e (рис. 4.184, б).

2. По дотичній до кола радіуса e проводимо вертикальну лінію переміщення штовхача згідно з її положенням на схемі механізму. Точка перетину A_0 цієї прямої із колом r_0 є положенням центра ролика і

відповідає початку фази віддалення φ_e (нижньому початковому положенню осі ролика).

3. Від точки A_0 вздовж лінії $y-y$ відкладемо переміщення штовхача A_1, A_2, A_3, \dots , згідно графіка переміщень $s(\varphi)$. Точка A_6 визначить положення центра ролика, що відповідає закінченню фази віддалення φ_e .

4. З'єднаємо точку A_0 з центром обертання кулачка O_1 . Від прямої A_0O_1 в напрямку, який буде протилежним напрямку обертання кулачка, відкладемо фазові кути $\varphi_e, \varphi_{\partial.c}, \varphi_n$. Розділимо кути φ_e, φ_n на стільки ж рівних частин, на скільки вони поділені на діаграмі переміщення штовхача (4.184, а).

5. Через точки поділу 1, 2, 3, ... 13, на колі r_0 проведемо дотичні до кола радіуса e , як ряд послідовних положень ліній переміщення штовхача у відносному русі навколо кулачка (рис. 4.184, б).

6. Із центра O_1 радіусами $O_1A_1, O_1A_2, O_1A_3, \dots$ проведемо концентричні дуги до перетину з відповідними дотичними. Точки перетину 1', 2', 3', ... будуть являти собою положення ролика у відносному русі. З'єднавши отримані точки плавною кривою, одержимо центровий профіль кулачка.

7. Проведемо ряд дуг радіусом r_p із центрами, що розміщені на центровому профілі кулачка. В результаті отримаємо дійсний профіль кулачка як огинаючу криву цих дуг.

24.6.3. Вибір радіуса ролика штовхача

Для забезпечення руху штовхача кулачкового механізму за заданим законом необхідно, щоб радіус його ролика був менший за радіус кривизни в будь-якій точці центрального профілю кулачка

$$r_p \leq 0,7\rho_{min}, \quad (4.291)$$

де ρ_{min} – мінімальний радіус кривизни центрального профілю кулачка.

Порушення цієї умови робить неможливим відтворення заданого закону руху вихідною ланкою кулачкового механізму.

Крім цього, для забезпечення мінімальних контактних напружень у вищій кінематичній парі кулачкового механізму радіус ролика також обмежують умовою

$$r_p \leq 0,4r_0, \quad (4.292)$$

де r_0 – мінімальний радіус центрального профілю кулачка.

При проектуванні кулачкових механізмів радіус ролика приймають

таким, щоб забезпечити виконання обох наведених умов.

При цьому конкретне значення радіуса ролика потрібно вибирати відповідно до стандартного ряду лінійних розмірів.

Треба зазначити, що при неправильному виборі радіуса ролика може статися так, що він не буде обертатися і введення його в кінематичний ланцюг не призведе до зменшення втрат на тертя.

Більш докладно методика розрахунку радіуса ролика надається в літературі [20, 27, 32].

24.6.4. Кулачковий механізм із тарілчастим штовхачем

Тарілчастий штовхач (рис. 4.185, б) в кулачковому механізмі застосовують у тих випадках, коли конструктивно не вдається встановити на цей штовхач ролик.

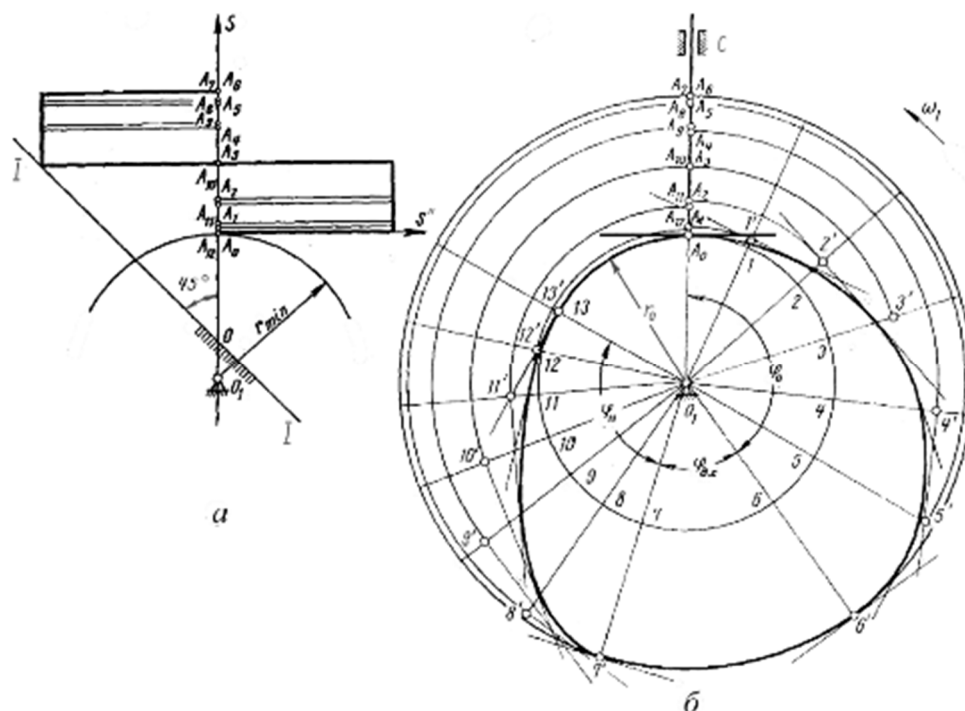


Рис. 4.185

З метою зменшення зношування профіль кулачка обкочується по тарілці штовхача, який повертається навколо своєї осі.

Як вже було зазначено вище, при синтезі кулачкових механізмів з тарілчастим штовхачем мінімальний радіус кулачка визначається за умови опуклості його профілю.

Для цього, на основі попередньо побудованих графіків $s(\varphi)$ і $s''(\varphi)$ треба побудувати графік $s''(s)$.

Отже по осі ординат треба відкласти значення s переміщення

штовхача, а через отримані точки паралельно осі абсцис - відповідні значення s'' аналога його прискорення (рис. 4.185, *a*).

Усі побудови потрібно виконувати у єдиному прийнятому масштабі μ_s .

В результаті, сполучивши плавною кривою знайдені точки, можна отримати діаграму $s''(s)$.

До цієї діаграми, на ділянці, що відповідає максимальному від'ємному значенню під кутом 45° до осі ординат проведемо дотичну $I-I$.

Таким чином, згідно з виразом (4.286), за центр обертання кулачка може бути вибрана будь-яка точка, що розміщена нижче за точку перетину дотичної з віссю ординат.

Тоді, в даному випадку для точки обертання O_1 (рис. 4.185, *a*), мінімальний радіус кулачка r_0 визначиться довжиною відрізка A_0O_1 , а величину r_0 можна знайти згідно із (4.289) як

$$r_0 = \mu_s \cdot A_0O_1.$$

При цьому побудова профілю кулачкового механізму з тарілчастим штовхачем виконується аналогічно до описаної вище побудови профілю центрального кулачкового механізму зі штовхачем, включаючи послідовність усіх дій до пункту 7.

Різниця є лише в останньому пункті проектування.

7. Через точки $1', 2', 3', \dots, 13'$ треба провести перпендикуляри до відповідних променів (рис. 4.185, *b*).

Дані перпендикуляри будуть являти собою послідовні положення площини тарілки штовхача у відносному русі навколо кулачка.

Дійсний профіль кулачка з тарілчастим штовхачем можна уявити як огинаючу криву послідовних положень тарілки в її оберненому русі із кутовою швидкістю $-\omega_1$.

Отже, побудувавши огинаючу криву отриманих перпендикулярів, знайдемо дійсний профіль кулачка.

Запитання для самоконтролю

1. Який механізм називають кулачковим?
2. Що називають кулачком?
3. Назвіть переваги і недоліки використання кулачкових механізмів.
4. Як поділяють кулачкові механізми?
5. Що називають дійсним і центровим профілем кулачка?
6. Назвіть етапи проектування кулачкового механізму.
7. Назвіть чотири характерних ділянки профілю кулачка. Які їх ознаки?
8. Що таке робочий кут профілю кулачка? Чому він дорівнює?
9. Що таке профільні кут кулачка? Яким він буває?
10. В чому полягає принцип інверсії кулачкового механізму? Навіщо його застосовують?
11. Що таке профілювання кулачка? Як задаються закони руху штовхача?
12. Які бувають закони руху штовхача? В чому їх характерні особливості?
13. Дайте визначення кута тиску і кута передачі руху в кулачковому механізмі. Який між ними взаємозв'язок?
14. В чому полягає явище заклинювання або самогальмування в кулачковому механізмі? Як його уникнути?
15. Як визначають мінімальний радіус профілю кулачка? Наведіть послідовність побудов графічним методом.
16. Наведіть приклад графічної побудови профілю кулачка в центральному кулачковому механізмі.
17. Наведіть послідовність графічної побудови профілю кулачка в дезаксіальному кулачковому механізмі із роликівим штовхачем.
18. Із яких умов вибирають радіус ролика штовхача кулачкового механізму?
19. Наведіть послідовність графічної побудови профілю кулачка в кулачковому механізмі із тарілчастим штовхачем.

РОЗДІЛ 25. ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИ СИНТЕЗУ МЕХАНІЗМІВ

25.1. Етапи синтезу механізмів

Під синтезом механізмів будемо розуміти проектування кінематичної схеми механізму, яка б задовольнила заданим законам руху його ланок, його структурі і умовам роботи.

В результаті розрізняють декілька етапів синтезу механізмів.

