Лисогор В. М.

Яропуд В. М.

Король Є. В.

Павлов В. О.

Вінницький національний аграрний університет

УДК 004.942:519.852:631.111.2:636.084

МЕТОД ПОБУДОВИ ПРИКЛАДНОЇ МОДЕЛІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДЛЯ РІШЕННЯ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ ЗАДАЧ

Разработан метод построения прикладной модели линейного программирования для решения сельскохозяйственных задач, которые разбиты на две подмодели: оптимального использования посевных площадей, самого дешевого набора полноценных потребительских веществ откорма свиней.

A method is developed for construction of a applied model of linear programming for the solution of agricultural problems, which are divided into two sub-models: the optimal use of sown areas, the most cheap set of full-fledged consumer substances for fattening pigs.

Keywords: application model, linear programming, the sown area, fattening pigs.

Вступ.

Необхідність та потреба розробки методів побудови прикладних моделей лінійного програмування для сільськогосподарського виробництва остається достатньо актуальною проблемою, яка чекає свого повного чи часткового вирішення. Одна з самих відомих книг у повоєнному часі остається монографія [1], автором якої є відомий вчений США Д.Данціг. У цій монографії зібрані математичні моделі, які можуть бути використані у сільськогосподарському виробництві для вирішення цілої низки техніко-економічних проблем. Монографія [2] має цілий розділ, що присвячений лінійним цільовим функціям, лінійному програмуванню з обмеженнями у вигляді лінійних нерівностей. Книга [3] в якій викладенні теоретичні основи нового математичного апарату – континуального лінійного програмування, який представляє собою узагальнення лінійного програмування, який представляє собою більш високим рівнем лінійного програмування. Підручник [4] містить основні розділи курсу «Математичне програмування», де кожна тема супроводжується прикладами та контрольними запитаннями. У навчальному посібнику [5] викладено теорію визначників і матриць, наведені поняття лінійних просторів, систем лінійних рівнянь, а також методи їх розв'язання.

Мета публікації: Запропонувати і розробити метод побудови прикладної моделі лінійного програмування для рішення сільськогосподарської задачі з розбиттям її на дві складові підмоделі: оптимального використання посівних площ, найдешевшого набору повноцінних споживчих речовин відгодівлі свиней.

Постановка задачі побудови моделі.

Галузь застосування математичних методів, зокрема моделей лінійного програмування, у сільському господарстві досить широка. За допомогою методів лінійного програмування можна розв'язати такі задачі:

- вибору найкращої структури посівних площ;
- визначення оптимального підбору сільськогосподарських машин у господарстві;
- визначення оптимального раціону відгодівлі корів, телят, свиней, кролів, птиці, тощо;
- підбір найкращої структури органічних та мінеральних добрив.

Виконаємо загальну постановку задачі.

Ми працюємо зі наступними множинами:

- множина вхідних змінних $\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$;
- множина вихідних змінних $\{y_1, y_2,\ldots, y_n\}$;
- множина параметрів для i-тої стрічки та i-того стовпчика $\{a_{i1}, a_{i2},\ldots, a_{in}\}$;
- множини вхідних та вихідних змінних є невід'ємними $\{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0;\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ldots,\ y_n\}$;
- цільова функція, або критерій якості функціонування системи, що має множину вагових позитивних коефіцієнтів при невідомому x_i $\{c_1 > 0,\ c_2 > 0,\ldots,\ c_n > 0\}$.

Тепер у нас є можливість побудувати загальну модель лінійного програмування, яка буде мати два різновиди – у вигляді рівностей, у вигляді нерівностей, цільова функція для двох різновидів остається незмінною. Система лінійних рівнянь у вигляді рівностей має вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_1 n_{xn} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_2 n_{xn} = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1}$$

і лінійну функцію (цільову функцію):

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n\,. \tag{2}$$

Треба знайти такий невід'ємний розв'язок системи (1) при чому лінійна цільова функція (2) набуває найбільшого (найменшого) значення.

Може статися, що система (1) не має невід'ємних розв'язків, тоді й задача лінійного програмування не має розв'язків. Якщо система рівнянь (1) має єдиний невід'ємний розв'язок, то й задача лінійного програмування має єдиний розв'язок.