Перший етап синтезу – *структурний*. На цьому етапі на підставі довідкових даних про окремі типи механізмів визначається структура і проектується структурна схема механізму. При цьому вибирається кількість ланок механізму, число, вид і рухомість його кінематичних пар, загальна ступінь рухомості та формула будови. На схемі вказується нерухомі і рухомі ланки, кінематичні пари і їх взаємне розташування.

Другий етап синтезу – *параметричний*. На цьому етапі після визначення структури механізму визначаються деякі сталі параметри (геометричні та інші) його вибраної схеми, які можуть забезпечити заданий закон руху або задану передаточну функцію. Цей етап є етапом безпосереднього створення кінематичної схеми механізму (етапом визначенні сталих параметрів кінематичної схеми).

Третій етап синтезу – *динамічний*, під яким розуміють узгодження кінематичних і структурних параметрів механізму із діючими під час його роботи силовими параметрами. Останнім часом задачі динамічного синтезу, коли треба врахувати динамічні властивості механізму, стають все актуальнішими.

З'ясуємо, які ж сталі параметри визначають кінематичну схему механізму. До таких параметрів у першу чергу належать довжини ланок, положення точок та їх траєкторії, значення швидкостей і прискорень, маси ланок, моменти інерції і т. ін.

Незалежні один від одного сталі параметри схеми механізму, що визначаються при параметричному синтезі механізмів, називаються *параметрами синтезу*. Параметри синтезу бувають *вхідні* і *вихідні*.

Вхідні параметри задаються технічним завданням на синтез.

Вихідні параметри визначаються під час проведення синтезу механізмів.

До вхідних параметрів можна віднести закон руху вихідної ланки механізму, а вихідними параметри будуть геометричні розміри ланок, маси ланок, моменти інерції і т. ін.

Отже при синтезі механізму повинні виконуватись умови, які задовольняють багатьом, часто суперечливим умовам, що пов'язані із призначенням механізму, його технологічними і експлуатаційними

показниками.

Але з усіх умов звичайно бажано вибрати одну основну умову. Всі інші умови тоді вважаються додатковими.

Основна умова подається у вигляді деякої функції через вхідні і вихідні параметри синтезованого механізму, дослідження якого дозволяє знайти оптимальні значення вихідних параметрів даного механізму [32]. Прикладом основної умови може бути умова отримання необхідної траєкторії руху поршня компресора, або досягнення ним заданої швидкості.

Функція, у вигляді якої подається основна умова синтезу називається *цільовою або критерієм оптимізації*.

Наприклад, цільова функція кривошипно-повзунного механізму поршневого компресора може бути представлена у вигляді різниці дійсної і заданої швидкостей точки B поршня.

$$U(x) = \text{mod}(\overline{V}_B - V_B), \quad (4.293)$$

де V_B – задана швидкість повзуна, \overline{V}_B – дійсна швидкість повзуна.

Оптимізація - це визначення вихідних параметрів синтезу із умови мінімуму цільової функції при виконанні прийнятих обмежень.

Усі відомі методи оптимізації можна поділити на три групи пошуку: випадковий, спрямований та комбінований. Треба також відмітити, що при синтезі механізмів необхідно враховувати такі фактори як конструктивні обмеження на довжини ланок механізму; на кути тиску в кінематичних парах; на прокручування ланок. Більш докладно з методами синтезу механізмів та методами їх оптимізації можна ознайомитись в спеціалізованій літературі.

Таким чином, структурний, параметричний і динамічний синтез механізмів дозволяє отримати кінематичну схему механізму, яка відповідає основним вимогам його роботи.

Така задача є складною і багатопараметричною, де число вихідних параметрів механізму, як правило, більше числа вхідних параметрів синтезу.

Отже частиною параметрів при проведенні синтезу механізмів доводиться варіювати.

Тому на сьогоднішній день розроблені такі методи оптимального проектування як:

- градієнтні методи;
- методи випадкового пошуку;
- мінімізація поступків,
- комбіновані методи,
- автоматизація проектування.

25.2. Синтез плоских важільних механізмів

Плоскі важільні механізми, ланки яких утворюють обертальні або поступальні кінематичні пари, отримали широке застосування в сучасному машинобудуванні.

Перевагою таких механізмів є їх висока технологічність виготовлення, можливість використання в шарнірних з'єднаннях підшипників кочення і тому невеликий знос дотичних поверхонь, довговічність і надійність в роботі.

Крім цього, для таких механізмів з нижчими кінематичними парами (на відміну від кулачкових механізмів), не потрібні пружини і інші пристрої, що забезпечують постійне замикання стичних ланок.

Переважає більшість шарнірно-важільних механізмів перетворюють рівномірний рух ведучої ланки в нерівномірний рух веденої і відносяться до механізмів з нелінійною функцією положення веденої ланки.

За принципом використання важільні механізми діляться на передавальні і направляючі механізми.

Передавальні механізми – це механізми, які забезпечують задану функціональну залежність між положеннями вхідної та вихідної ланок механізму або між їх переміщеннями.

Направляючі механізми – це механізми, в яких точка на ланці, що здійснює складний рух, рухається за певною заданою траєкторією.

Метою синтезу важільних механізмів є визначення їх розмірів і положень вхідної ланки, які найкраще задовольняють заданим умовам і забезпечують найліпшу (оптимальну) комбінацію якісних показників.

Отже проектування важільних механізмів являє собою складну комплексну задачу, розв'язок якої має декілька етапів.

Перший етап проектування – це вибір кінематичної схеми механізму, яка б забезпечила необхідний вид і закон руху.

Другий етап – це розробка геометричних, кінематичних параметрів і конструктивних форм механізму, що забезпечать його працездатність.

Третій етап проектування – це розробка технологічних і техніко-економічних показників механізму, що проектується.

У теорії механізмів переважно розглядаються і вирішуються задачі першого і другого етапу проектування, за допомогою яких розробляються кінематичні схеми механізмів і їх геометричні параметри для відтворення необхідного виду і закону руху.

Проектування механізму починається з вибору його структурної схеми. Схему вибирають із довідкових матеріалів або розробляють на основі аналізу видів руху, які повинні бути реалізовані.

Тому цей етап проектування (або синтезу) є *структурним*.

На цьому етапі треба, хоча б у першому наближенні, оцінити кінематичні, силові та інші характеристики механізму, що заздалегідь зробити важко, а часто і неможливо.

На практиці вибір структурної схеми проводиться найчастіше на основі попереднього досвіду, знань або інтуїції проектувальника.

При величезній кількості кінематичних схем важільних механізмів такий підхід до їхнього вибору на сьогоднішній день виправданий. Але далеко не завжди проектувальник може вибрати вдалу структурну схему. Тому питання про раціональний вибір структури механізму порівняно складний, оскільки він важко піддається формалізації і недостатньо освітлений у літературі по теорії механізмів.

На другому етапі після вибору структурної схеми механізму визначають геометричні розміри ланок механізму і його кінематичні параметри. При цьому враховуються, в основному, геометричні функції, які повинен реалізувати механізм. Цей етап проектування (синтезу) є етапом *параметричного синтезу* (або *метричного синтезу*), коли визначають відносні розміри ланок механізму (відношення геометричних розмірів ланок до розміру однієї з них) – геометричні параметри механізму.

Структурний і параметричний синтез дозволяють отримати кінематичну схему, що відповідає вимогам до механізму, який проектується. Геометричні функції, які повинен реалізувати спроектований механізм, мають відтворюються ним з певною точністю. Ця точність визначається умовами роботи механізму, обумовленими технологічним процесом.

На підставі аналізу спроектованого механізму по ступеню точності відтворення заданої функції визначають, чи придатний отриманий механізм до роботи, або необхідно провести коректування попередніх етапів проектування зі зміною вихідних даних. Якщо повторні розрахунки також не дають задовільних результатів, то необхідно перейти до іншої структурної схеми механізму.

Таким чином, проектування механізму є складною, багатопараметричною задачею, причому число вихідних параметрів механізму, як правило, більше числа вихідних даних, а тому частиною параметрів доводиться варіювати.

Синтез плоских важільних механізмів з нижчими парами може вестись як аналітичними методами, так і графічно. Вибір методу значною мірою залежить від тих умов, які поставлені при проектуванні (зокрема, точність). Графічні методи наочніше і простіше з точки зору їх засвоєння, але недостатньо точні. Але останніми роками широкий розвиток отримали аналітичні методи синтезу механізмів.

25.3. Структурний синтез механізмів

На початковій стадії проектування плоских важільних механізмів при виборі їх кінематичної схеми спершу треба звернути увагу на чотириланкові механізми, які утворені на основі чотириланкового шарнірного кінематичного ланцюга.

Так, на рис. 4.186. представлені основні види елементарних плоских важільних механізмів:

- *a* – чотириланковий кінематичний ланцюг;
- *б* – кривошипно-коромисловий механізм;
- *в* – двохкривошипний механізм;
- *г* – двохкоромисловий механізм;
- *д* – механізм паралелограма, при умові $l_1=l_3, l_2=l_0$;
- *е* – механізм антипаралелограма з протилежним напрямком обертання кривошипів, при умові $l_1 < l_0$;
- *ж* – механізм антипаралелограма з однаковим напрямком обертання кривошипів, при умові $l_1 > l_0$.

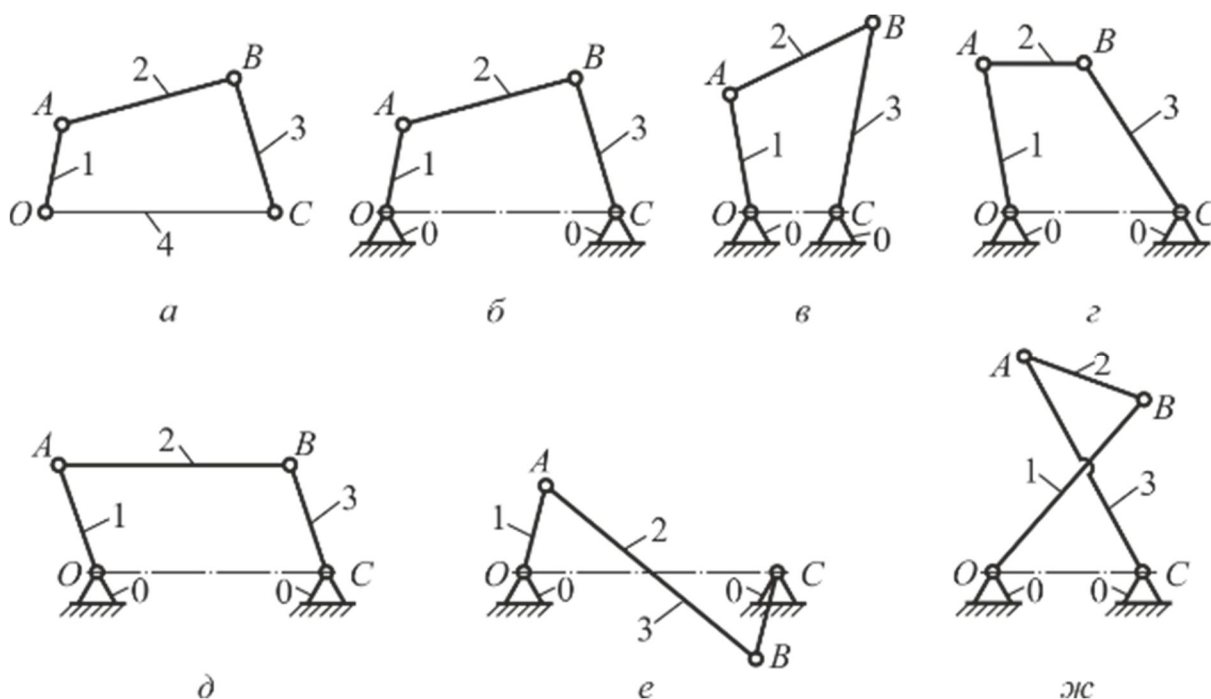


Рис. 4.186

- *a* Також можна скористатися чотириланковим ланцюгом з трьома обертальними і однією поступальною кінематичними парами.

На рис. 4.187. показані центральні чотириланкові важільні механізми з трьома обертальними і однією поступальною кінематичними парами:

- *a* – аксіальний кінематичний ланцюг;
- *б* – кривошипно-повзунний механізм;
- *в* – кривошипно-шатунний механізм, при умові $l_1 < l_2$;
- *г* – коромисло-повзунний механізм, при умові $l_1 > l_2$;
- *д, е* – кривошипно-кулісний механізм з хитною кулісою, при умові $l_1 < l_0$;
- *ж, з* – кривошипно-кулісний механізм з обертовою кулісою, при умові $l_0 < l_1$.

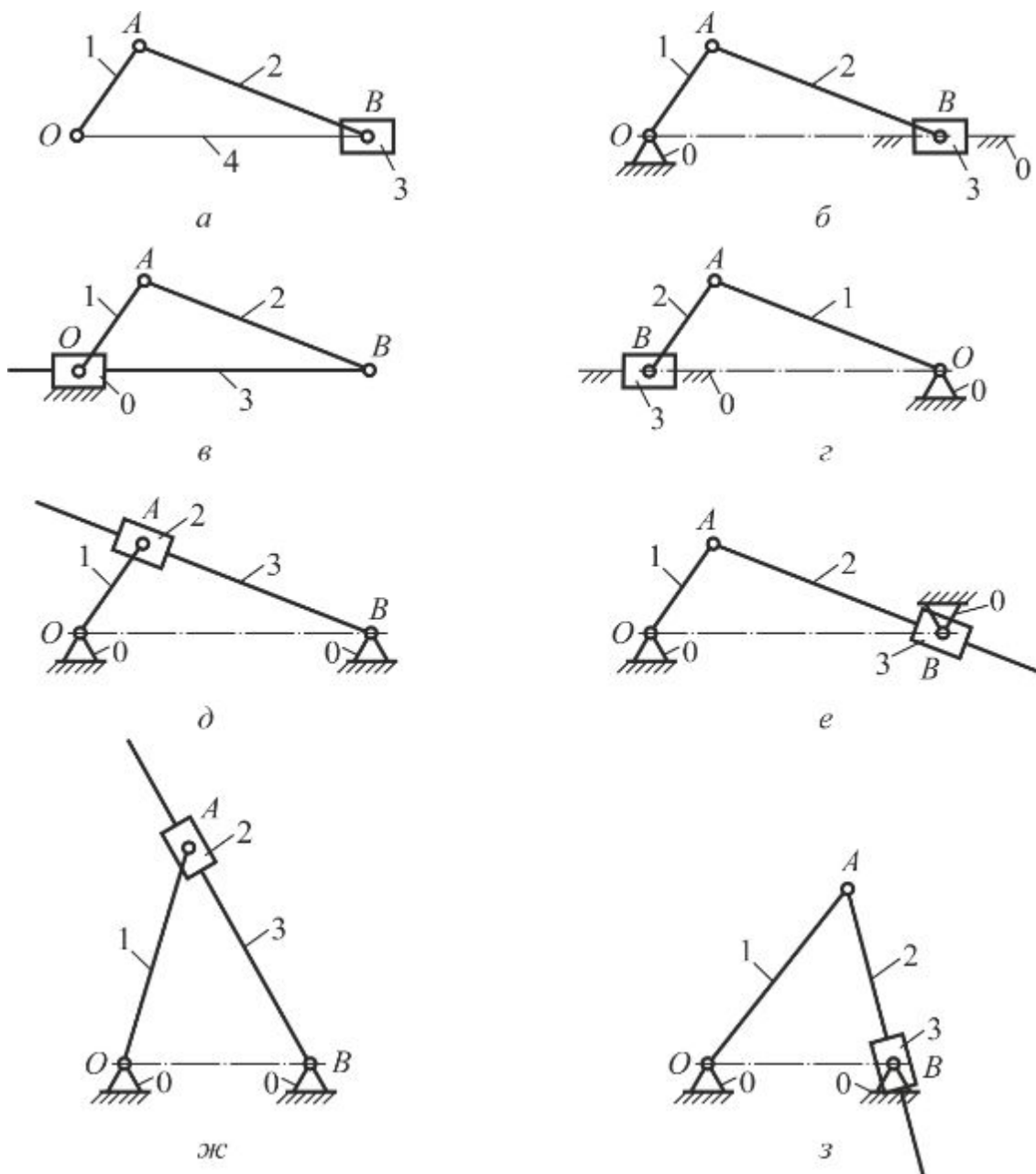


Рис. 4.187

Якщо ж поставлену задачу неможливо вирішити за допомогою чотириланкового механізму, кінематичну схему треба ускладнити, застосовуючи шестиланкові або складніші механізми, які можуть бути утворені приєднанням до однієї з ланок двохповідкової групи. Більш докладні відомості про кінематичні та конструктивні модифікації наведених механізмів можна знайти в роботах [5, 27, 33, 36].

25.4. Параметричний синтез механізмів

Параметричний синтез механізму полягає у визначенні сталих параметрів його кінематичної схеми, в залежності від умов завдання синтезу. Такі умови можуть бути різними за змістом, але аналітично вони є умовою в'язей, що накладаються на параметри механізму, і мають форму рівнянь або нерівностей.

У ряді випадків умови синтезу формулюються у вигляді вимоги мінімізації функції параметрів механізму, що отримує невід'ємні значення.

Крім параметрів механізму при такому синтезі фігурують і задані величини або функції (наприклад, задана функція переміщення механізму, заданий кут розмаху вихідної ланки або заданий припустимий кут тиску).

До параметричного синтезу приступають після визначення структури механізму – вибору його структурної схеми.

Як вже було зазначено раніше, метою параметричного синтезу механізму є визначення розмірів механізму, положень його вхідної ланки і кінематичних параметрів, які найкраще задовольняють заданим умовам і забезпечують оптимальну комбінацію якісних показників.

У якості обмежень або якісних показників при синтезі використовуються такі як

- умова повертаємості ланок, коли забезпечується для вхідної і (або) вихідної ланок можливість повороту на кут більш ніж 360° ;

- припустимий кут тиску, коли кут між вектором рушійної сили, із якою діє ведуча ланка на ведену, і вектором швидкості точки її прикладання не повинен перевищувати допустимих значень з метою запобігання неприпустимо великих реакцій в кінематичних парах, низького ККД механізму та можливості його заклинювання;

- конструктивні обмеження на габарити механізму, коли розміри ланок повинні забезпечувати вписування механізму в задані габаритні розміри;

- точність забезпечення заданого закону руху або заданих положень ланок механізму.

При цьому найбільшого поширення набули наступні задачі параметричного синтезу механізмів:

- синтез за декількома заданими положенням вихідної ланки (задача позиціонування), коли не важливо, за яким законом відбувається перехід із одного положення в інше;

- синтез за заданим законом руху вихідної ланки: за функцією положення, за першою або другою передатними функціями;

- синтез за конкретними кінематичними параметрами: середньою швидкістю вихідної ланки, коефіцієнтом нерівномірності середньої швидкості;

- синтез за умовою передачі сил між ланками механізму – за припустимим кутом тиску.