У практичних задачах система обмежень має нескінченну множину невід'ємних розв'язків. Задача лінійного програмування полягає в саме тому, щоб з цієї множини знайти той розв'язок, при якому цільова функція набуває максимуму (мінімуму). Далі, коли йтиметься про розв'язки системи обмежень матимемо на увазі тільки невід'ємні розв'язки.

Як було зазначено, шуканий розв'язок задачі лінійного програмування повинен задовольняти систему лінійних рівнянь. Нижче покажемо, що систему лінійних нерівностей можна звести до системи лінійних рівнянь введенням допоміжних невід'ємних змінних. Тому і загальному випадку задач і лінійного програмування сформулювали у вигляді рівнянь (1) і (2).

Математична модель у вигляді m лінійних нерівностей з n невідомими прийме вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_1 n_{xn} \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_2 n_{xn} \leq b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases} \tag{3}$$

Для забезпечення можливості отримання задовільних рішень введемо допоміжні невід'ємні змінні $y_1, y_2,\ldots, y_m$ і зведемо систему нерівностей (3) до системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m. \end{cases} \tag{4}$$

Якби нерівності системи (3) мали протилежні знаки, то допоміжні невід'ємні змінні $y_1,\ y_2,\ldots,\ y_m$ віднімались би. Будь-якому невід'ємному розв'язку $x^0_1,\ x^0_2,\ldots,\ x^0_n$ системи нерівностей (3) відповідає певний невід'ємний розв'язок $x^0_1,\ x^0_2,\ldots,\ x^0_n,\ y^0_1,\ y^0_2,\ldots,\ y^0_m$ системи рівнянь (4). Справді, якщо $x^0_1,\ x^0_2,\ldots,\ x^0_n$ є розв'язком системи нерівностей (3), то виконуються нерівності:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_1^0 + \ldots + a_{1n}x_n^0 \leq b_1, \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_1^0 + \ldots + a_{2n}x_n^0 \leq b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1^0 + a_{m2}x_2^0 + \ldots + a_{mn}x_n^0 \leq b_m. \end{cases} \tag{5}$$

Введемо позначення:

$$\begin{cases} y_1^0 = b_1 - (a_{11}x_1^0 + a_{12}x_1^0 + \ldots + a_{1n}x_n^0), \\ y_1^0 = b_2 - (a_{21}x_1^0 + a_{22}x_1^0 + \ldots + a_{2n}x_n^0), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_m^0 = b_m - (a_{m1}x_1^0 + a_{m2}x_2^0 + \ldots + a_{mn}x_n^0). \end{cases} \tag{6}$$

Тоді, $y^0_1 \geq 0,\ y^0_2 \geq 0,\ldots,\ y^0_m \geq 0$, а числа $x^0_1,\ x^0_2,\ldots,\ x^0_n,\ y_1,\ y_2,\ldots,\ y_m$ є розв'язком системи рівнянь (4).

Навпаки, будь-якому невід'ємному розв'язку $x^0_1,\ x^0_2,\ldots,\ x^0_n,\ \ y_1,\ y_2,\ldots,\ y_m$ системи рівнянь (4) відповідає певний невід'ємний розв'язок $x^0_1,\ x^0_2,\ldots,\ x^0_n$, системи нерівностей (3), (5).

Справді, оскільки система чисел $x^0_1,\ x^0_2,\ldots,\ x^0_n,\ \ y_1,\ y_2,\ldots,\ y_m$ є розв'язком рівнянь (4), то виконуються рівності:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_1^0 + \ldots + a_{1n}x_n^0 + y_1^0 = b_1, \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_1^0 + \ldots + a_{2n}x_n^0 + y_1^0 = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1^0 + a_{m2}x_2^0 + \ldots + a_{mn}x_n^0 + y_m^0 = b_m. \end{cases} \tag{7}$$

Оскільки $y^0_1 \geq 0$, $y^0_2 \geq 0, \ldots, y^0_m \geq 0$, то дістаємо рівності:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \ldots + a_{1n}x_n^0 \leq b_1, \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + \ldots + a_{2n}x_n^0 \leq b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1^0 + a_{m2}x_2^0 + \ldots + a_{mn}x_n^0 \leq b_m. \end{cases} \tag{8}$$

Звідки й випливає, що числа $x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n$ є розв'язком системи нерівностей (3), (9).