В залежності від вхідних параметрів розрізняють наступні види параметричного синтезу:

- геометричний, коли задані окремі положення ланок або траєкторії окремих точок;

- кінематичний, коли задані деякі швидкості, прискорення або їх співвідношення;

- динамічний, коли задані діючі сили або накладені деякі обмеження на динамічні параметри.

До методів синтезу відносяться:

а) експериментальний, коли шляхом експериментальних досліджень підбираються розміри ланок для реалізації заданої траєкторії;

б) графічний за допомогою графічних побудов;

в) аналітичний шляхом аналітичних розрахунків.

Можливі також різні комбінації вищевказаних видів і способів параметричного синтезу.

Вибір видів і методів синтезу значною мірою залежить від тих умов, які поставлені при проектуванні. Зокрема, важливою умовою є необхідна точність запроєктованого механізму.

Графічні методи наочніше і простіше з точки зору їх засвоєння, але недостатньо точні.

В останні роки широкий розвиток отримали аналітичні методи синтезу механізмів з нижчими кінематичними парами, а автоматизовані проектувальні комплекси на сьогоднішній день визначають технічний рівень та розвиток сучасного техніки.

25.5. Умова існування кривошипа в чотириланкових механізмах

Важливою характеристикою шарнірного чотириланкового механізму є прокручування його ланок (наявність у ньому кривошипа), що залежить від співвідношення довжини ланок.

Розглянемо плоский шарнірний чотириланковий механізм $OABC$ (рис. 4.188, *a*) і з'ясуємо, за яких умов ланка OA буде його кривошипом.

Позначимо довжини рухомих ланок механізму і довжину його нерухомої ланки (стійки) наступним чином:

$$OA = a; AB = b; BC = c; CO = d.$$

Ланка OA буде кривошипом цього механізму, коли, зможе зробити повний оберт навколо нерухомої точки O .

Нехай ланка OA обертається за напрямком годинникової стрілки. Тоді точка A кривошипа OA повинна послідовно пройти декілька положень, у тому числі, крайнє ліве A_1 та крайнє праве A_2 положення, коли довжини OA_1 і OA_2 будуть знаходитись на одній прямій (рис. 4.188, *б*).

Рис. 4.188

Використовуючи послідовно три положення механізму (два крайніх і одне між ними), можна отримати наступні умови по сумі довжин ланок:

Для положення A_1 :

$$a + b = c + d \tag{4.294}$$

Для положення A_2 :

$$a - b = c + d \tag{4.295}$$

Для положення A_3 :

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

(4.296). , (4.296)
-
(4.294), (4.295)

, , , (4.297)

. (4.298)

. (4.299)

, . (4.300)

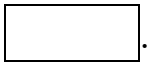
(4.299 4.300 ,

).

4.299

-

4.191



(4.301)

-

-

-

.

-

4.192

.

(4.302)

).

25.6

(4.303)

, —

().

4.193

(4.304)

, —

;

.

—

. (4.305)

. (4.306)

.

25.7

,

).

1.

2.

3.

4.

5.

,

6.

.

,

.

(4.307)

:

,

.

(4.308)

—

25.8

.195).

.195

1 2 1 2

1 2, 1 2

.

.

[20].

).

,

,

,

—

25.9

4.197

-

,

,

(4.309)

.

-

-

25.10

-

).

, , .

25.11

- -
- -
- -

,).

.

.

.

.

—

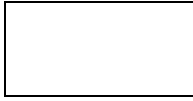
.

,

,

,

.



.

).

[22

[1, 22, 34].

20.

21.

22.

23.

24.

?

25.

26.

27.

28.

29.

30.

31.

32.

33.

34.

35.

V.

26

—

—

.

.

).

26.

()

3.

-

-

5.

-

6.

(5.1)

, — , , —
5.2).

1.

—

() .

2.

—

,

3.) .

—

,

4.

) .

—

) .

—

)

—

—

， ， 5.4).

:

(5.2)

:

.

.

—

—

5.5).

,

,

,

(5.3)

,

—

(5.4)

(5.5)

(5.6)

(5.7)

- 36.
- 37.
- 38.
- 39.
- 40.
- 41.

- 42.
- 43.
- 44.

- 45.

—

—

5.6).

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

.

:

,

,

.

.

.

—

.

.

.

.

(5.8)

—

—

27.2

’ —

.

’ , 5.7).

, , .

,

.

.

:

·
:
·

’ ’ ’

):

·

):

·

):

·

):

·

—

27.3

).

,

,

.

(5.9)

,

(5.10)

,

(5.11)

.

(5.12)

-

(5.8

.

:

.

(5.13)

.

(5.14)

.

— , —
 []
 :

— —
 []
)

(5.15)

—

:

.

.

.

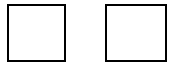
—

:

.

,





—

,

).

—

),

—

.

,

,

,

,

.

$$, \quad (\quad), \quad (5.17)$$

$$, \quad (\quad). \quad (5.18)$$

27.5.

$$, \quad (5.19)$$

.

(5.20)

.

(5.21)

.

(5.22)

.

:

,

(5.23)

— — — — —

—

46.

47.

48.
49.
50.

51.
52.

5.10).

(5.24)

5.12).

).

(5.25)

(5.26)

“ ”,

— — .

, (5.27)

—

, (5.28)

—

),

—

—

.

,

,

,

,

5.13).

5.13).

(5.29)

—

,

5.15).

, (5.30)

—

,

,

, (5.31)

—

—

, — 240...320

—

—

.

5.16).

—

5.16).

—

5.17).
650

,

.

.

:

.

,

-

5.18).

, :

,

, ,

—

.

—

.

.

.

,

5.19).

.

,

.

.

— .

, (5.32)

. (5.33)

).

(5.34)

):

(5.35)

)

,

.

—

.

:

.

:

(5.36)

.

,

.

. (5.37)

. (5.38)

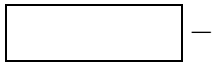
, (5.39)

, (5.40)

. (5.41)

, (5.42)

, (5.43)



.

(5.44)

.

(5.45)

,

(5.46)

—

—

.

,

(5.47)

—

.

))

53.
54.
55.
56.
57.
58.
59.
60.
61.
62.
63.
64.

“ ”?

5.22).

.

:

,

.

5.23 .

，
—
·





1.

.

4.

.

6.

—

5.24)

.

.

),
).

5.24.

5.25)

.

.

:

),

.

):

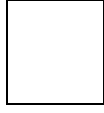
,

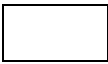
):

.

5.25).

5.26)





—

): ,

): .

): ,

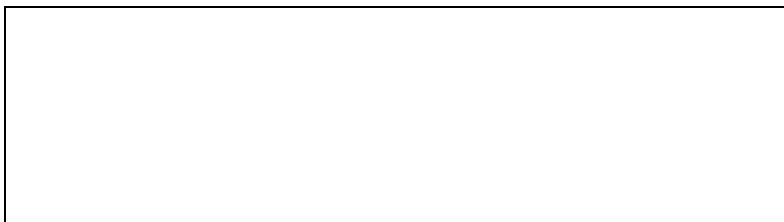
): ,

): .

5.26).

.

5.27).



,

.

.

:

),

.



):

,

): .

:

),

):

),

.

,

,

.

): ,

): .

5.27.

5.28)

.

,

.

,

.

:

),

.

:

),

),

,

()
): ,

): ,

()

): ,

): .

5.27.

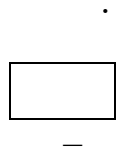
,

()

5.29)

.

,



): .

): ,

): .

): ,

): .

,

).

-

-



-

q



-

.

5.30).

, , ...

,

)

.

5.31).

(5.48)

(5.49)

5.32).

5.32).

.

,

(5.50)

.

(5.51)

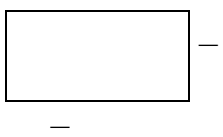
.

.

,

,

(5.52)



.

(5.53)

—

,

—

.

,

,

.

.

.

.

(5.54)

,

(5.55)

,

(5.56)

—

:

.

(5.57)

:

.

(5.58)

.

(5.59)

)

5.33).

)



,

(5.60)

—
 —)
 :
 ,
 □
 .
 ,
 (5.34).

,

.

5.35).



,

—

.

—

.

5.35

—

,

.



(5.61)

, (5.62)

—

,

.

5.36.

—

(5.63)

65.

66.

67.

68.

69.

70.

71.

72.

73.

74.

75.

76.

.

—

, ,

,

“ ” ’

•
•

•

•

,

(5.64)

—

—

•

.

(5.65)

,

(5.66)

—

—

•

.

(5.67)



.

(5.68)

,

.

,

.

(5.69)

.

(5.70)

,

.

%.

,

,

(5.71)

—

,

—

.

.

—

:

, (5.72)

— , □ —
, —

, (5.73)

—

III IV

III

, (5.74)

IV

. (5.75)

. (5.76)

—

III IV



(5.77)

, (5.78)

— —
—

, (5.79)

, (5.80)

—



—

,

(5.81)

—

77.

78.

79.

80.

81.

82.

83.

84.

85.

86.

87.

88.

VI.

31.

—

)

.

:

.

.

.

.

—

;

—

,

—

,

,

.

(,).

-

-

-

();

-

);

-

-

-

3 ... 15

-

—

.

-

-

—

—

—

—

,

—

—

50

700

—,

—

,

—

.

,

-

—

—

—

—

,

—

—

,

.

,

- 89.
- 90.
- 91.
- 92.
- 93.

94.
95.
96.
97.
98.

?

•
,

.

,

,

32.1

—

) 253).

:

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

-

15,

,

-

,

$$, \quad (6.1)$$

$$, \quad -$$

$$, \quad (6.2)$$

$$, \quad -$$

$$, \quad (6.3)$$

$$, \quad -$$

32.2

$$, \quad -$$

-

6.5

(6.4)

— , —

.

—

.

:

.

(6.5)

—

(6.4))



.

,

,

.

:

.

-

-

-

, (6.6)

, (6.7)

-

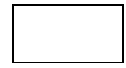
-

,

,

.

'



-

'

'

'

99. , , ,
100. , , ,
101. , , ,
102. , , ,
103. , , ,
104. , , ,
105. , , ,
106. , , ,
107. , , ,

33

,

.

.

33.1

.

6.6)

(.

,

—

.

—

.

—

6.7

—

,

—

—

—

—

,

(6.8)

(6.9)

(6.10)

1.

2.

,

.

.

.

—

6.10).

33.2

$$\dots, \tag{6.11}$$

1.

6.11).

$$\dots, \tag{6.12}$$

—

—

—

.

.

(6.13)

2.

6.12).

.

, (6.14)

—

3.

6.13).

.

.

(6.15)

3.

,

.

,

.

(6.16)

.

(6.17)

:

,

(6.18)

,

(6.19)

—

—

— —
—
33.3
—

1 : 100

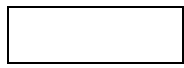
— :
 —
 —
 — :
 —
 —
 —

·
 ·

6.16) : , (6.20)

— — — — —
 — — — — —
 , — · — —

, (6.21)



6.16).

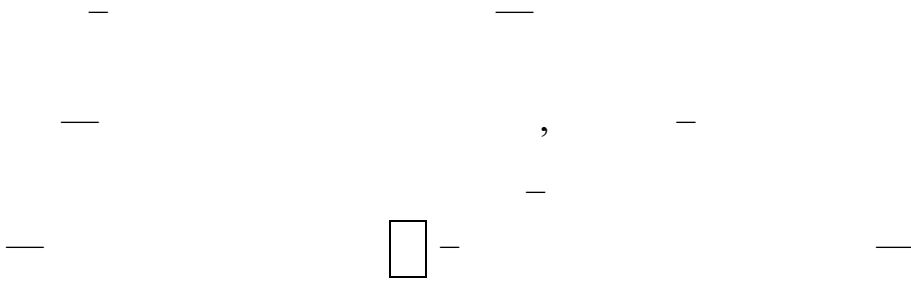
33.4

6.17).
(

—
—

:

, (6.22)



, (6.23)



, (6.24)



33.5

—

6.18

732

— *1:10, 1:6* *1:4.* *1:100, 1:40* *1:30,*

:

—
—
—
—
—
—
—

,

.

.

.

6.19,

.

1:50

.

34.

34.1

1.

— —

3

-

—

—

6.20

—

.

1. , .
2. : ,
,
3.)
.

, - , ,

: . ,

,

.

:

.

(6.25)

.

—

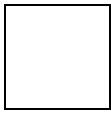
—

.

.

(6.26)

(



.

,

.

(6.27)

.

(6.28)

.

.

(6.29)

,

6.21).

.

.

.

,

(6.30)

,

(6.31)

—

—

—

,

(6.32)

—

34.2

)

—

.

—

—

—

—

—

—

—

—

;

—

—)
—)



(6.33)



, (6.34)

—

—

—

—

.

.

(6.35)

,

—

.

.

—

:

.

(6.36)

(21)

,

(6.37)

—

,

—



—

:

:

, (6.38)

—

—

—

,

,

.

(6.39)

—

—

—

—

—

,

.

(6.40)

(6.39)

(6.41)

—

—

—

—

34.3

6.23).

;

;
;

.

;

;

—

;

.

—

:

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

—

)

;

.

.

;

;

).

— — —

· · ·

).

· · ·
- , - -40 ·

6.25

— — ·

(6.42)

(6.43)

(

(

:

:

,

.

(6.44)

34.4

.

—

;

— 2...4 ;

(6.27).

—

—

—

.

—

;

—

—

;

—

—

:

—

—

—

—

(—

(

(

6.27).

20

(

,

,

—

—

—

,

—

,

—

).

,

,

,

—

.

,

(6.46)

—

.

:

,

(6.47)

- 124.
- 125.
- 126.
- 127.
- 128.

,

- 129.
- 130.
- 131.
- 132.
- 133.
- 134.

135.

136.

- 137.
- 138.
- 139.
- 140.
- 141.

35.

35.1

);

758

—
—
—
—
—
—
—
—
—
—

);

.

—

.

();

();

();

—

—

, —

,

.

,

,

,

.

35.2

.

(

6.30).

6.31)

,

.

6.31).

—

6.32

,

.

.

6.33).

35.3

6.34).

6.34).

(6.47)

(6.48)

. (6.49)

. (6.50)

. (6.51)

. (6.52)

. (6.53)

. (6.54)

.

.

.

. (6.55)

>

—

35.4

— , — , —

). — — —

35.5

(6.35).

(6.36).

).

,

(6.56)

— —

.

(6.57)

— — — — —

,

(6.58)

,

—

.

(6.59)

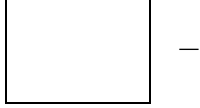
$$\dots, \quad : \quad (6.60)$$

$$\dots, \quad \cdot \quad (6.61)$$

$$\dots, \quad , \quad - \quad (6.62)$$

$$\dots, \quad - \quad (6.63)$$

(6.64)



—

,

—

.

6.37)

,

.

),

.

60...70

,

,).

,)

6.38),

().

().

6.38:

, (6.65)

—

, (6.66)

. (6.67)

.

. (6.68)

:

, (6.69)

. (6.70)

,

(6.71)

.

(6.72)

.

(6.73)

.

,

,

.

(6.74)

—

6.39):

—

.

:

$$, \quad (6.75)$$

$$, \quad (6.76)$$

— , $= 20^\circ$.



).

6.41):

, (6.77)

, (6.78)

, (6.79)

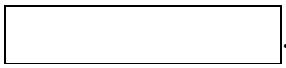
$$\dots, \quad (6.80)$$

$$\dots), \quad \dots), \quad \dots$$

$$\dots, \quad (\dots$$

$$\dots, \quad (6.81)$$

$$\dots, \quad \dots),$$



$$\dots. \quad (6.82)$$

$$\dots. \quad (6.83)$$

$$\dots, \quad \dots,$$

$$\dots, \quad (6.84)$$

$$\dots,$$

,

(6.85)

,

(6.86)

,

(6.87)

.

(6.88)

.

(6.89)

6.42).

— , —

:

.

.

(6.90)

.

(6.91)

,

(6.92)

—

- 142.
- 143.
- 144.
- 145.

146.

147.

?

148.

149.

150.

151.

152.

153.

154.

155.

156.

36.1

-

-

-

-

-

-

—

-

:

—

,

—

120);

;

—

—

—

:

—

—

;

—

—
—

.

—

.

6.44)

· (6.93)

·

:

· (6.94)

· (6.95)

·

,

· (6.96)

,

, (6.97)

·

:

, (6.98)

. (6.99)

6.45) :

. (6.100)

6.45):

, (6.101)

. (6.102)

'

. (6.103)

:

,

, —

'

,

, —

.

, (6.104)

—

, —

,

6.46).

:

.

.

(6.105)

,

.

(6.106)

$$\begin{aligned} & \text{,} \\ & \text{:} \\ & \text{,} \end{aligned} \quad (6.107)$$

$$\begin{aligned} - & & - \\ & \text{:} \\ & \text{,} \end{aligned} \quad (6.108)$$

$$\begin{aligned} - & & - \\ & \text{:} \\ & \text{,} \end{aligned} \quad (6.109)$$

$$\begin{aligned} & \text{'} \\ & \text{:} \\ & \text{:} \end{aligned} \quad \text{,} \quad \text{.}$$

157.

158.

159.

160.

161.

162.

163.

164.

165.

166.

37.1.

6.4 .

— : — :

— . —

— —

— ; — — — .

— — .

, 35, 40,

.

.

.

—

.

,

2

,

—

’ . 6.49, ’ ,
2 ⁴ 3. 1,

— 5

1

2 ,

4

—

4

3.

2

5.

:

—

—

—

—

:

—

—
—
—
—

.

—
—
—
—
—
—

0,995 :

— :
—);
—
— ,

— 2, 6.51)
— 3, 4

—

—

30...40 %

-

-

-

2°

— —
—
, ,

, (6.110)

— , (6.111)

, — ,

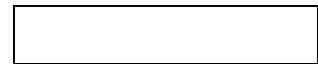
>1

(

(6.112)

:

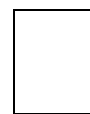
(6.113)



),

(6.114)

).





·
·
—

$$- \quad , \quad (6.115)$$

$$, \quad (6.116)$$

—
—

:
))

,
)
—
)

·
(

1.

2.

3.

4.

6.55

;

,

30°

(

).

—

l

2,

—

.

,

20...40 %

).

—

—

,

.

~

).

,

,

167.
168.
169.
170.

171.

172.

173.
174.

175.
176.
177.
178.

179.
180.
181.



3 4

, , , ,

1).

1 2,

1.

1 2 3 4

-

1)

P_1, P_2, P_3, P_4

	I			IV	V	VI	VII	VIII		
P_1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
P_2	14	18	20	10	4	2	16	8	6	12
P_3	6	10	2	20	16	18	12	4	8	14
P_4	20	8	16	4	2	14	10	18	12	6

$$= \quad , \quad ,$$

$$, \quad - \quad , \quad -$$

$$= \boxed{} + \boxed{} + \boxed{} + \boxed{} .$$

$X \ Y.$

$$-P, P, P, P \quad -P, P, P, P, , , ,$$

-
:

$$\begin{aligned}
 &= (\quad - \quad) / \quad \cdot 100 \%, \\
 \square &= (\square - \quad) / \quad \cdot 100 \%, \\
 &= (\quad - \quad) / \quad \cdot 100 \%,
 \end{aligned}$$

-

,

Y, , , -

, , -

—

2).