Отже, нами встановлено взаємно однозначну відповідність між множиною розв'язків системи нерівностей (3) і системи рівнянь (4).

З'ясуємо геометричний зміст допоміжних невідомих $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Розглянемо деяку точку $M(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n)$, багатокутника розв'язків, який визначається системою нерівностей (3). Позначимо через h_i відстань від точки M до i-тої гіперплощини. Ця відстань дорівнює:

$$h_i = \frac{b_i - \left(a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \ldots + a_{in}x_n^0\right)}{\sqrt{a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2}} \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{9}$$

Порівнявши останні співвідношення (9) з рівностями (6), матимемо:

$$\begin{aligned} y_1^0 &= h_1\sqrt{\left(a_{11}^2 + a_{12}^2 + \ldots + a_{1n}^2\right)}, \\ y_2^0 &= h_2\sqrt{\left(a_{21}^2 + a_{22}^2 + \ldots + a_{2n}^2\right)}, \\ &\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_m^0 &= h_m\sqrt{\left(a_{m1}^2 + a_{m2}^2 + \ldots + a_{mn}^2\right)}. \end{aligned} \tag{10}$$

Отже значення допоміжних змінних пропорційне відстаням від точки $M(x^0_1, x^0_2, \ldots, x^0_n)$ до граничних гіперплощин:

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$. (11)

Таким чином, ми отримали теоретичну частину методу побудови прикладної моделі лінійного програмування для рішення сільськогосподарських задач.

Для підтвердження адекватності отримання результатів у теоретичній частині нашої публікації, розглянемо два приклади.

Контрольний приклад 1, з його числовими значеннями.

Сільськогосподарське підприємство відвело три земельних масиви площею 5, 8 і 9 тис.га відповідно під посіви жита, пшениці і кукурудзи. Середню врожайність культур на кожному масиві подано в таблиці 1.

Таблиця 1

Середня врожайність культур трьох масивів

Культура	Земельні масиви		
	перший	другий	третій
Жито, ц/га	20	18	17
Пшениця, ц/га	30	25	28
Кукурудза, ц/га	25	24	26

З 1 ц жита господарство одержує 20 у.г.о. (умовних грошових одиниць), за 1 у.г.о. і за 1 ц кукурудзи – 14 у.г.о.[5].

Яку площу слід відвести господарству під кожну з культур і на якому масиві, щоб одержати максимальний прибуток, коли за планом передбачається зібрати не менше як 19 000 ц жита, 158 000 ц пшениці і 300 000 кукурудзи.

Позначимо через x_1 (га) площу, яка відводиться під жито на першому масиві, через x_2 (га) площу, яка відводиться під жито а другому масиві, через x_3 (га) площу, яка відводиться під жито на третьому масиві.

Аналогічно через x_4, x_5, x_6 (га) позначимо відповідну площу під пшеницю на першому, другому і третьому масивах і через x_7, x_8, x_9 (га) – площу під кукурудзу на першому, другому і третьому масивах.

Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_7 = 5000 \\ x_2 + x_5 + x_8 = 8000 \\ x_3 + x_6 + x_9 = 9000 \end{cases} \tag{11}$$

Ураховуючи врожайність кожної культури на кожному з масивів та беручі до уваги план, дістанемо такі три обмеження:

$$\begin{cases} 20x_1 + 18x_4 + 17x_7 \geq 19000 \\ 30x_2 + 25x_5 + 28x_8 \geq 158000 \\ 25x_3 + 24x_6 + 26x_9 \geq 300000 \end{cases} \tag{1.2}$$

Функція мети (цільова функція) прийме вигляд:

$$z = 20\,(20x_1 + 18x_4 + 17x_7) + 25\,(30x_2 + 25x_5 + 28x_8) + 14\,(25x_3 + 24x_6 + 26x_9). \tag{1.3}$$

Треба знайти такі невід'ємні значення $x_1, x_2, \ldots, x_9$, які задовольняють рівняння (1.1) і нерівності (1.2) та перетворюють лінійну функцію z (1.3) у максимум.

Контрольний приклад 2, з числовими значеннями.

Задача відгодівлі свиней звелась до знаходження найдешевшого набору певних вихідних споживчих речовин, які забезпечують одержання суміші із заданими властивостями.