	1, 11, 21
	2, 12, 22
	3, 13, 23
	4, 14, 24

	5, 15, 25
	6, 16, 26
	7, 17, 27
	8, 18, 28
	9, 19, 29

10, 20, 30

		<i>b</i>		,
1 - 10	4,0	6,0	8,0	30
11 - 20	10,0	6,0	2,0	45
21 - 30	4,0	4,0	6,0	60

q

				V	V	V	V	V		
	0,5	1	1,5	2	2,5	2,5	2	1,5	1	0,5
	8	14	10	16	12	14	18	16	10	20
	4	6	8	10	12	5	7	9	11	3

1.

$Y-$

2.

(

-

3.

$$Q = q \cdot l$$

l

Q

q

:

$$= 0,$$

$$(\quad) = 0,$$

$$(\quad) = 0,$$

$X \quad Y$

7.



Y

$$\square = 0.$$

$$: 0 = 0.$$

—

—

3).

5

= 6,0

-

-

		, °		, °		, °		, °
1 - 10	4	0	6	30	8	60	10	90
11 - 20	10	90	8	60	6	3	4	0
21 - 30	6	30	4	0	10	90	8	60

1, 11, 21	2, 12, 22
------------------	------------------

3, 13, 23

4, 14, 24

5, 15, 25

6, 16, 26

7, 17, 27	8, 18, 28
9, 19, 29	10, 20, 30

	<i>D</i>	<i>-</i>	<i>E</i>	<i>-</i>
	<i>H</i>	<i>D</i>	<i>-</i>	<i>-</i>
	<i>-</i>	<i>E</i>	<i>-</i>	<i>D</i>
V	<i>-</i>	<i>-</i>	<i>E</i>	<i>H</i>
V	<i>E</i>	<i>-</i>	<i>H</i>	<i>-</i>
V	<i>-</i>	<i>D</i>	<i>H</i>	<i>-</i>
V	<i>-</i>	<i>H</i>	<i>-</i>	<i>D</i>
V	<i>E</i>	<i>H</i>	<i>-</i>	<i>-</i>
	<i>-</i>	<i>-</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
	<i>-</i>	<i>E</i>	<i>D</i>	<i>-</i>

1.

—

3.

‘

‘

:

$$= 0, \quad () = 0,$$

$$= 0, \quad () = 0,$$

$$= 0, \quad () = 0.$$

:

-

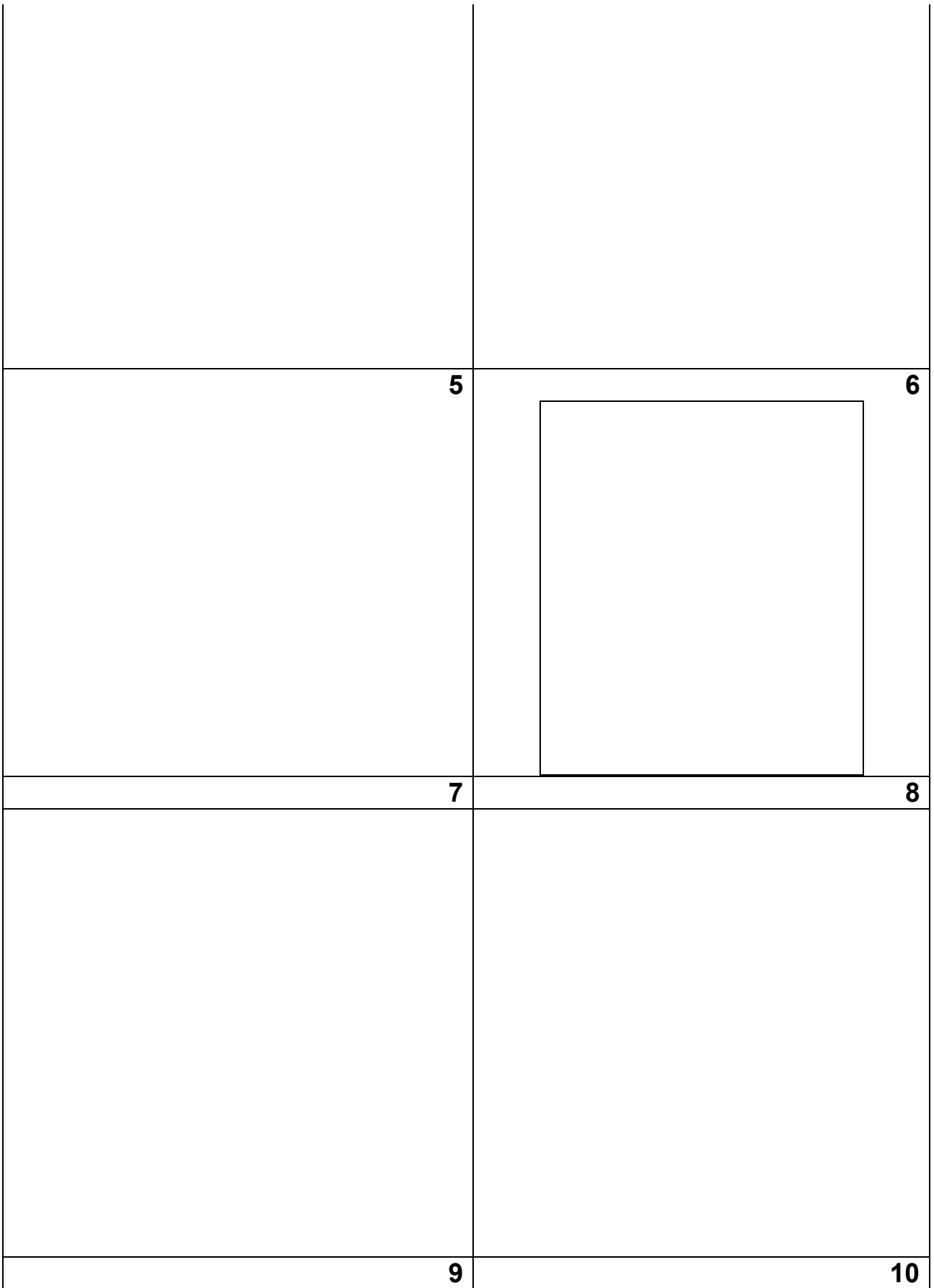
'

4 – _____

X, Y 4).

				V	V	V	V	V		
	10	20	35	45	5	50	40	30	25	15

	1	2
	3	4



11	12
13	14
15	16

17	18
19	20

21	22
23	24
25	26

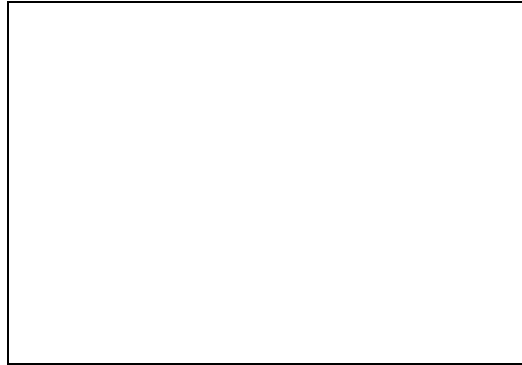
27	28
29	30

4.

$X \ Y$

n

·
;



5 - _____

5).

1, 11, 21	2, 12, 22
3, 13, 23	4, 14, 24
5, 15, 25	6, 16, 26

7, 17, 27	8, 18, 28
9, 19, 29	10, 20, 30

5.

5

5.1

1 - 10	
11 - 20	
21 - 30	

				V	V	V	V	V		
R_1	1,5	1,2	1,2	1,8	1,5	2,0	1,6	0,7	0,2	1,2
R_2	0,25	0,4	0,3	0,6	0,5	0,4	0,8	0,35	0,1	0,6
R_3	1	0,5	0,8	0,8	0,5	1,6	1,0	0,7	0,6	1,0
t, c	0,5	1	1,5	2	0,6	0,8	1,2	1,6	1,8	2,2

:



,

.

:

,

-

-

= 1,2,3

:

.

:

-

.

:

,

:

.

7

-

-

-

-

6 - _____
m

.
.

6

,

,

1		11		21	
2		12		22	
3		13		23	
4		14		24	
5		15		25	
6		16		26	
7		17		27	
8		18		28	
9		19		29	
10		20		30	

	2.0		V	4.5	
	2.5		V	5.0	
	3.0		V	6.0	
V	3.5			7.0	
V	4.0			8.0	

\cdot X $Y:$
 $Y:$ X
 \square ; X
 $Y:$ X
 X Y :

7 - _____

).

$r = 0,2$

$k = 0,01$

$f = 0,2,$

	1, 11, 21
	2, 12, 22
	3, 13, 23

4, 14, 24

5, 15, 25

6, 16, 26

7, 17, 27

	8, 18, 28
	9, 19, 29
	10, 20, 30

7.

7

	,	,		,	,
1 – 5	30	10	16 – 20	60	30
6 – 10	45	15	21 – 25	30	25
11 – 15	60	20	26 – 30	45	35

S_I

				V	V	V	V	V		
$m_1,$	110	100	120	150	200	210	140	130	160	180
$m_2,$	40	80	50	60	80	70	60	40	70	60
$S_I,$	1,4	2,0	2,6	2,4	1,2	1,8	2,2	2,8	1,6	1,0

$$= + ,$$

$$2.$$

$$= ,$$

$$= + ,$$

$$= \square -$$

$$: =).$$

.
 :
 = + ,
 -
 -
 = · ,
 -
 = · .
 -
 = · :
 = · - · ,
 -
 -
 =
 = ·
 -
 = · - · ,
 -
 = -

, - = . : ,

().

2.

5	6
7	8
9	10

11	12
13	14
15	16

17	18
-----------	-----------

19	20
-----------	-----------

21	22
-----------	-----------

23	24
-----------	-----------

25	26
-----------	-----------

27	28
-----------	-----------

29	30
-----------	-----------

-										
				V	V	V	V	V		
,	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270

-

-

= ,

-

-

:

= · , ,

pa -

= , ,

, , , .

,



) -

= + :

.

,

b



-

.

$$= ab \cdot \quad / AB, \quad = b \cdot \quad / BC .$$

, , ,

.

= = . , .

$$= \square,$$

6.

$$\square -$$

$$= , = + ,$$

$$), -$$

$$), - ,$$

$$\square).$$

$$= + = + + ,$$

-

$$), -$$

$$) -$$

$$\square).$$

$$= , = ,$$

, , -

$$\square,$$

$$\square$$

, , , -

$$b - ,$$

, , .

.

.

, , ,

.

9 - _____

P_1, P_2, P_3, P_4

l_1, l_2, l_3, l_4

6).

	1, 11, 21
	2, 12, 22
	3, 13, 23
	4, 14, 24

5, 15, 25
6, 16, 26
7, 17, 27
8, 18, 28

9, 19, 29
10, 20, 30

6.

5 2.

	$l_1,$	$l_2,$	$l_3,$	$l_4,$	$A_{1,2}$	$A_{2,2}$	$A_{3,2}$	$A_{4,2}$
1-10	0.2	0,4	0,6	0,8	12	20	24	35
11-20	0,3	0,5	0,8	1,0	10	25	30	32
21-30	0,4	0,4	0,6	0,8	20	24	36	40

	I			IV	V	VI	VII	VIII		
$P_1,$	12	16	14	18	20	24	26	28	30	10
$P_2,$	6	9	10	7	10	15	14	16	18	14
$P_3,$	12	18	22	10	20	35	16	50	40	30
$P_4,$	8	24	22	20	40	18	34	30	32	26

—

:

5.

.

,

.

-

-

-

.

=

,

-

-

-

8.

= + + + .

— _____

1 2 3 4

).

	1, 11, 21
	2, 12, 22
	3, 13, 23

4, 14, 24

5, 15, 25

6, 16, 26

7, 17, 27

	8, 18, 28
	9, 19, 30
	10, 20, 30

7.

$$G = 0,8 \cdot 10^5 \quad ^2.$$

	$l_1,$	$l_2,$	$l_3,$	$l_4,$	l_2
1-10	0,5	0,4	0,3	0,2	40
11-20	0,6	0,3	0,5	0,3	50
21-30	0,5	0,4	0,5	0,2	60

	I			IV	V	VI	VII	VIII		
$l_1,$	2,0	2,0	4,0	6,0	2,0	4,0	2,0	5,0	6,0	5,0
$l_2,$	3,0	4,0	7,0	5,0	8,0	3,0	2,0	7,0	4,0	2,0
$l_3,$	2,0	8,0	5,0	1,0	4,0	1,0	8,0	4,0	5,0	2,0
$l_4,$	1,0	3,0	10,0	4,0	5,0	3,0	5,0	2,0	6,0	8,0

2.

—

$$= \square ,$$

-

-

$$= -$$

,

VII VII).

:

$$= ,$$

-

,

-

-

- _____

11).

$$] = 80 \quad ^2.$$

	1
	2
	3
	4

5

6

7

8

	9
	10
	11
	12

	13
	14
	15
	16

	17
	18
	19
	20

	21
	22
	23
	24

	25
	26
	27
	28

	29
	30

1, 6, 11, 16, 21, 26	
2, 7, 12, 17, 22, 27	
3, 8, 13, 18, 23, 28	
4, 9, 14, 19, 24, 29	
5, 10, 15, 20, 25, 30	

	I			IV	V	VI	VII	VIII		
	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
<i>q</i>	4,2	5,0	6,0	5,4	4,6	4,0	5,6	4,8	5,2	4,4
	26	22	28	34	58	36	30	24	40	20
<i>l</i>	4,5	4,8	4,0	5,6	5,4	4,6	5,0	5,2	4,4	4,2
<i>l₁</i>	1,5	2,0	1,0	4,2	1,8	2,4	2,0	2,6	1,1	2,8



-



5.

,

7



-

-

-

- □
 -
 - *q*
 -
 -
 [],
] -
 -
 :
 .

VIII

: =
 : = : =

10.

VII VII).

— ,

d)).

- [] = 7,0 2 _
- [] = 80 2 _
- [] = 160 2 _
- [] = 70 2 _

d
VII VII).

	<i>b,</i>	,	,		<i>b,</i>	,	,
1 – 5	100	60	6	16 – 20	120	60	10
6 – 10	140	45	8	21 – 25	160	45	14
11 – 15	200	30	12	26 – 30	220	30	16

	I			IV	V	VI	VII	VIII		
	400	420	430	440	450	460	470	480	490	500

1, 6, 11, 16, 21, 26

2, 7, 12, 17, 22, 27
3, 8, 13, 18, 23, 28

4, 9, 14, 19, 24, 29

5, 10, 15, 20, 25, 30

I

=],

] -

-

= .

$b -$

$= b \cdot x,$
 $x -$

$x.$

$$] - \quad = \quad],$$

$$= \boxed{}.$$

$$d - \quad = \quad \cdot k \cdot n, \quad k - \quad n -$$

$d.$

$$] - \quad = \quad], \quad = \quad \cdot d \cdot n - \quad n -$$

$$d \quad , \quad .$$

$$] - \quad = \quad], \quad -$$

$$= \boxed{}.$$

$$= 0.7 \cdot ,$$
$$= b + 2x -$$

—

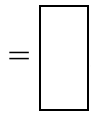
$b -$

x



	<i>m,</i>		<i>m,</i>		<i>m,</i>		<i>m,</i>		<i>m,</i>		<i>m,</i>
1	1,0	6	22,0	11	1,75	16	12,0	21	3,0	26	7,0
2	28,0	7	1,375	12	16,0	17	2,5	22	9,0	27	4,5
3	1,125	8	20,0	13	2,0	18	11,0	23	3,5	28	6,0
4	25,0	9	1,5	14	14,0	19	2,75	24	8,0	29	5,5
5	1,25	10	18,0	15	2,25	20	10,0	25	4,0	30	5,0

	I			IV	V	VI	VII	VIII		
	1200	720	750	630	990	950	720	1000	980	1400
	190	450	375	200	220	380	400	250	350	280
	20	20	21	20	18	22	20	17	20	18



:

.

,

.

:

.

:

;

:

.

$$c = 0,25m.$$

8

,

.

9

10

$$\begin{array}{r} \boxed{} \\ = \end{array} : \begin{array}{r} \boxed{} \\ 1,25 \end{array} = 2,25 .$$

12

$$\begin{array}{r} , \\ , \end{array} : \begin{array}{r} . \\ . \end{array} = 13 .$$

- _____

14).

$$= 0,97 - \qquad \qquad \qquad = 0,96 -$$

$$0,98 - \qquad \qquad \qquad = 0,75 - \qquad \qquad \qquad =$$

$$\qquad \qquad \qquad = 0,96 -$$

14.1

	,	,		,	,
1 – 5	4,6	720	16 – 20	4,0	970
6 – 10	2,6	980	21 – 25	3,8	600
11 – 15	3,5	750	26 – 30	3,6	960

14.2

	I			IV	V	VI	VII	VIII		
	1,25	1,6	2,0	2,5	3,15	4,0	4,5	5,0	5,6	6,3
	6,3	5,0	4,5	4,0	3,15	2,5	2,0	1,8	1,6	1,25
	12,5	16	20	28	22,4	25	18	14	10	8
	6,0	2,25	5,0	2,6	4,6	2,8	4,0	3,2	3,6	2,2
	1,8	6,4	2,0	6,0	2,5	5,6	3,15	5,0	4,5	4,0

1, 11, 21	2, 12, 22
3, 13, 23	4, 14, 24
5, 15, 25	6, 16, 26
7, 17, 27	8, 18, 28

1. / -
2. - 640 .
3. / - 1981.
4. - 256
5. .
. - .:
6. -
7. -
8. -
9. I. - 4. - 342
10. -
11. 1989. -
12. - 1982. - 335
13. - II
- 9. -
14. 368 /
15. - /
16. -
17. 1980.- ,
. - -

18. / .-
19. .-
20. -
21. -
22. - 90.-229
23. . . .- .: . / -
24. - / -
25. / - -
26. / .-
27. -
28. - / - .: , 1987. - 560
29. -
30. 1984. - / - .: , 1970. - 396
31. -
32. - .: , 1986. - 285
33. - / -
34. - / - -592
35. / -
36. / , 1980. - 512
37. -

38. —

2010. —

39. — —

40. — /

41. — — 3

42. — — —

43. / —

44. — —

45. — —

46. — —

47. — — —

48. — — /

176

49. — — —

50. — — —

51. — — —

52. — — —

53. — — /

54. — — —

55. — —

— 2016.—

1.