Для відгодівлі свиней на фермі в щоденний раціон кожної свині треба включити не менше як 6 одиниць поживної речовини *A,* 8 одиниць поживної речовини *B,* і 12 одиниць поживної речовини *C*. Для відгодівлі можна використовувати три види кормів. Дані про вміст споживної речовини в одному кілограмі кожного корму подано в таблиці 2.

Таблиця 2

Числові значення споживчих речовин відгодівлі свиней

Категорії споживчих речовин	Споживна речовина		
	A	*B*	*C*
№1	2	1	3
№2	1	2	4
№3	3	1,5	2

Складемо раціон, який відповідає усім вимогам за поживністю, є найдешевшим, коли відомо, що один кілограм корму № 1 коштує 2 грн., корму №2 – 3 грн., корму №3 – 2,5 грн.

Позначимо через x_1, x_2, x_3 число кілограмів відповідно трьох видів кормів у кормовому раціоні свині. В 1 кг корму №1 міститься 2 одиниці речовини *A,* а в x_1 (кг) міститься $2x_1$ одиниць цієї речовини; в x_2 (кг) корму № 2 міститься $1x_2$ одиниць речовини *A* і в x_3 (кг) корму №3 міститься $3x_3$ одиниць речовини *A.* Тоді $2x_1 + 1x_2 + 3x_3$ становить загальну кількість одиниць поживної речовини *A* в раціоні. За умовою ця кількість речовини *A* не повинна бути меншою від 6. Отже,

$$2x_1 + 1x_2 + 3x_3 \geq 6. \qquad (2.1)$$

Аналогічно $x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3$ - загальна кількість речовини *B* в усьому раціоні, і за умовою його повинно бути не менше від 8 одиниць, тобто:

$$x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \geq 8. \qquad (2.2)$$

Загальна кількість поживної речовини *C* у раціоні становить $3x_1 + 4x_2 + 2x_3$ одиниць, і воно не повинно бути менше від 12, тобто:

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12. \qquad (2.3)$$

Вартість один кілограм корму № 1 коштує 2 грн., а для раціону його треба взяти x_1 (кг). Отже його вартість $2x_1$ (грн.). Аналогічно вартість корму №2 в раціоні становить $3x_2$ (грн.) і вартість корму №3 – $2{,}5x_3$ (грн.). Вартість усього раціону становить (у гривнях):

$$2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3 \qquad (2.4)$$

Задача полягає в тому, щоб підібрати такий склад раціону, який задовольняв би всі умови з поживності і був би найдешевшим.

Математично задачу формують так. Знайти невід'ємні значення змінних x_1, x_2, x_3, які задовольняли б систему нерівностей:

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \geq 8 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12 \end{cases}; \qquad (2.5)$$

і перетворювали б лінійну функцію:

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 2{,}5x_3\,, \qquad (2.6)$$

у мінімум. Таким чином, задача вирішена.

Висновки

Запропонований та розроблений метод побудови прикладної моделі лінійного програмування для рішення сільськогосподарських задач, яка була розділена на дві складові підмоделі: оптимального використання посівних площ під культури жита, пшениці, кукурудзи; найдешевшого набору повноцінних споживчих речовин відгодівлі свиней.

Література

1. Данциг Д.В. Линейное программирование, его применение и обобщение. Пер. с англ./ Д.В Данциг. – М.: « ПРОГРЕСС», 1966. – 600 с.

2. Ли Т.Г. Управление процессами с помощью вычислительных машин. Моделирование и оптимизация. Пер с англ. / Т.Г. Ли, Г.Э. Адамс, У.М. Гейнз. – М.: «Советское радио» 1972. – 312 с.

3. Раскин Л.Г. Континуальное линейное программирование: Монография. / Л. Г. Раскин, И.О. Кириченко. – Харьков. : Військовий ін-т ВВ МВС України. 2005. – 176 с.

4. Глушик М.М. Математичне програмування: Підручник./ М. М. Глушик, І. М. Копич, В.М. Сороківський. – Львів. : «Новий світ-2000», 2009. – 280 с.

5. Гетьманцев В. Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування : Навчальний посібник. – К.: Либідь, 2001. – 256 с.