0	0	1,0	0
2	0,035	0,999	0,035
5	0,087	0,996	0,088
8	0,139	0,990	0,141
10	0,174	0,985	0,176
12	0,208	0,978	0,213
15	0,259	0,966	0,268
18	0,309	0,951	0,325
20	0,342	0,940	0,364
22	0,375	0,927	0,404
25	0,423	0,906	0,466
28	0,469	0,883	0,532
30	0,5	0,866	0,577
32	0,530	0,848	0,625
35	0,574	0,819	0,700
38	0,616	0,788	0,781
40	0,643	0,766	0,839
42	0,669	0,743	0,900
45	0,707	0,707	1,0
48	0,743	0,669	1,111
50	0,766	0,643	1,192
52	0,788	0,616	1,280
55	0,819	0,574	1,428
58	0,848	0,530	1,600
60	0,866	0,5	1,732
62	0,883	0,469	1,881
65	0,906	0,423	2,145
70	0,940	0,342	2,747
75	0,966	0,259	3,732
80	0,985	0,174	5,671
85	0,996	0,087	11,430
90	1,0	0	-

2.

1. ; (-
2. ;
3. ;
4. ;
5. ;
6. ;
7. ;
8. ;
9. ;
10. ;
11. ;
12. ;
13. ;
14. ;
15. ;
16. ;
17. ;
18. ;
19. ;

3.

, -

- 1. ; ;(-
- 2. ; .
- 3. ; .
- 4. ; .
- 5. ; ;(-
- 6. ; .

4.

- 1. ; 9. .
- 2. . 10. .
- 3. ;(11. .
- 4. . 12. .
- 5. ;(13. .
- 6. . 14. .
- 7. . 15.
- 8. .

5.

; (- .

6. , [], [

	· ,	· ,	[]	[]
	1,96 – 2,16	7,8 – 8,3	60 – 250	760 – 250
	1,5 – 1,6	4,5	28 – 80	120 – 150
	1,0 – 1,3	4,0 – 4,9	30 – 120	30 – 120
	0,98 – 1,08	3,5 – 3,7	70 – 140	70 – 140
	0,74 – 1,22	–	60 – 120	60 – 120
	0,1 – 0,16	0,055	9 – 13	13 – 15

7.

– 74)

5	10	20	40	5	10	20	40
		1,0	1,0		3,2		3,4
	1,0		1,05			3,6	3,6
		1,1	1,1				3,8
1,0			1,15			4,0	4,0
		1,2	1,2		4,0		4,2
	1,2		1,3			4,5	4,5
		1,4	1,4	4,0			4,8
			1,5			5,0	5,0
		1,6	1,6		5,0		5,3
	1,6		1,7			5,6	5,6
		1,8	1,8				6,0
1,6			1,9			6,3	6,3
		2,0	2,0		6,3		6,7
	2,0		2,1			7,1	7,1
		2,2	2,2	6,3			7,5
			2,4			8,0	8,0
		2,5	2,5		8,0		8,5
	2,5		2,6			9,0	9,0
		2,8	2,8				9,5
2,5			3,0	10		10,0	10,0
		3,2	3,2		10		10,5

8.

– 72, 8509-72

—
—
— ;
—
—
—
—
—

-					<i>x-x</i>			<i>y-y</i>	
	<i>h,</i>	<i>b,</i>	<i>d,</i>	<i>t,</i>	,	,	,	,	,
12	120	64	4,8	7,3	350	58,4	33,7	27,9	8,72
14	140	73	4,9	7,5	572	81,7	46,8	41,9	11,5
16	160	81	5,0	7,8	873	109	62,3	58,6	14,5
18	180	90	5,1	8,1	1290	143	81,4	82,6	18,4
18	180	100	5,1	8,3	1430	159	89,8	114	22,8
20	200	100	5,2	8,4	1840	184	104	115	23,1
	200	110	5,2	8,6	2030	203	114	155	28,2
22	220	110	5,4	8,7	2550	232	131	157	28,6
	220	120	5,4	8,9	2790	254	143	206	34,3
24	240	115	5,6	9,5	3460	289	163	198	34,5
	240	125	5,6	9,8	3800	317	178	260	41,6
27	270	125	6,0	9,8	5010	371	210	260	41,5

	270	135	6,0	10,2	5500	407	229	337	50,0
30	300	135	6,5	10,2	7080	472	268	337	49,9
	300	145	6,5	10,7	7780	518	292	436	60,1
33	330	140	7,0	11,2	9840	597	339	419	59,9
36	360	145	7,5	12,3	13380	743	423	516	71,1
40	400	155	8,3	13,0	19062	953	545	667	86,1
45	450	160	9,0	14,2	27696	1231	708	808	101
50	500	170	10,0	15,2	39727	1589	919	1043	123
55	550	180	11,0	16,5	55962	2035	1181	1356	151

—

—

;

—

—

—

—

—

8.2.

-					$x-x$			$y-y$	
	$h,$	$b,$	$d,$	$t,$,	,	,	,	,
5	50	32	4,4	7,0	22,8	9,1	5,59	5,61	2,75
8	80	40	4,5	7,4	89,4	22,4	13,3	12,8	4,75
10	100	46	4,5	7,6	174	34,8	20,4	20,4	6,48
12	120	52	4,8	7,8	304	50,6	29,6	31,2	8,52
14	140	58	4,9	8,1	491	70,2	40,8	45,4	11,0
14a	140	62	4,9	8,7	545	77,8	45,1	57,5	13,3
16	160	64	5,0	8,4	747	93,4	54,1	63,3	13,8
16a	160	68	5,0	9,0	823	103	59,4	78,8	16,4
18	180	70	5,1	8,7	1090	121	69,8	86,0	17,0
18a	180	74	5,1	9,3	1190	132	76,1	105	20,0
20	200	76	5,2	9,0	1520	152	87,8	113	20,5
20a	200	80	5,2	9,7	1670	167	95,9	139	24,2
22	220	82	5,4	9,5	2110	192	110	151	25,1
22a	220	87	5,4	10,2	2330	212	121	187	30,0
24	240	90	5,6	10,0	2900	242	139	208	31,6
24a	240	95	5,6	10,7	3180	265	151	254	37,2
27	270	95	6,0	10,5	4160	308	178	262	37,3
30	300	100	6,5	11,0	5810	387	224	327	43,6
33	330	105	7,0	11,7	7980	484	281	410	51,8
36	360	110	7,5	12,6	10820	601	350	513	61,7
40	400	115	8,0	13,5	15220	761	444	642	73,4

	5
	6
	1	8
1.1.	8
	10
	12
	15
	16
1.6.	17
1.7.	19
1.8.	20
	24
	2	25
	25
	27
	28
2.4.	28
2.5.	29
	30
2.7.	31
	34
2.9.	35
2.10.	36
	37

3	39
	39
	40
	43
	50
	54
4	55
	55
	55
4.3.	57
	58
	60
	62
4.7.	63
4.8.	65
4.9.	66
4.10.	67
	70
5	71
	71
	73
5.3.	75
	80
5.5.	82
5.6.	87
	89
6	90
	90
6.2.	91

	,	94
6.4.		95
6.5.		98
		101
		104
		107
	7	109
7.1.		109
7.2.			
		111
7.3.		113
		115
		118
7.6.			
		124
7.7.			
		125
		128
	8.	129
		129
		130
8.3.		131
		132
8.5.		133
8.6.		134
8.7.		136
		139
8.9.		142
		143
		144
		144
		144
		145

	149
	150
10.1.	150
	—	151
	154
	155
	157
	157
	160
	167
1		
	168
	168
	169
	170
	171
	173
	174
	175
	176
	179
	179
	180
	185
1	187
	187
	188
	190
	190
	191
	192
	193
	195

	196
	197
1	198
	198
	200
	201
	203
	205
	206
	209
	212
1	213
	213
	215
	217
	218
	222
	226
	V	
5.	227
15.1	229
1	231
15.3	234
15.4	238
1	240
1	243
15.7	246
	248
	250
	250
16.2.	251
16	259
	260

16	261
16.6.	272
16	278
16.8.	281
16	285
16	287
16	292
	305
	308
17.1	308
	309
	321
17.4	333
	334
	336
 II	345
	359
	361
	363
18	363
18	364
18	367
18	380
18.5.	399
18	407
	408
	410

19	410
19	411
19	416
19	417
19	420
19	423
19	II 424
19	426
19		
	432
19.10.	435
	440
	441
20	441
20	443
20	446
20	451
20	456
20	458
20	463
20	466
20		
	469
20		
	475
	478
20	480
	483
	485
21	485
	487
21	489
21	493
21.5.	496
21.6.	497
21	504
	509
	510
22	510

22	511
22	518
22	528
22	530
22	534
22	535
22.8.	538
	541
	543
23.1	543
23.2	547
23.3	549
	552
23	554
23	559
	568
	569
24	569
	574
24.3	577
24.4	580
24	585
	588
	595
	596
	596
25.2.	598
25.3.	600
25.4.	602
25.5.	603
25.6	608
25.7	610
25.8	612

25.9	... 614
25.10 614
25.11 616
 620

V

 621
 621
 622
 623
 626
 629
 630
 630
 631
27.3. 635
27.4. 637
27.5. 640
 641
 643
 643
 646
 648
 651
 653
 657
 657
 659
 659
 660
 662
 674
 675
 681
 682

.....	686
.....	687
.....	687
.....	691
.....	693
.....	695

VI

.....	696
.....	696
.....	697
.....	699
.....	701
.....	702
32.	704
,	704
,	707
,	712
,	714
,	715
,	715
,	720
,	725
,	728
,	731
,	733
,	734
34.1.	734
.....	739
.....	744
.....	752
.....	756
.....	757
35.1.	757
.....	759
.....	762
.....	766

	767
	771
35.7.	775
	780
	782
36.1.	782
36.2.	784
36.3.	788
36.4.	789
	791
	792
37.1.	792
	794
	797
	804
	811
	814
	815
	885
	888
	895